I. DIO

1. Uvod

1.1. Nacrtna geometrija

Pokušaji ljudi da predmete iz svoje okoline, dakle trodimenzionalne tvorevine, prikažu kroz ravne površinske prikaze stari su koliko i ljudska kultura. Često su upravo crteži u kamenu jedini svjedoci kulturne djelatnosti ranih plemena. Većina tih crteža nastala je kao izraz estetsko-umjetničkog nagona iz kojeg se kasnije razvila likovna umjetnost. No, uskoro se s razvojem graditeljstva pojavljuju crteži koji služe kao praktična i tehnička pomoć.

Crtež prostornog objekta nastaje u biti iz dva povoda. Građevina na početku postoji samo u majstorovoj mašti. Da bi drugima prenio predodžbu svoje građevine majstor se koristi crtežom koji će kod promatrača izazvati jednak dojam kao i građevina po njenom završetku. Drugi razlog je potreba da se na jednostavan način omogući očitavanje točnih mjera objekta za potrebe gradnje.

Dokazi o postojanju neke vrste tehničkih crteža sežu još od kralja Salomona (oko 1000 g. pr. kr.). Marcus Vitruvius Pollio graditelj Julija Cesara u svom djelu "O arhitekturi" navodi da su za izvođenje građevine neophodne: ikonografija (tlocrt), ortografija (pročelje) i scenografija (pročelje sa stranicama koje izlaze iz njega, prikaz koji podsjeća na perspektivu, ali bez naputka o izradi). Tlocrt samostana u St. Gallenu iz 9. st. je najpoznatiji sačuvani tlocrt. Tehničke crteže možemo pratiti kroz stoljeća, ali nedostaje tumačenje o metodama kojima nastaju ti crteži. U djelu Albrechta Dürera, iako još daleko od egzaktnih metoda ipak možemo pronaći duboko geometrijsko razumijevanje i moć prostornog predstavljanja.

Ocem nacrtne geometrije smatramo **Gasparda Mongea** (1746. – 1818.) koji je postupke tehničkog crtanja obrtnika, razvijane tijekom stoljeća, prikazao u svom djelu "Deskriptivna geometrija" sa sistematičnošću i metodikom, te jednoznačnim objašnjenjima i time otvorio put novoj grani geometrije. On je definira na sljedeći način:

Nacrtna geometrija

Nacrtna geometrija je znanost o točnim metodama koje omogućuju prikazivanje trodimenzionalnih figura iz prostora na nekoj dvodimenzionalnoj ravnini i rješavanje prostornih problema u ravnini konstruktivno-geometrijskim putem.

Možemo zaključiti da nacrtna geometrija nije uvod u tehničko crtanje, već je ona geometrijska osnova za tehničko crtanje. Tehnički crtež je primjena nacrtne geometrije za potrebe tehničkih struka. On nam mora pružiti točne podatke o dimenzijama, obliku i položaju nekog predmeta u prostoru na način da taj predmet ili zgradu možemo izraditi ili izgraditi. Zato se tehnički crtež sastoji od niza projekcija popraćenih svim potrebnim podacima (stručnim simbolima i sl.). Nacrtna geometrija je jedna od znanosti o projiciranju (uz kartografiju, fotogrametriju i dr.). Cilj nacrtne geometrije je i razvijanje prostornog zora, tj. sposobnosti da u mašti stvorimo trodimenzionalnu predodžbu predmeta čiji dvodimenzionalni prikaz promatramo, odnosno obrnuto, da u mašti sačuvamo izgled nekog predmeta iz prostora i prenesemo ga putem projekcija na dvodimenzionalni crtež.

Projekcija je dvodimenzionalni prikaz nekog predmeta iz prostora, nastao zamišljenim postupkom projiciranja.

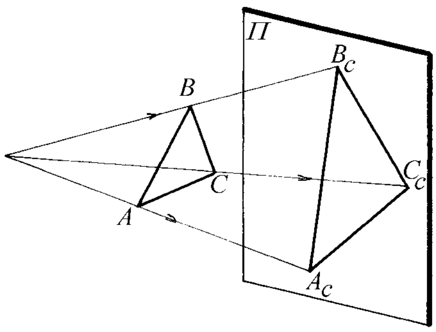
1.2. Projiciranje

Projiciranje je zamišljeni proces koji se sastoji od tri elementa:

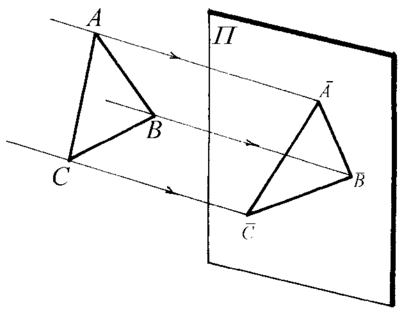
- predmeta koji projiciramo
- ravnine projekcije (Π)
- zraka projiciranja

Zrake projiciranja će na ravnini projekcije dati projekciju predmeta. Ovisno o zrakama projiciranja razlikujemo dvije osnovne vrste projiciranja:

centralno i **paralelno**.



Sl. 1.1. Sve zrake projiciranja prolaze jednom točkom

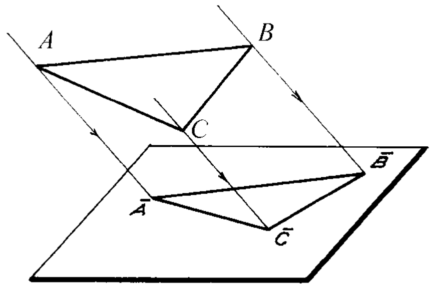


Sl. 1.2. Sve zrake projiciranja su međusobno paralelne

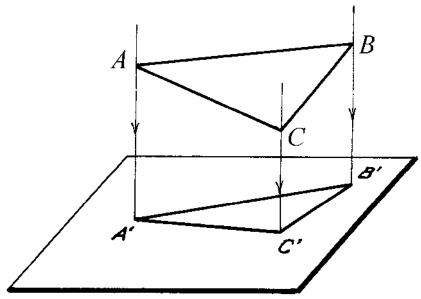
Centralnim projiciranjem predmeta nastaje na ravnini projekcije njegova projekcija, koja se naziva: **centralna projekcija** ili **perspektiva**.

Perspektiva se razlikuje od svih projekcija koje dobivamo paralelnim projiciranjem. Ona je najsličnija onome što vidi ljudsko oko. Za nju vrijedi da paralelni pravci iz prostora na crtežu više ne moraju biti paralelni. Centralnu projekciju obično koristimo kada, kod promatrača, želimo postići utisak promatranja predmeta u prostoru. (Projekcije, odnosno metode nacrtne geometrije kojima postižemo takav utisak često u graditeljskoj struci nazivamo prostornim prikazima.)

Paralelno projiciranje, ovisno o položaju zraka projiciranja prema ravnini projekcije, može biti:
koso i **ortogonalno**.



Sl. 1.3. Kod kosog paralelnog projiciranja zrake projiciranja nagnute su prema ravnini projekcije pod kutem različitim od 90° .



Sl. 1.4. Kod ortogonalnog projiciranja zrake projiciranja su prema ravnini projekcije pod pravim kutem

Kosim paralelnim projiciranjem nastaje projekcija koja se naziva:
kosa aksonometrija.

Ako se predmet projiciranja nalazi u posebnom položaju prema ravnini projekcije, nastaju posebni slučajevi kose aksonometrije: **kosa projekcija** i **vojna** ili **ptičja aksonometrija**.

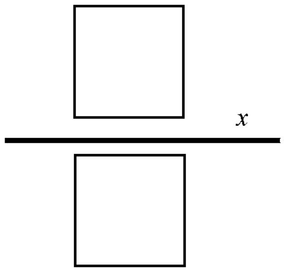
Ortogonalnim projiciranjem mogu nastati različite projekcije. Ovisno o položaju i broju ravnina projekcije, a to su:

- **kotirana projekcija**,
- **Mongeova projekcija** (tlocrt, nacrt, bokocrt, stranocrt) i
- **ortogonalna aksonometrija**.

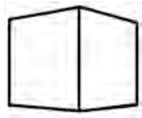
Svaka od navedenih projekcija (perspektiva, kosa aksonometrija, kotirana projekcija, Mongeova projekcija i ortogonalna aksonometrija) predstavlja zasebnu metodu nacrtne geometrije unutar koje se mogu proučavati stereometrijski odnosi, tj. odnosi geometrije prostora, te razvijati prostorni zor. Od navedenih metoda izabrat ćemo one koje imaju najčešću primjenu u graditeljskoj struci.

U struci za točno očitavanje podataka o obliku, dimenzijama i položaju nekog predmeta koristimo kotiranu projekciju i Mongeovu projekciju, dok perspektivu i aksonometrije upotrebljavamo za stvaranje zorne predodžbe o predmetu ili zgradi.

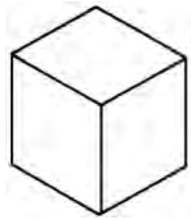
Za ilustraciju, na crtežima su prikazane neke od mogućih projekcija kocke uz odgovarajući naziv projekcije:



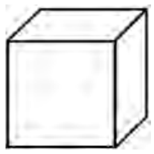
Sl. 1.5. Mongeova projekcija (tlocrt i nacrt)



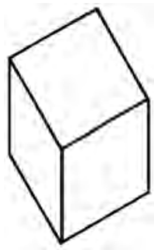
Sl. 1.6. Perspektiva



Sl. 1.7. Kosa aksonometrija



Sl. 1.8. Kosa projekcija (kosa aksonometrija)



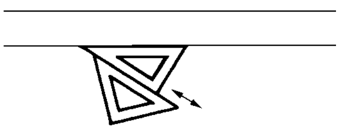
Sl. 1.9. Vojna aksonometrija ili ptičja aksonometrija (kosa aksonometrija)

Koje ćemo od navedenih projekcija proučavati unutar nacrtne geometrije kao stručnog predmeta u graditeljskim školama? U prvom dijelu nacrtne geometrije osim kratkog upoznavanja s kotiranom projekcijom, bavit ćemo se Mongeovom projekcijom, te unutar nje rješavati jednostavne stereometrijske zadatke. U drugom dijelu ćemo u Mongeovoj projekciji rješavati nešto složenije zadaće te ćemo se naučiti prikazivati objekte u kosoj aksonometriji i centralnoj projekciji.

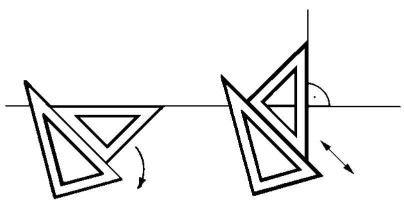
1.3. Kratki pregled nekih geometrijskih konstrukcija

Što sve morate ponoviti i znati?

1. Crtanje paralela (sl. 1.10.) i okomica (sl. 1.11.) pomoću dva trokuta.

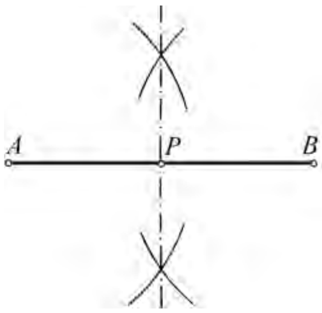


Sl. 1.10.

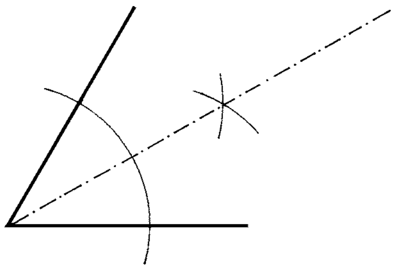


Sl. 1.11.

2. Konstrukcija simetrale dužine i njenog polovišta (sl. 1.12.).
3. Konstrukcija simetrale kuta (sl. 1.13.).

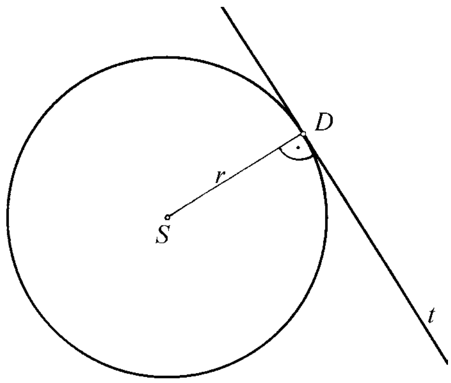


Sl. 1.12.


Sl. 1.13.

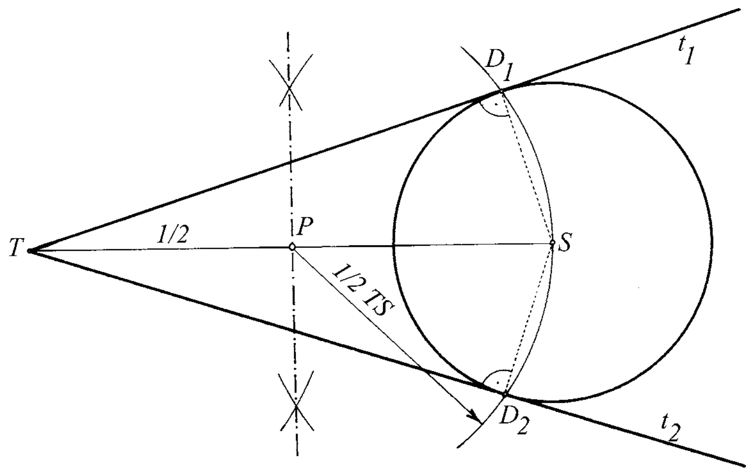
4. Tangenta kružnice u točki kružnice (sl. 1.14.).

Tangenta je pravac koji s kružnicom ima jednu točku zajedničku. Tu točku nazivamo dirալište. Tangenta je uvijek okomita na polumjer kružnice u diralištu.



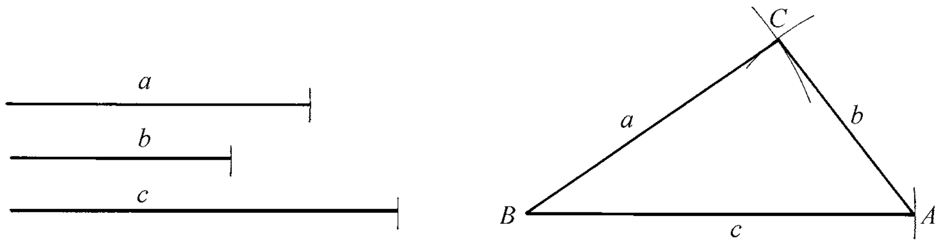
Sl. 1.14.

5. Tangenta kružnice iz točke izvan kružnice (sl. 1.15.).



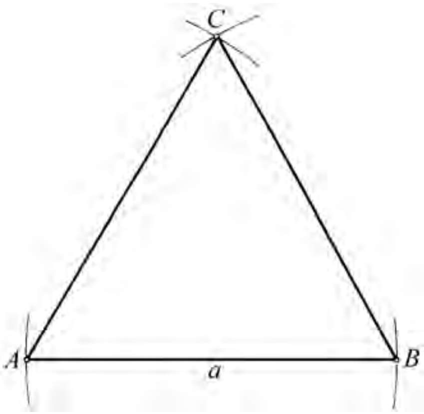
Sl. 1.15.

6. Konstrukcija trokuta iz zadanih stranica (sl. 1.16.).

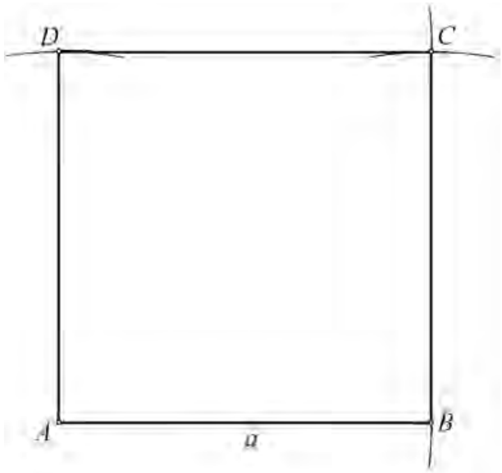


Sl. 1.16.

7. Konstrukcije nekih pravilnih mnogokuta
- Jednakostranični trokut (sl. 1.17.)
- Kvadrat iz zadane stranice (sl. 1.18.)

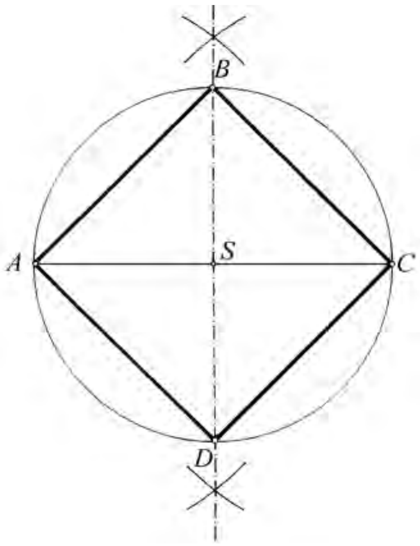


Sl. 1.17.

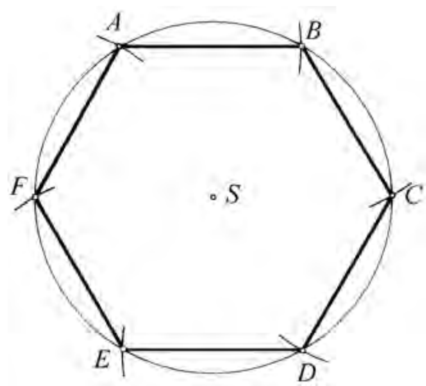


Sl. 1.18.

- Kvadrat iz zadane dijagonale (sl. 1.19.)
- Pravilni šesterokut iz zadanog središta i jednog vrha (sl. 1.20.)

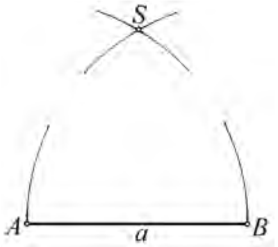


Sl. 1.19.

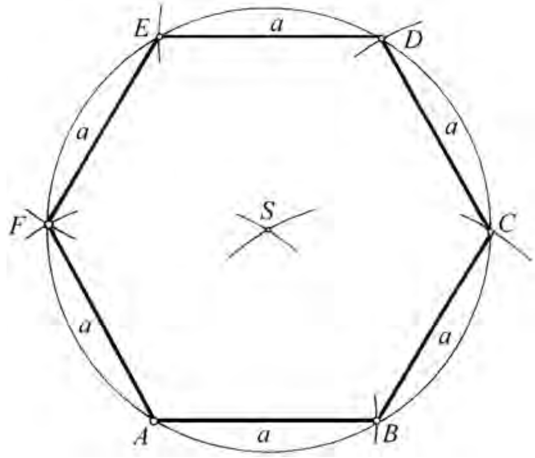


Sl. 1.20.

- Pravilni šesterokut iz zadane stranice (sl. 1.21. i 1.22.).

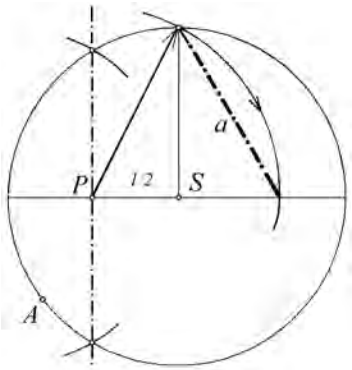


Sl. 1.21.

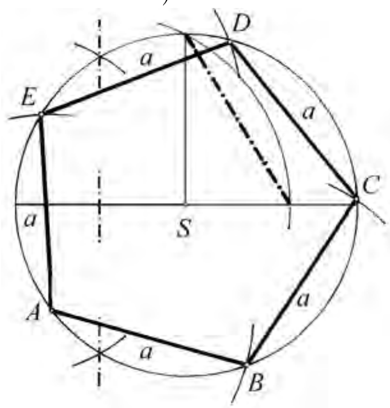


Sl. 1.22.

- Pravilni peterokut iz zadanog središta i jednog vrha (sl. 1.23. i 1.24).

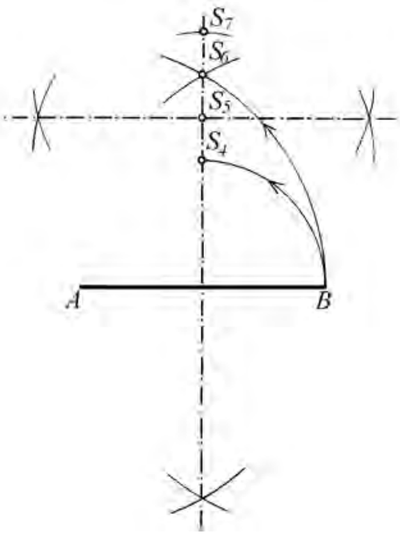


Sl. 1.23.

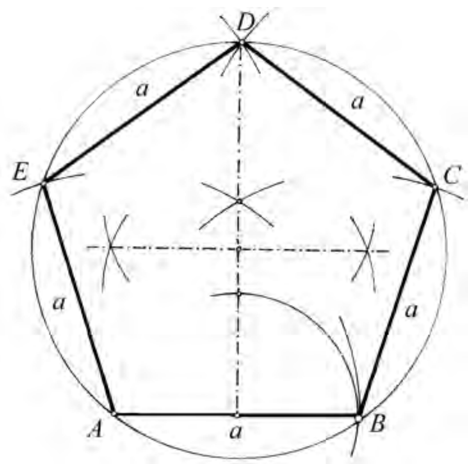


Sl. 1.24.

- Pravilni n-terokut iz zadane stranice (sl. 1.25.). Primjer konstrukcije peterokuta (sl. 1.26.).



Sl. 1.25.

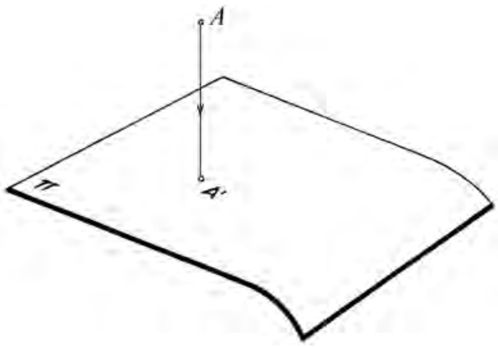


Sl. 1.26.

2.
Kotirana projekcija

Nabrajajući vrste projiciranja i vrste projekcija rekli smo da je kotirana projekcija ortogonalna projekcija.

Ako zamislimo horizontalnu ravninu projekcije Π i neku točku A u prostoru iznad nje, tada ortogonalnim projiciranjem nastaje ortogonalna projekcija točke A na horizontalnu ravninu. Ortogonalnu projekciju na horizontalnu ravninu nazivamo tlocrt. Dakle, dobili smo tlocrt točke A koji se označava A', a čita se A crtano.

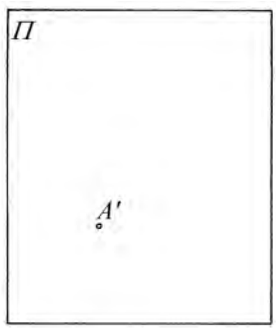


Sl. 2.1.

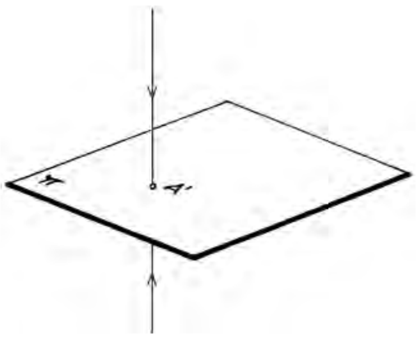
Ravnina projekcije Π je ravnina našeg crteža, ravnina papira.

Svaka od, u uvodnom dijelu, navedenih vrsta projekcija mora nam pružiti točne podatke o veličini, obliku i položaju nekog predmeta ili geometrijske tvorevine. Točka nema veličinu i oblik, ali zato ima položaj.

Možemo li iz tlocrta točke A zaključiti nešto o njenom položaju (sl. 2.2.)?



Sl. 2.2.



Sl. 2.3.

Sl. 2.4.

Promatrajući tlocrt točke A možemo zaključiti da se ona nalazi negdje okomito iznad ili ispod svog tlocrta (sl. 2.3.). *Zašto?* No, ne znamo na kojoj je visini. Ako uz tlocrt upišemo visinu točke u obliku kote, tada ćemo točno znati gdje se u prostoru nalazi točka A. Ako se ona nalazi 4 jedinice iznad ravnine Π upisat ćemo $(+4)$ uz tlocrt (sl. 2.4.). Ako se nalazi 2 jedinice ispod ravnine Π upisat ćemo uz tlocrt točke (-2). Tlocrt točke uz koji piše podatak o njenoj visini nazivamo kotiranom projekcijom točke.

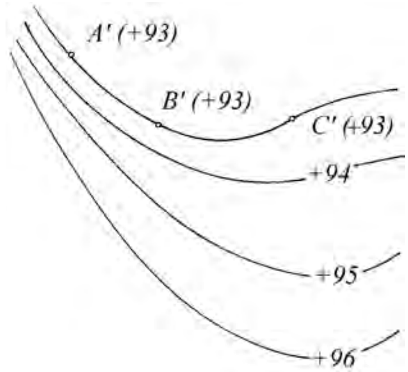
Sada možemo u potpunosti definirati kotiranu projekciju:

Kotirana projekcija

Kotirana projekcija je ortogonalna projekcija na horizontalnu ravninu kod koje je uz tlocrt svake točke upisana njena visinska kota.

Ako spojimo točke istih visina, dobit ćemo crtu koju nazivamo **slojnica** (**izohipsa** ili **izobata**). Slojnica je spojnica svih točaka koje imaju istu visinsku kotu pa je dovoljno na jednom mjestu na slojnici označiti njenu kotu (sl. 2.5.).

Kao jedinica mjere u kotiranoj projekciji uzima se jedan metar. Zato se kotirana projekcija uvijek crta u unaprijed zadanom mjerilu.



Sl. 2.5.

Mi ćemo odabrati, za sve crteže u ovom upoznavanju s kotiranom projekcijom, mjerilo M=1:100. (Jedan cm na crtežu = jedan metar u stvarnoj veličini.)

Već na prvi pogled nam je jasno da kotirana projekcija nije nimalo spretna za prikazivanje trodimenzionalnih predmeta, ali je zato idealna za prikazivanje terena te se u tu svrhu najviše primjenjuje.

Zadane su kotirane projekcije točaka A, B, C i D.

Sl. 2.6.

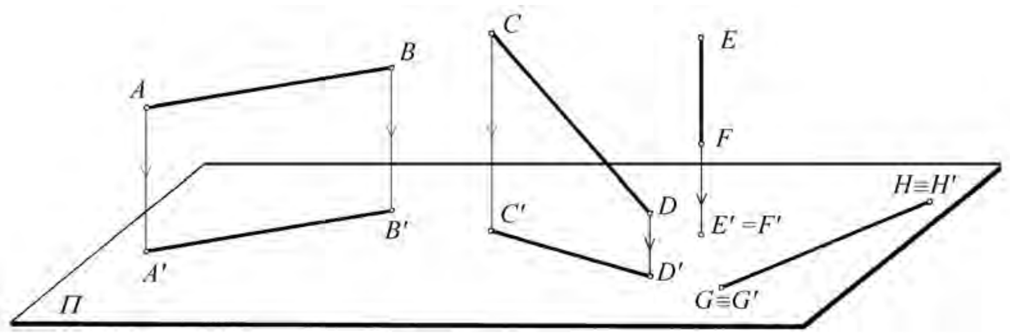
Što možete zaključiti o njihovom položaju prema ravnini projekcije Π*? Koja se od zadanih točaka nalazi u ravnini projekcije?*

2.1. Kotirana projekcija dužine

Dužina je određena s dvije krajnje točke.

Ortogonalna projekcija svake dužine manja je od same dužine ili jednaka dužini. To će ovisiti o nagibu dužine prema ravnini projekcije.

Ako je dužina paralelna s ravninom projekcije njena projekcija kod svih paralelnih projekcija bit će jednaka po veličini samoj dužini.



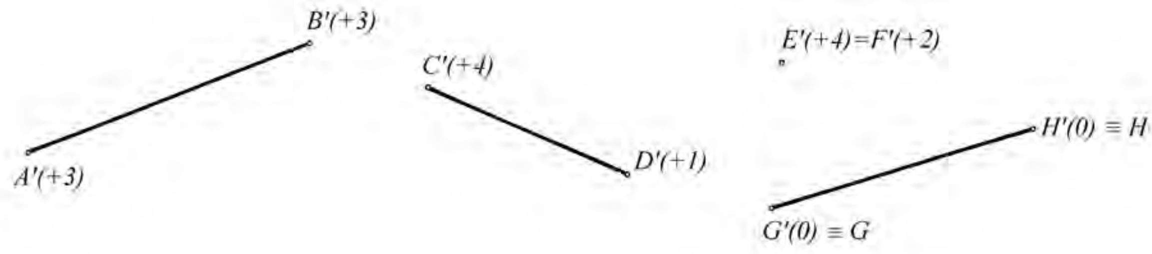
Sl. 2.7.

Pokušajte se u to uvjeriti pomoću modela. Postavite olovku kao model dužine paralelno s crtaćim papirom (Π*).*

U tom slučaju, sve točke dužine, nalaze se na istoj visini pa tako i krajnje točke.

Ako olovku pomičete na način da joj povećavate nagib prema ravnini projekcije, projekcija se smanjuje, sve dok dužina ne dođe u položaj okomitosti prema ravnini projekcije i njena projekcija postane točka.

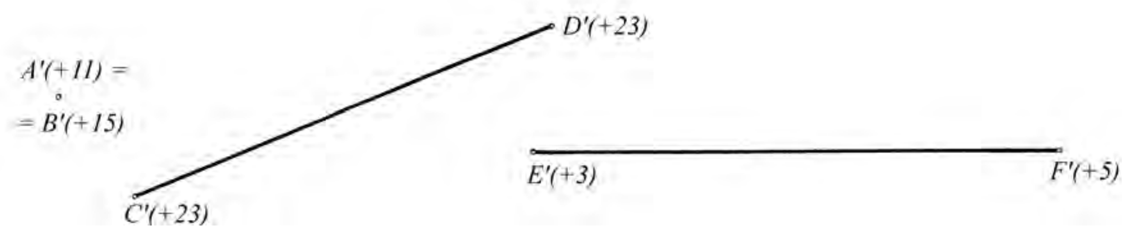
Primjer 1. Nacrtani su primjeri kotirane projekcije dužine $\overline{AB}$ paralelne s ravninom (zadane točke imaju istu kotu), dužine $\overline{CD}$ koja je u općenitom položaju prema ravnini Π (zadane točke imaju različitu kotu), dužine $\overline{EF}$ okomite na ravninu Π (zadane točke imaju različitu kotu) i dužine $\overline{GH}$ koja se nalazi u ravnini projekcije pa je njen tlocrt identičan samoj dužini (identičan $\equiv$).



Sl. 2.8.

2.2. Prava veličina dužine

Primjer 1. Zadane su projekcije:
- dužine $\overline{AB}$ okomite na ravninu Π. Visina točke A je $+11$, točke B $+15$;
- dužine $\overline{CD}$, zadane duljinom tlocrta $|C'D'|$ je 6, te visinom obje točke $+23$;
- dužine $\overline{EF}$, zadane svojim tlocrtom $|E'F'| = 7$ i visinskim kotama $E(+3)$ $F(+5)$.



Sl. 2.9.

Pokušajmo iz kotirane projekcije ustanoviti kolike su prave veličine zadanih dužina u prostoru.

▷ Dužina $\overline{AB}$: iz kotirane projekcije dužine $\overline{AB}$ vidimo da je tlocrt točke A i B na istom mjestu pa možemo zaključiti da je dužina okomita na ravninu projekcije. Točka $A(+11)$ je niža od točke $B(+15)$ upravo za duljinu dužine $\overline{AB}$. Prava veličina dužine $\overline{AB}$ je 4.

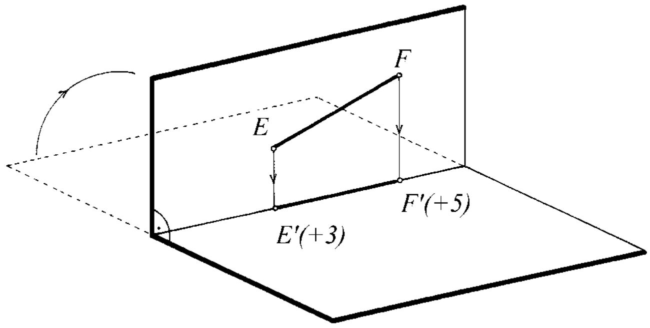
Dužina $\overline{CD}$: iz kotirane projekcije dužine vidimo da su obadvije točke na istoj visini, što znači da je dužina $\overline{CD}$ paralelna s ravninom projekcije pa njezin tlocrt odgovara pravoj veličini dužine, a to je 6.

Dužina $\overline{EF}$: iz kotirane projekcije vidimo da su točke na različitim visinama, znači dužina nije paralelna s ravninom projekcije. Isto tako, tlocrt dužine nije točka, znači dužina nije niti okomita na ravninu projekcije pa možemo zaključiti da se nalazi u općem položaju prema ravnini Π i njena prava veličina je sigurno veća od projekcije.

Pravu veličinu dužine $\overline{EF}$ morat ćemo konstruirati uz pomoć njene projekcije i činjenice da je ta projekcija nastala ortogonalnim projiciranjem.

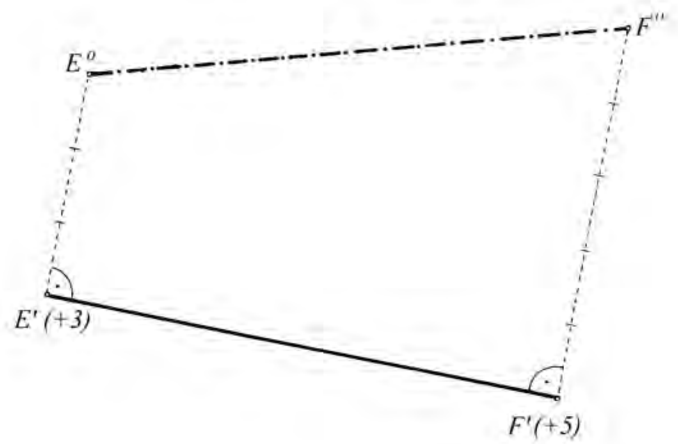
Da biste bolje razumjeli postupak određivanja prave veličine dužine nacrtajte ponovo na posebnom listu papira zadanu kotiranu projekciju dužine $\overline{EF}$. *Papir presavinite upravo na mjestu same projekcije. Jedan dio papira ostavite u horizontalnom položaju na stolu, a drugi dio podignite okomito.*

Tu, na uzdignutom dijelu, nalazi se dužina $\overline{EF}$ *u prostoru. Pokušajte je nacrtati.* Točka E se nalazi okomito iznad svog tlocrta 3 jedinice (*nacrtajte tanko zrake projiciranja*), a točka F okomito iznad svog tlocrta 5 jedinica. Spojivši točke E i F dobili ste stvarni položaj i veličinu dužine $\overline{EF}$ u prostoru. *Provjerite da li su nacrtane zrake projiciranja na uzdignutom dijelu papira okomite na projekciju dužine.*



Sl. 2.10.

No, pravu veličinu zadane dužine dobili smo na modelu u prostoru, a nas zanima konstrukcija u ravnini crteža. Dovoljno je spustiti uzdignuti dio papira u horizontalni položaj i time smo dobili konstrukciju prave veličine u ravnini crteža (ravnini projekcije). Dobivenu dužinu $\overline{EF}$ iz prostora smo spustili na papir prevalivši je oko njenog tlocrta za 90° pa to nazivamo prevaljenim položajem dužine $\overline{EF}$. Prevaljeni položaj dužine nećemo crtati punom crtom, već crta–točka, a prevaljene točke označavat ćemo E^0F^0 (čitamo: E nula, F nula). ◁



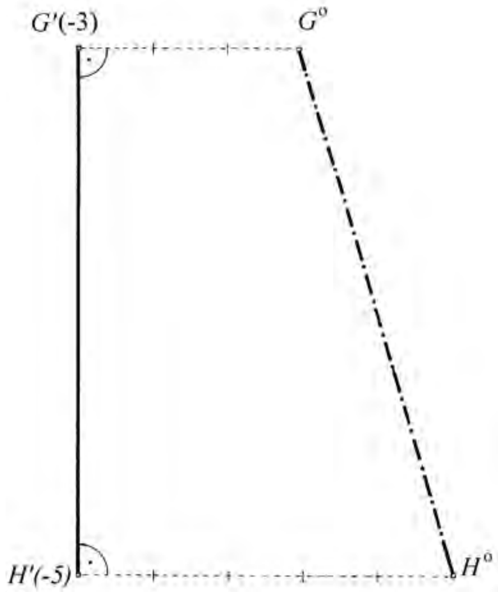
Sl. 2.11.

Možemo zaključiti da prilikom prevaljivanja dužine u ravninu projekcije njene točke odu u smjeru okomitom na tlocrt dužine (jer su zrake projiciranja okomite na ravninu u kojoj se nalazi tlocrt) za svoju udaljenost od ravnine projekcije.

Njihova udaljenost od ravnine projekcije je u kotiranoj projekciji upisana uz tlocrt u obliku kote.

Primjer 2. U ovom primjeru konstruirana je prava veličina dužine $\overline{GH}$.

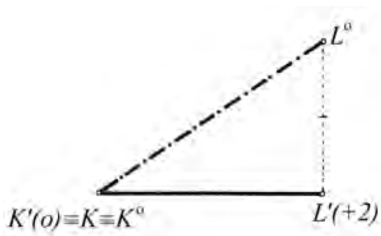
▷ Tlocrt dužine $|G'H'| = 7$, a zadane visine točaka $G(-3)$ $H(-5)$. Vidimo da je tlocrt zadane dužine jednak tlocrtu dužine $\overline{EF}$ u prethodnom primjeru. Točke imaju istu udaljenost od ravnine Π, ali se nalaze ispod ravnine projekcije. Konstrukcija prave veličine je ista kao i u prethodnom primjeru, a tako i sama prava veličina. ◁



Sl. 2.12.

Primjer 3. Zadana je dužina $\overline{KL}$ svojom kotiranom projekcijom. $|K'L'| = 3$, $K(0)$, $L(+2)$.

▷ Točka K nije niti iznad ni ispod ravnine projekcije, dakle nalazi se u ravnini projekcije. Dužina $\overline{KL}$ nalazi se iznad ravnine Π, ali je oslonjena na ravninu projekcije točkom K. Da bismo saznali pravu veličinu dužine moramo dužinu $\overline{KL}$ prevaliti oko tlocrta u ravninu crteža (Π). Prilikom prevaljivanja točka L odlazi okomito na tlocrt dužine za svoju visinsku kotu (2), ali točka K ostaje na svom mjestu jer se ona već nalazi u ravnini projekcije. Njen prevaljeni položaj jednak je njenom tlocrtu, odnosno samoj točki K. Dobivena dužina $\overline{K^0L^0}$ je prava veličina zadane dužine $\overline{KL}$. ◁

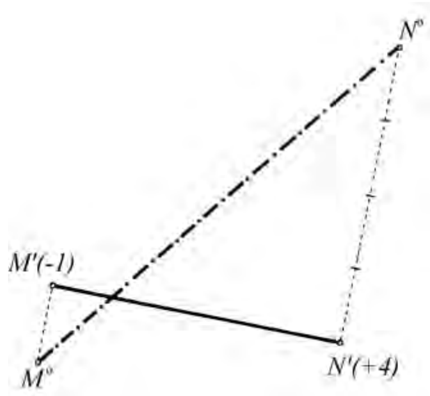


Sl. 2.13.

Primjer 4. Zadana je dužina $\overline{MN}$ svojom kotiranom projekcijom. $|M'N'| = 4$, $M(-1)$, $N(+4)$.

▹ Ova dužina probada ravninu projekcije jer se jedna točka nalazi ispod, a druga iznad ravnine projekcije. Ako želimo prevaljivanjem konstruirati pravu veličinu dužine, prilikom prevaljivanja će točke otići okomito na tlocrt za svoje udaljenosti od ravnine Π, ali na suprotne strane, jer se jedna nalazi ispod ravnine projekcije, a druga iznad. Na dužini $\overline{MN}$ postoji točka koja prilikom prevaljivanja nije promijenila svoj položaj. Njezin tlocrt je jednak njenom prevaljenom položaju, odnosno samoj točki.

Koja je to točka i gdje se nalazi? Koja je njena visinska kota? ◃



Sl. 2.14.

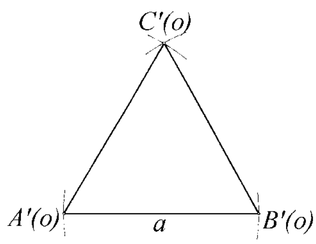
Do sada smo saznali:

> Ako je dužina okomita na ravninu projekcije, njena ortogonalna projekcija je točka.
>
> Ako je dužina u općem položaju prema ravnini projekcije, njenu pravu veličinu konstruirat ćemo u prevaljenom položaju oko ortogonalne projekcije.
>
> Ako je dužina paralelna s ravninom projekcije ili se nalazi u njoj, njena ortogonalna projekcija jednaka je samoj dužini.

Isto tako, ako je neki ravninski lik paralelan s ravninom projekcije, kod svih paralelnih projekcija, pa tako i kod kotirane projekcije, njegova projekcija jednaka je samom liku, a svi vrhovi lika jednako su udaljeni od ravnine projekcije (imat će istu kotu).

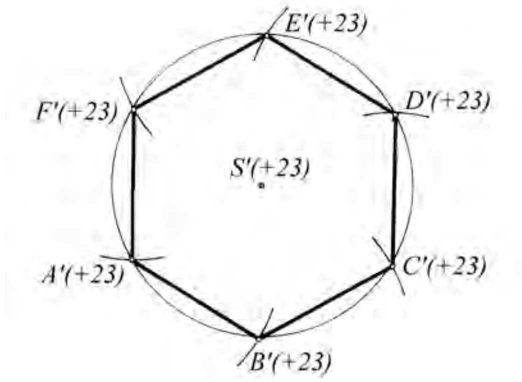
Na sljedećim crtežima prikazane su kotirane projekcije nekih pravilnih mnogokuta paralelnih s ravninom projekcije:

Primjer 5. Kotirana projekcija jednakostraničnog trokuta koji se nalazi u ravnini projekcije zadane stranice $a = 3$.



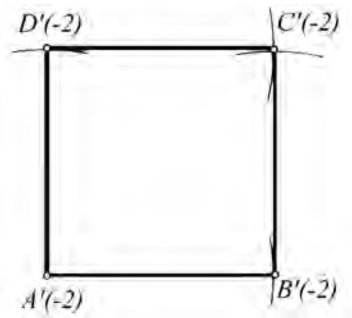
Sl. 2.15.

Primjer 6. Kotirana projekcija pravilnog šesterokuta koji je 23 jedinice iznad ravnine projekcije zadane stranice $a = 2$.



Sl. 2.16.

Primjer 7. Kotirana projekcija kvadrata koji se nalazi 2 jedinice ispod ravnine projekcije zadane stranice $a = 3$.



Sl. 2.17.

Zadaci za vježbu

2.1. Nacrtaj kotiranu projekciju dužine $\overline{AB}$ okomite na ravninu Π, ako je $A(-2)\ B(-7)$. Kolika je prava veličina zadane dužine?

2.2. Nacrtaj kotiranu projekciju dužine $\overline{CD}$ okomite na ravninu Π, ako je $C(-1)\ D(+5)$. Kolika je prava veličina dužine $\overline{CD}$?

2.3. Nacrtaj kotiranu projekciju neke dužine $\overline{EF}$ paralelne s ravninom Π, ako se nalazi 5 jedinica ispod ravnine projekcije.

2.4. Nacrtaj kotiranu projekciju i odredi pravu veličinu dužine $\overline{GH}$.

a) $|G'H'| = 4,\ G(+1)\ H(+3)$; **b)** $|G'H'| = 5,\ G(+4)\ H(+2)$;

c) $|G'H'| = 6,\ G(-2)\ H(0)$; **d)** $|G'H'| = 5,\ G(+5)\ H(-2)$;

e) $|G'H'| = 3,\ G(-1)\ H(+1)$.

2.5. Nacrtaj kotiranu projekciju pravilnog peterokuta paralelnog s ravninom projekcije. Visina središta opisane kružnice je 9, a polumjer $r = 3$.

2.6. Nacrtaj kotiranu projekciju pravilnog peterokuta koji se nalazi 5 jed. iznad Π. Stranica $a = 3$.

2.7. Nacrtaj kotiranu projekciju kvadrata paralelnog s ravninom Π. Zadana je dijagonala $d = 4$. Kvadrat se nalazi 12 jedinica ispod ravnine projekcije.