Zlatni rez

Vodič kroz prezentaciju

1. Zlatni rez jedna je od najzahvalnijih tema za obradu u obliku projekta ili na neki nestandarni način. Pritom treba paziti na razinu znanja koja se očekuje od učenika sudionika u projektu. Sam problem vodi na kvadratnu jednadžbu $x^2+ax-a^2=0$ od koje se prihvaća pozitivno rješenje $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a\approx 0.618a$, što znači da veći dio dužine čini oko 61.8% njezine čitave duljine. Ako se projekt izvodi u 1. razredu, ovo će se rješenje jednostavno navesti, u drugom se ono može i izračunati. Projekt je pogodan i za provedbu u 4. razredu. Tada treba upotpuniti obradu s Fibonaccijevim nizom i njegovom vezom sa zlatnim rezom. Ova prezentacija također je jedno moguće rješenje.

2. Uobičajena definicija zlatnog reza je sljedeća: Na danoj dužini $\overline{AB}$ duljine a treba odrediti točku Z tako da omjer duljina veće od dviju dužina $\overline{AZ}$ i $\overline{ZB}$ i cijele dužine bude jednak omjeru duljina manje i veće od njih. Ako je $\overline{AZ}$ dulja i ako je $|AZ|=x$, onda treba biti $x:(a-x)=a:x$.

Pozitivno rješenje ove kvadratne jednadžbe jest $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a\approx 0.618a$. To se rješenje označava s Φ i zove se zlatni omjer. Oznaku je odabrao američki matematičar Mark Barr 1909. g. kao sjećanje na slavnog starogrčkog kipara Fidiju (Phidias).

Primijetimo kako se umjesto dužine neke duljine $a\neq 0$ može slobodno uzeti duljina $a=1$.

3. *Dana je dužina $\overline{AB}$. Treba konstruirati točku Z tako da površina kvadrata nad dužinom $\overline{AZ}$ bude jednaka površini pravokutnika nad $\overline{ZB}$ kojem je dulja stranica sukladna dužini $\overline{AB}$.*

To je bit Propozicije 11. iz II. knjige Euklidovih "*Elemenata*". Nije teško vidjeti da je riječ o problemu koji je ekvivalentan opisanomu iz točke 2. Naime, označimo li $|AZ|=x$, onda se zahtijeva da bude $x^2=a(a-x)$, odnosno x će se odrediti iz jednadžbe $x^2+ax-a^2=0$.

4. Ovaj se slajd može i ispustiti, ali u povoljnim okolnostima, kakve mogu primjerice biti u prirodoslovno-matematičkim programima, dobro ga je obraditi. Riječ je tek o jednoj stranici iz specifične, zorne obrade Euklidovih "*Elemenata*" koju je stilski dosljedno proveo engleski matematičar Oliver Byrne (1810.–1880.) te objavio 1847. godine.

Djelo je poput slikovnice koju treba prolaziti otkrivajući što se skriva iza obojenih sličica i simbola. Sama je slika zapravo ista kao i ona iz prethodnog slajda, ali zanimljivo je njezino "iščitavanje" koje je provedeno u tekstu uz sliku. Boljim se učenicima može preporučiti "dešifriranje", ali im onda treba prirediti obojenu presliku.

5. Opišimo sada i jednu jednostavnu konstrukciju točke Z. Nacrtajmo dužinu $\overline{AB}$. Neka je njezina duljina jednaka a. U točki B konstruiramo okomicu na $\overline{AB}$ duljine $\frac{a}{2}$. Oko točke C opišimo luk duljine $\frac{a}{2}$ koji siječe hipotenuzu pravokutnog trokuta ABC u točki D. I sad još prenesimo dužinu $\overline{AD}$ na dužinu $\overline{AB}$ tako da oko A opišemo luk duljine $|AD|$. Tako dobijemo točku Z. Lako je provjeriti:

$$x=|AD|=|AC|-\frac{a}{2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}-\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a.$$

Primijetite da je $|AC|=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

6. Pravokutnik kojem su stranice dijelovi dužine na koje je dužina podijeljena zlatnim rezom zove se zlatni pravokutnik. U graditeljstvu, a i u umjetnosti općenito, zlatni je pravokutnik vrlo prisutan. Taj oblik imaju formati mnogih knjiga, slika i sl.

Ako od zlatnog pravokutnika odsiječemo kvadrat (kao na slici), i ostatak će biti zlatni pravokutnik. To je jednostavno provjeriti.

Pretpostavka je $|AB| : |AD| = \Phi$. Dalje imamo:

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|EF|}{|EB|} = \Phi.$$

Ponavljanjem postupka odrezivanja kvadrata dobit ćemo čitav niz takvih pravokutnika.

7. Jedan od najčešćih primjera primjene zlatnog reza u arhitekturi jest Partenon u Ateni, hram posvećen božici Ateni izgrađen u 5 st. pr. Kr. na atenskoj Akropoli. Ta je građevina simbol starogrčke kulture i jedan od najznačajnijih spomenika čitave ljudske civilizacije. Njegovo pročelje može se smjestiti u zlatni pravokutnik. Promotrite i komentirajte sliku.

8. I u suvremenoj arhitekturi zlatni rez ima vrlo jak utjecaj. Posebice se njime bavio najpoznatiji graditelj prošlog stoljeća Le Corbusier. Razvio je svoj sustav proporcija nazvan *Modulor* koji se oslanja na Da Vincijeva Vitruvija. Opisao ga je kao harmoničnu i univerzalnu skalu mjera koja je primjenjiva i u arhitekturi i u mnogim tehničkim rješenjima.

   Le Corbusier je primijenio *Modulor* u mnogim svojim projektima, primjerice na obiteljskoj kući u Parizu, na kapeli Notre Dame du Haute, na zgradi u indijskom Kandigaru, na stambenoj zgradi u Marseillesu, na zgradi Ujedinjenih naroda u New Yorku. (Slike su poredane tim redoslijedom.)

9. Jedan od lijepih primjera u kojima nailazimo na zlatni rez jest pravilna petokraka zvijezda. Tu zvijezdu dobijemo iscrtavanjem svih dijagonala pravilnog peterokuta. Sjecišta svakih dviju dijagonala zlatni je rez svake od njih. Petokraka je bila simbol mnogih najraznovrsnijih skupina i udruga. Poznata je bila još i 3000 pr. Kr. u Mezopotamiji. Bila je i mistični simbol Pitagorejaca (Pitagorinih sljedbenika) itd., a suvremene Sjedinjene Američke Države nezamislive su bez ovog simbola.

   Jedna se lijepa petokraka nalazi i na krstionici u Splitskoj katedrali (11. stoljeće) i ona je prikazana na slici.

10. Rimski pisac i graditelj Vitruvije (1. st.) inspirirao je Leonarda da Vincija za crtež *Vitruvijeva čovjeka* (1847.). Vitruvije je autor glasovitoga traktata "*De architectura, libri decem*" (*Deset knjiga o arhitekturi*) u kojem je razradio teoriju proporcija. Ta je teorija uvelike utjecala na renesansne umjetnike pa i na Leonarda da Vincija koji je na spomenutom crtežu veličine 25×19.2 cm htio naglasiti *zlatne proporcije* ljudskoga tijela.

11. Luca Pacioli rođen je u Toskani 1446. g. Vjeruje se da je bio učenik Piera della Francesce, umjetnika koji je bio vrlo blizak matematici. Pacioli je u Milanu (1496.–1498.) napisao djelo "*De divina proportione*" (O božanskom omjeru), objavljeno u Veneciji 1509. Sačuvana su dva originalna primjerka, jedan je u Milanu u Biblioteca Pinacoteca Accademia Ambrosiana, drugi u Sveučilišnoj biblioteci u Genovi. U knjizi se obrađuje teorija proporcionalnosti i njezin odraz u umjetnosti, posebice zlatni rez i njegova primjena u arhitekturi.

    Na slici Jacopa de' Barbarija vidimo stol na kojem uočavamo geometrijski pribor i model dodekaedra, pravilnog poliedra kojemu su sve strane sukladni pravilni peterokuti. Rombokuboktaedar koji visi sa stropa ispunjen je vodom. Na slici Pacioli prikazuje jedan od Euklidovih poučaka. Neki povjesničari umjetnosti drže kako je u pozadini poznati slikar Albrecht Dürer.

12. Knjigu "*De divina proportione*" Luce Paciolija ilustrirao je Leonardo da Vinci koji je, kako se vjeruje, bio Paciolijev učenik. Na slici vidimo Leonardov autoportret i do njega knjigu snimljenu u Milanu. U donjem redu je nekoliko od više Leonardovih crteža na kojima su pretežno prikazani razni pravilni ili polupravilni poliedri čija struktura u sebi sadrži izvjesne proporcije koje se ravnaju po pravilu zlatnog reza.

13. Koliko je tema zlatnog reza rasprostranjena možda se najbolje vidi iz njezine zastupljenosti na poštanskim markama. Na prvoj je Luca Pacioli, ali u ponešto prilagođenoj inačici izvorne Della Francescine slike. Usporedite te slike i uočite razlike. Do nje je marka Monaka izdana u prigodi Godine matematike (2000). U donjem su retku marka Japana iz 1986., zatim marka Australije iz 1972. i konačno marka Švicarske kojom je 1987. obilježena 150. godišnjica Švicarskog društva inženjera i arhitekata.

14. Promotrimo još jednom zlatni pravokutnik i provedimo nekoliko koraka postupka odsijecanja kvadrata što je opisan u točki 6. Dobit ćemo tako redom točke *A*, *F*, *G*, *K*, *N*, ... Sve one pripadaju "*Zlatnoj spirali*", krivulji koja je u matematici poznata kao logaritamska spirala. Povežemo li te točke kružnim lukovima (kao na slici) krivulja koju dobijemo približna je slika "*Zlatne spirale*". Veliki švicarski matematičar Jacob Bernoulli nazvao je ovu krivulju "*spirala mirabilis*" (divna spirala).

"*Zlatna spirala*" u prirodi je vrlo česta. Vidimo je na presjeku nautilusa, sjemenke suncokreta poredane su tako da čine ovu krivulju, a njezin oblik imaju i orkanski vrtlozi.

15. Na ovom slajdu vidimo omotnicu s poštanskom markom Macaa. Macao je malo područje u Kini koje se sastoji od poluotoka i dvaju otoka na kojima živi 541 200 (podatak iz 2009.) stanovnika. Do 1999. bio je pod upravom Portugala, a tada je nadležnost preuzela Kina. Macao u Kini uživa veliku autonomiju, a u svijetu je posebno poznat po kockarnicama.

Zanimljivost ovoga pismovnog izdanja jest u tome što na sebi skriva gotovo sve što smo obradili u ovoj prezentaciji. U sredini je marka s oznakom Φ, što je standardna oznaka broja $\Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Učenicima možemo postaviti zadatak da (kao svojevrsno ponavljanje) protumače četiri sličice koje okružuju marku.