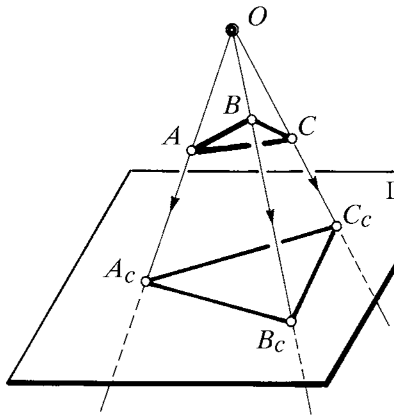
Uvod

U svim tehničkim strukama potrebno je znati trodimenzionalne figure (postojeće ili zamišljene) predočiti u ravnini, što je moguće učiniti posredstvom projiciranja.

Nacrtna geometrija (deskriptivna geometrija, deskriptiva) je matematička disciplina koja se bavi metodama projiciranja. To je grana geometrije koja posredstvom projiciranja konstruktivno–geometrijskom metodom u ravnini rješava mnoge stereometrijske zadaće. Jedan je od osnovnih ciljeva ove discipline razvijanje sposobnosti razmišljanja i zamišljanja u prostoru, tj. razvijanje prostornog zora. Ova se disciplina razvila iz potreba prakse, a začeci joj se naziru još u starom vijeku. Međutim, 1798. god. znanstveni joj je temelj postavio Francuz Gaspard Monge (1746–1818) objavljivanjem knjige "Géométrie descriptive". Po objavljivanju ovog djela krenuo je nagli razvitak nacrtne geometrije kao matematički zasnovane discipline, te je ona postala jednom od temeljnih znanosti tehnike.

Općenito o projiciranju

Dva su osnovna načina projiciranja koja se koriste u praksi. To su **centralno** i **paralelno** projiciranje. Spojimo li vrhove nekog lika, npr. trokuta ABC, s nekom konačnom točkom O, spojnice će OA, OB i OC probadati neku ravninu Π u točkama A_C, B_C i C_C (sl. 1.). Točku O zovemo **centrom projiciranja**, pravce OA, OB i OC **zrakama projiciranja**, a trokut $A_CB_CC_C$ **centralnom projekcijom** trokuta ABC u ravnini projekcije Π. Projiciranje, kod kojeg su zrake projiciranja međusobno paralelni pravci, zove se **paralelno** projiciranje. Pri tom zrake projiciranja mogu biti kose ili ortogonalne (okomite, normalne) u odnosu na ravninu projekcije (sl. 2. i 3.).

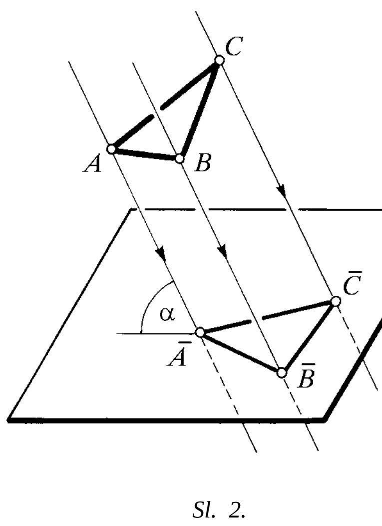


Sl. 1.

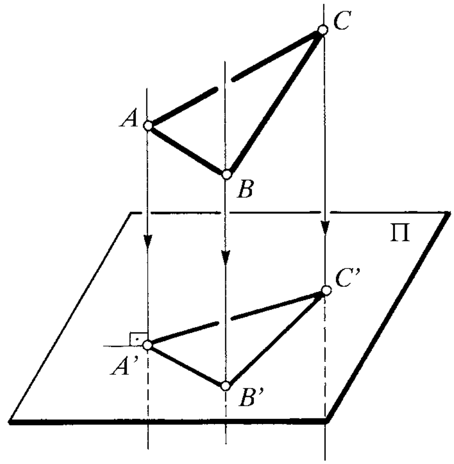
Paralelno projiciranje, kod kojeg su zrake projiciranja okomite na ravninu projekcije, naziva se **ortogonalnim**, a ako su kose, **kosim** projiciranjem.

Osnovni su zahtjevi postavljeni na ravninsku sliku nekog objekta *zornost* i *mogućnost rekonstrukcije* originala prema slici.

Očigledno su projekcije nekog objekta, npr. trokuta na određenu ravninu uz zadani centar, odnosno smjer projiciranja, jednoznačno određene. Međutim, obrat ne vrijedi. Naime, za zadani centar, odnosno smjer projiciranja i zadanu projekciju objekta u ravnini, postoji beskonačno mnogo originala u prostoru. U slučaju trokuta, to su svi trokuti u prostoru čiji vrhovi leže na zrakama projiciranja. Jednoznačnost u oba smjera postiže



Sl. 2.



Sl. 3.

se nekim dodatnim uvjetima, koji onda karakteriziraju pojedine metode u nacrtnoj geometriji.

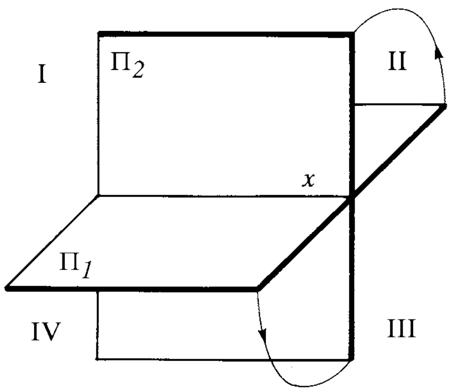
Da bi se postigla jednoznačnost pri rekonstrukciji objekata, u tehničkoj je praksi osobito pogodno ortogonalno projicirati na dvije ravnine koje su međusobno okomite. Iako je možda manje zorna od metode kosog projiciranja, ova metoda dvocrtnog postupka, odnosno ortogonalnog projiciranja na dvije ravnine, pogodnija je pri složenijim konstrukcijama. To je jedan od razloga da je u ovoj knjizi obrađena upravo ta metoda. Drugi razlog koji daje prednost ovoj metodi je povijesno-iskustveni. Solidno savladavanje suštine ove metode zasigurno olakšava razumijevanje i korištenje ostalih metoda projiciranja.

U ovoj knjizi obrađena je dakle *metoda dvocrtnog postupka*, koju je prvi sistematizirao G. Monge, pa se ona još naziva **Mongeova metoda**.

Osnove Mongeove metode

Ortogonalnu projekciju neke točke T na bilo koju ravninu Π dobijemo na sljedeći način: točkom T položimo pravac, tzv. zraku projiciranja, okomit na ravninu Π, a probodište te zrake s ravninom Π je **ortogonalna projekcija** točke T na ravninu Π. Ravninu Π zovemo **ravnina projekcije** ili **ravnina slike**.

Mongeova metoda *je metoda ortogonalnog projiciranja na dvije međusobno okomite ravnine projekcija, od kojih je jedna ravnina u horizontalnom, a druga u vertikalnom položaju.*



Sl. 4.

Horizontalna ravnina označava se s Π_1 i zovemo je **tlocrtnom** ravninom ili prvom ravninom projekcije, a vertikalna ravnina s Π_2 i zovemo je **nacrtnom** ravninom ili drugom ravninom projekcije. Presječnica tih dviju ravnina je pravac koji označavamo s x (sl. 4.).

Ravninama Π_1 i Π_2 trodimenzionalni je prostor podijeljen u četiri dijela — **kvadranta**. Prednji gornji je prvi kvadrant, stražnji gornji drugi, stražnji donji treći i prednji donji četvrti kvadrant.

Da bi se tlocrtne i nacrtne projekcije elemenata trodimenzionalnog prostora mogle crtati u jednoj ravnini, bilo u Π_1, bilo u Π_2, potrebno je jednu od ovih ravnina prevaliti u drugu. Obično se ravnina Π_2 uzima kao ravnina crtnje, a zatim se izvrši rotacija ravnine Π_1 oko osi x za 90°, tako da se njen prednji dio poklopi s donjim dijelom ravnine Π_2 (sl. 4.).

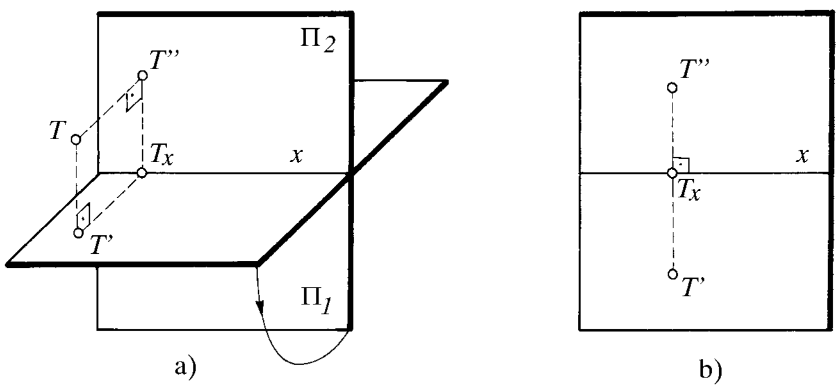
1.

Projekcije točke i pravca

1.1. Projekcije točke

Sve geometrijske figure u prostoru sastoje se od točaka. Stoga, da bismo znali projicirati i prikazati u ravnini sliku neke figure, potrebno je znati projicirati točku.

Neka je sa T' označena ortogonalna projekcija točke T na ravninu Π_1, a sa T'' njena ortogonalna projekcija na ravninu Π_2 (sl. 1.1a).

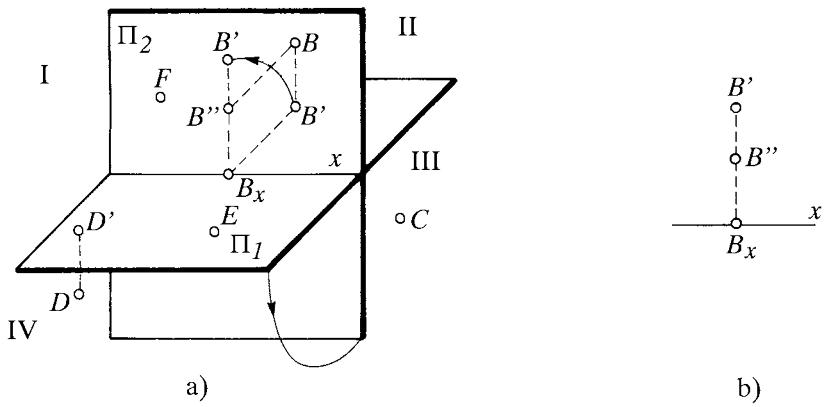


Sl. 1.1.

Nakon prevaljivanja ravnine Π_1 u Π_2 oko osi x dobije se u ravnini crtnje slika 1.1b. Kako se radi o ortogonalnom projiciranju na ravnine Π_1 i Π_2, koje su međusobno okomite, lako se zaključuje da vrijedi: $d(TT') = d(T''T_x)$ i $d(TT'') = d(T'T_x)$. Stoga je četverokut $TT'T_xT''$ pravokutnik, a ravnina u kojoj on leži je okomita na os x. Posljedica toga je da je spojnica $T'T''$ *okomita na os* x. Ova spojnica zove se **ordinala** točke T.

Točka T na sl. 1.1 nalazi se u prvom kvadrantu. Tlocrt takve točke nalazi se ispod, a nacrt iznad osi x, a to svojstvo imaju sve točke iz I kvadranta. Promotrimo tlocrte i nacrte točaka koje se nalaze u II, III i IV kvadrantu, te u ravninama Π_1 i Π_2.

Zadatak 1.1. Na sl. 1.2a i sl. 1.2b prikazane su projekcije točke B koja se nalazi u drugom kvadrantu, prije i poslije prevaljivanja ravnine Π_1 u Π_2. Na isti način prikažite projekcije neke točke C iz trećeg i točke D iz četvrtog kvadranta, te točaka E i F iz ravnina Π_1 i Π_2.



Sl. 1.2.

Zaključujemo:

u prostoru:	*u projekcijama:*
točka u I kvadrantu	tlocrt ispod, nacrt iznad osi x
točka u II kvadrantu	tlocrt iznad, nacrt iznad osi x
točka u III kvadrantu	tlocrt iznad, nacrt ispod osi x
točka u IV kvadrantu	tlocrt ispod, nacrt ispod osi x

Pokušajte objasniti kako se određuje položaj točke u prostoru iz njenih dviju projekcija!

Zadatak 1.2. Promatrajući sliku 1.2 odgovorite na sljedeća pitanja:

a) Gdje je tlocrt, a gdje nacrt točke E koja je u ravnini Π_1?

b) Gdje je tlocrt, a gdje nacrt točke F koja je u ravnini Π_2?

c) Gdje su nacrti svih točaka koje su u ravnini Π_1 ?

d) U kojem se kvadrantu nalazi točka, ako su joj tlocrt i nacrt ispod osi x?

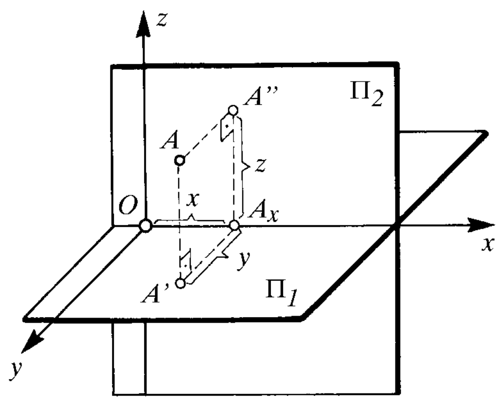
e) Što zaključujete o položaju neke točke G u prostoru čiji je tlocrt na osi x?

f) Kolika je udaljenost točke B od ravnine Π_1 odnosno Π_2 ?

g*) Što možete reći za točku čiji se tlocrt i nacrt poklapaju?

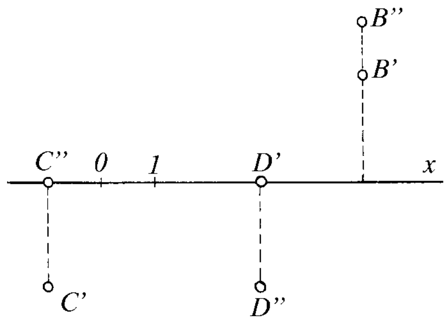
1.2. Koordinate točke. Kvadranti

Odaberemo li na osi x točku O kao ishodište pravokutnog koordinatnog sustava $O(x,y,z)$ u prostoru i pozitivne smjerove koordinatnih osi (lijevi koordinatni sustav), onda je svakoj točki A moguće jednoznačno pridružiti tri broja $x = d(OA_x)$, $y = d(A_xA')$ i $z = d(A_xA'')$. I obrnuto, svakoj trojci brojeva (x,y,z) jednoznačno je u odnosu na zadani koordinatni sustav pridružena točka u prostoru (sl. 1.3). Mjerni brojevi $d(OA_x)$, $d(A_xA')$, $d(A_xA'')$, zovu se redom: **apscisa**, **ordinata** i **aplikata** točke A, ili jednim imenom **koordinate točke** A. Ovi mjerni brojevi dakako, ovise o izabranoj jedinici mjere na koordinatnim osima, a koju biramo po volji. (Pri rješavanju zadataka ponuđenih u ovoj knjizi preporuča se jedinica $i = 1\,\text{cm}$).



Sl. 1.3.

Primjer 1.1. Nacrtajte tlocrtne i nacrtne projekcije točke $B(5,-2,3)$ koja pripada II kvadrantu, te točaka $C(-1,2,0)$ i $D(3,0,-2)$ (sl. 1.4).



Sl. 1.4.

Zadatak 1.3. Uz po volji izabrano ishodište i jediničnu dužinu nacrtajte projekcije točaka $C(1,-2,-3)$ i $D(4,2,-4)$, te odgovorite na sljedeća pitanja:

a) U kojem kvadrantu leži točka C, a u kojem točka D?

b) Kolika je udaljenost ovih točaka od ravnine Π_1, a kolika od Π_2?

c) Za koje je točke u prostoru ordinata $y=0$?

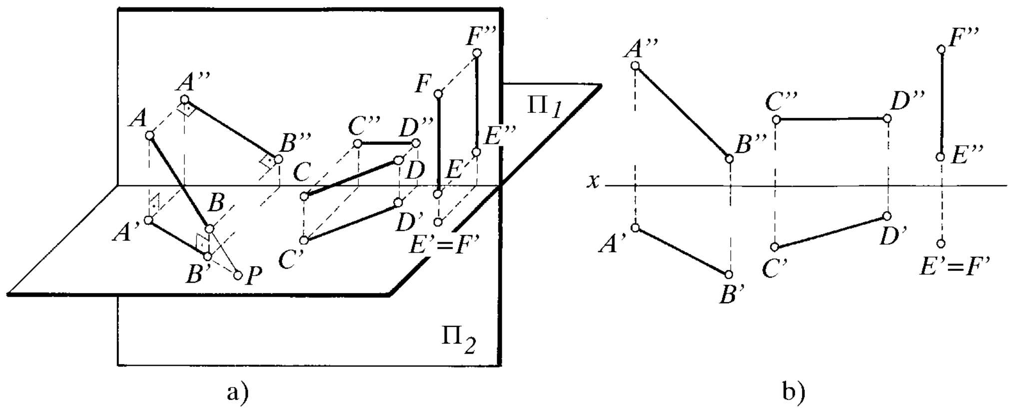
d) Koje točke u prostoru imaju aplikatu $z=0$?

1.3. Projekcije dužine. Prava veličina dužine

Odredimo ortogonalne projekcije neke dužine $\overline{AB}$ na ravnine Π_1 i Π_2. Promatrajući pravokutni trokut $A'PA$ (sl. 1.5), zaključuje se da je ortogonalna projekcija dužine na ravninu slike općenito kraća od prave duljine te dužine, odnosno $d(A',B') < d(A,B)$.

Dužina $\overline{CD}$ paralelna je s Π_1, pa se stoga na tlocrtnu ravninu projicira u pravoj veličini. Činjenica, da je svaka točka te dužine jednako udaljena od ravnine Π_1, očituje se u Π_2; nacrt svake točke dužine $\overline{CD}$ jednako je udaljen od osi x, pa je nacrt dužine $\overline{CD}$ paralelan s osi x.

Postavimo li dužinu $\overline{EF}$ okomito na ravninu Π_1, projicirat će se ona na tlocrtnu ravninu u točku $E'=F'$, dok će nacrt $\overline{E''F''}$ biti jednak pravoj duljini dužine $\overline{EF}$. Na sl. 1.5b prikazane su projekcije dužina $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ i $\overline{EF}$.

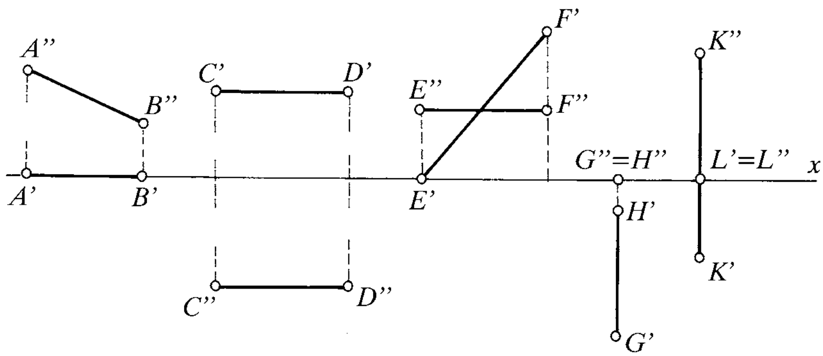


Sl. 1.5.

Zadatak 1.4. Prikažite projekcije sljedećih dužina:

- $\overline{AB}$ paralelna s ravninom Π_2
- $\overline{CD}$ paralelna s ravninama Π_1 i Π_2,
- $\overline{EF}$ u ravnini Π_1,
- $\overline{GH}$ u ravnini Π_2,
- $\overline{IJ}$ okomita na ravninu Π_2,
- $\overline{KL}$ okomita na os x.

Zadatak 1.5. Napišite u kojem su položaju prema ravninama projekcija dužine sa sl. 1.6:

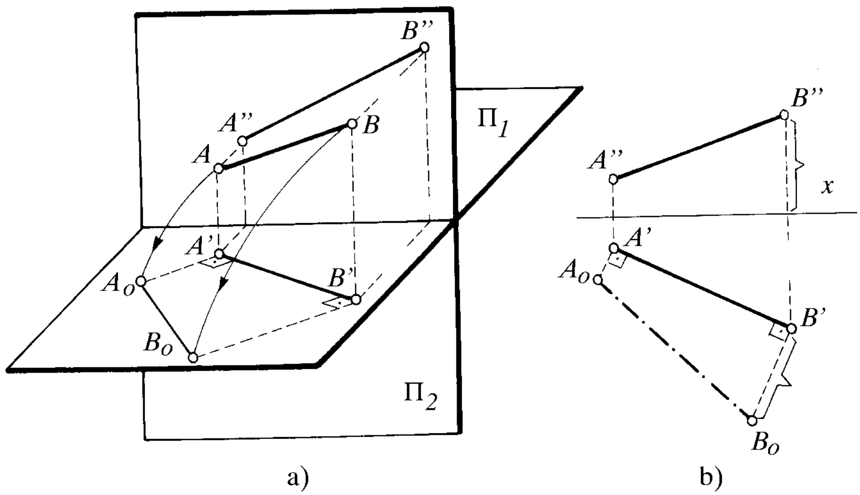


Sl. 1.6.

Zaključujemo:

- Ortogonalna projekcija dužine na ravninu manja je od prave veličine dužine ili joj je jednaka.
- Dužina se na neku ravninu projicira u pravoj veličini (iste je duljine), ako je paralelna s tom ravninom ili leži u njoj.

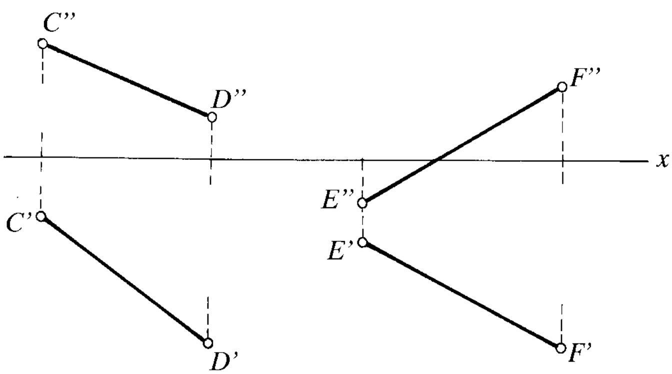
- Dužina se projicira u točku, ako je okomita na ravninu projekcije.
- Prava se veličina dužine, koja je u općem položaju prema ravninama projekcija, određuje prevaljivanjem projicirajućeg trapeza $A'B'BA$ oko dužine $\overline{A'B'}$ u ravninu Π_1 (sl. 1.7a, 1.7b), odnosno trapeza $ABB''A''$ u Π_2. Pri tome su udaljenosti točaka A i B od ravnine Π_1 jednake udaljenostima njihovih nacrta od osi x.



Sl. 1.7.

Isto se rješenje dobiva prevaljivanjem dužine u nacrtnu ravninu Π_2. Uvjerite se u to!

Zadatak 1.6. Odredite prave veličine dužina $\overline{CD}$ i $\overline{EF}$ prevaljivanjem u ravnine Π_1 i Π_2 (sl. 1.8).



Sl. 1.8.