1.

Skup kompleksnih brojeva

1.1. Skupovi brojeva

Tijekom školovanja upoznali smo različite skupove brojeva. Bili su to skup prirodnih brojeva $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, skup cijelih brojeva $\mathbf{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$, skup racionalnih brojeva $\mathbf{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N}\}$, skup realnih brojeva $\mathbf{R}$ koji dobivamo ako skupu racionalnih dodamo iracionalne brojeve. Znamo također da vrijedi $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

Naučili smo i četiri osnovne algebarske operacije: zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje. Istaknimo sljedeća tri svojstva koja vrijede za operacije zbrajanja i množenja u bilo kojem gore navedenom skupu brojeva.

1) **Komutativnost** zbrajanja i množenja

$$x + y = y + x, \qquad x \cdot y = y \cdot x. \tag{1}$$

2) **Asocijativnost** zbrajanja i množenja

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \qquad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z. \tag{2}$$

3) **Distributivnost** množenja prema zbrajanju

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z. \tag{3}$$

Zadatak 1. Neka je $x = \frac{2}{5}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{2}$. Uvjeri se direktnim računom da u skupu racionalnih brojeva vrijedi zakon asocijativnosti $(x + y) + z = x + (y + z)$ i zakon distributivnosti $x(y + z) = xy + xz$.

Proširenja skupova brojeva

Najjednostavniji i temeljni brojevi su **prirodni brojevi**. Zbroj dvaju prirodnih brojeva prirodan je broj. Isto tako, umnožak dvaju prirodnih brojeva prirodan je broj. Kažemo da je skup $\mathbf{N}$ **zatvoren** za operacije zbrajanja i množenja.

Prirodne brojeve oduzimamo i dijelimo. No, razlika $m-n$ i količnik $\frac{m}{n}$ prirodnih brojeva m i n nisu uvijek prirodni brojevi. Drugim riječima, jednadžbe

$$x+n=m \qquad \text{i} \qquad nx=m \tag{4}$$

za prirodne brojeve m i n, općenito nemaju rješenja u skupu $\mathbf{N}$. (Zašto? Objasni!) Dakle, skup $\mathbf{N}$ nije zatvoren s obzirom na operacije oduzimanja i dijeljenja.

Kako bi jednadžba $x+n=m$ imala rješenja za svaka dva prirodna broja m i n, valja skup $\mathbf{N}$ proširiti: dopuniti nulom i negativnim cijelim brojevima. Tako dobivamo skup cijelih brojeva

$$\mathbf{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3\ldots\}.$$

Međutim, niti u skupu $\mathbf{Z}$ nije uvijek moguće podijeliti dva broja. Jednadžba

$$nx=m, \tag{5}$$

gdje su n i m cijeli brojevi i $n\neq 0$, *nije uvijek rješiva* u skupu $\mathbf{Z}$.

Ova će jednadžba imati rješenja u novom skupu brojeva koji su *količnici cijelih brojeva*. Proširivanjem skupa cjelih brojeva $\mathbf{Z}$ dobit ćemo skup **racionalnih** brojeva

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{m}{n}: m\in\mathbf{Z},\ n\in\mathbf{N}\right\}.$$

U skupu racionalnih brojeva možemo zbrajati, oduzimati, množiti i dijeliti dva broja (osim dijeljenja s nulom) i rezultat će biti uvijek racionalan broj. Pritom operacije zbrajanja i množenja zadovoljavaju svojstva (1)–(3).

* * *

No, već vrlo jednostavna jednadžba $x^2=2$ pokazuje kako za njezino rješavanje nisu dostatni niti racionalni brojevi. Naime, nema u skupu $\mathbf{Q}$ broja čiji bi kvadrat bio jednak 2.

Primjer 2. Pokažimo da rješenje jednadžbe $x^2=2$ nije racionalan broj.

$\triangleright$ Pretpostavimo suprotno, x je racionalan. Tad x možemo zapisati u obliku razlomka $x=\frac{m}{n}$, pri čemu su m i n relativno prosti prirodni brojevi. Odatle je $\frac{m^2}{n^2}=2$, tj. $2n^2=m^2$. Zaključujemo da je m^2 paran broj, pa i m mora biti paran. Dakle, vrijedi $m=2m_1$ za neki prirodni broj m_1. Sada slijedi

$$2n^2=4m_1^2 \implies n^2=2m_1^2.$$

Odavde zaključujemo da je i n paran broj. Međutim, to je proturječje s pretpostavkom da su m i n relativno prosti. Dakle, broj x nije racionalan broj, odnosno, jednadžba $x^2=2$ u skupu Q nema rješenja. $\triangleleft$

Rješenje jednadžbe $x^2=2$ zapisujemo u obliku $x=\sqrt{2}$. $\sqrt{2}$ je **iracionalan** broj decimalni prikaz kojeg je beskonačan, a približna mu je vrijednost $\sqrt{2}=1.414213\cdots$. Na sličan način se dokazuje kako niti $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$,... nisu racionalni brojevi. Nisu racionalni primjerice niti brojevi oblika $a+b\sqrt{2}$, gdje su a i b racionalni, itd.

Primjer 3. Pokažimo da je broj $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ iracionalan.

$\triangleright$ Stavimo $x=\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Odavde je $x-\sqrt{3}=\sqrt{5}$ pa kvadrirajući dobivamo $x^2-2x\sqrt{3}+3=5$, odnosno $\sqrt{3}=\dfrac{x^2-2}{2x}$. Kad bi x bio racionalan, bio bi racionalan i $\sqrt{3}$, što nije istina. Zato je x iracionalan. $\triangleleft$

Zadatak 4. Dokaži da broj $1-\sqrt{3}$ nije racionalan.

Zadatak 5. Dokaži da broj $\sqrt{15}$ nije racionalan.

* * *

Dodavajući skupu racionalnih brojeva sve iracionalne brojeve, dobit ćemo skup realnih brojeva $\mathbf{R}$. Pri tome u skupu $\mathbf{R}$ vrijede sva svojstva računskih operacija koja su vrijedila i u skupu $\mathbf{Q}$.

Zadatak 6. Može li zbroj racionalnog i iracionalnog broja biti racionalan broj? Može li zbroj dvaju iracionalnih brojeva biti racionalan broj?

Zadaci 1.1

1. Popuni sljedeću tablicu:

Broj	Prirodni	Cijeli	Racionalni	Iracionalni	Realni
-11	Ne	Da	Da	Ne	Da
$\dfrac{\pi}{2}$					
$\dfrac{11}{12}$					
$\sqrt{2.5}$					
3.14159					
$\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$					
$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^0$					
$-8^{-\frac{4}{3}}$					
1001					
$1-\pi$					

2. Odredi 100. decimalu u decimalnom zapisu racionalnih brojeva $\dfrac{1}{12}$, $\dfrac{4}{11}$ i $\dfrac{3}{13}$.

3. Označimo sa $\lfloor x \rfloor$ najveći cijeli broj koji nije veći od realnog broja x. Koliko je:

1) $\left\lfloor \dfrac{3\pi}{2} \right\rfloor$; **2)** $\left\lfloor \sqrt[3]{111} \right\rfloor$; **3)** $\lfloor \sqrt{2} - \sqrt{5} \rfloor$?

4. Provjeri jesu li navedeni brojevi racionalni:

1) $(2\sqrt{3} - \sqrt{7})(2\sqrt{3} + \sqrt{7})$; **2)** $(\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{7 + 2\sqrt{6}})^2$;

3) $\dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$.

5. Broj π je iracionalan broj. Njegova je približna vrijednost $3.14159 \cdots$. Vrijedi jednakost

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

Zbroji nekoliko pribrojnika na desnoj strani (računalom) i izračunaj na taj način približnu vrijednost broja π. Usporedi dobivenu vrijednost s vrijednosti tog broja zapamćenoj u računalu.

6. Koje su od navedenih jednakosti točne za sve vrijednosti realnih brojeva a i b:

1) $|-a| = a$; **2)** $|a^2| = a^2$; **3)** $|a - b| = |b - a|$;
4) $|a + b| = |a| + |b|$; **5)** $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

7. Naznači na brojevnom pravcu skup svih točaka $T(x)$, ako je:

1) $|x| \leqslant 3$; **2)** $|x + 1| \geqslant 2$; **3)** $2 \leqslant |1 - x| < 5$.

8. Za koje brojeve n je broj $\sqrt{n}$ racionalan?

9. Dokaži da je broj $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ iracionalan.

10. Dokaži da broj $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ nije racionalan.

1.2. Algebarske operacije u skupu kompleksnih brojeva

Skup kompleksnih brojeva

Kvadrat realnoga broja ne može biti negativan broj. Zato nema realnoga broja x takva da je $x^2 = -1$. To znači da jednadžba $x^2 + 1 = 0$ nema rješenja u skupu realnih brojeva. Skup realnih brojeva ćemo proširiti i uvesti nove, **kompleksne brojeve** u kojima će biti rješive ovakve jednadžbe. Neka je i zamišljeno rješenje jednadžbe $x^2 + 1 = 0$, broj sa svojstvom $i^2 + 1 = 0$. Taj novi broj i nazivamo **imaginarnom jedinicom**.

Imaginarna jedinica

Imaginarna jedinica i takav je broj za koji vrijedi $i^2 = -1$.

* * *

Skup kompleksnih brojeva bit će proširenje skupa realnih brojeva. To znači da skup kompleksnih brojeva sadrži sve realne brojeve kao svoj podskup. Zato su realni brojevi poput: 2, $\sqrt{3}$, -2, $-\frac{3}{2}$ i općenito, bilo koji realni broj x, sadržani u skupu kompleksnih brojeva.

Želimo da u skupu kompleksnih brojeva budu definirane algebarske operacije zbrajanja i množnja. Zato je umnožak bilo kojeg realnog broja y i imaginarne jedinice i kompleksan broj. Takve brojeve nazivamo posebnim imenom: imaginarni brojevi.

Imaginarni brojevi

Umnožak yi realnog broja y i imaginarne jedinice i zovemo **imaginarnim brojem**.

Dakle, svaki imaginarni broj ujedno je kompleksan broj. Zbroj realnog i imaginarnog broja kompleksan je broj. Tako na primjer broj $2+3i$ kompleksan je broj.

Skup kompleksnih brojeva

Kompleksan broj z je broj oblika

$$z = x + yi, \tag{1}$$

gdje su x i y realni brojevi. x nazivamo **realni dio**, a y **imaginarni dio** kompleksnog broja z. Pišemo $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Prikaz (1) naziva se **algebarski** (ili **standardni**) **prikaz** kompleksnog broja z.

Skup kompleksnih brojeva označavamo s $\mathbf{C}$. Operacije zbrajanja i množenja u skupu $\mathbf{C}$ imaju svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti, za sve kompleksne brojeve z_1, z_2 i z_3 vrijedi

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \qquad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1.,$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, \qquad z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3,$$

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

Sad možemo reći da je primjerice broj $2i$ rješenje jednadžbe $x^2 + 4 = 0$ jer vrijedi

$$(2i)^2 + 4 = 2^2 \cdot i^2 + 4 = 4 \cdot (-1) + 4 = 0.$$

Slično, broj $\sqrt{3}\,i$ rješenje je jednadžbe $x^2 + 3 = 0$, broj $0.7i$ rješenje je jednadžbe $x^2 + 0.49 = 0$ itd.

Zadatak 1. Odredi realni i imaginarni dio kompleksnih brojeva $2+3i$, $3-2i$, $2i$, $\sqrt{2} - i\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$.

Jednakost kompleksnih brojeva

Dva su kompleksna broja $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ jednaka ako i samo ako im se podudaraju realni i imaginarni dijelovi:

$$z_1 = z_2 \quad \text{ako i samo ako vrijedi} \quad x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2.$$

Zaista, iz $x_1 + y_1 i = x_2 + y_2 i$ slijedi $x_1 - x_2 = (y_2 - y_1)i$, i ukoliko bi bilo $y_1 \neq y_2$, onda bi vrijedilo $i = \dfrac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} \in \mathbf{R}$, što je nemoguće. Zato je $y_1 = y_2$ i onda nužno $x_1 = x_2$.

Zadatak 2. Odredi realne brojeve a i b iz sljedećih jednakosti:

A. $-2+ai=b+\frac{1}{2}i$; **B.** $\frac{1}{2}+(a-1)i=(2b-1)-3i$;

C. $a-(b+1)i=-2+\frac{2}{3}i$; **D.** $(a-2b)+(2a+b)i=1-i$.

Zbrajanje, oduzimanje i množenje kompleksnih brojeva

Kompleksne brojeve prikazane u algebarskom obliku zbrajamo i oduzimamo koristeći se svojstvima asocijativnosti i distributivnosti kompleksnih brojeva:

$$(2+5i)+(3-2i)=2+5i+3-2i=5+3i,$$
$$(1-3i)-(2+4i)=1-3i-2-4i=-1-7i.$$

Kompleksne brojeve množimo poštujući sva navedena pravila i uvažavajući svojstvo imaginarne jedinice: $i^2=-1$. Na primjer,

$$(2+5i)\cdot(3-2i)=6+15i-4i-10i^2=6+11i+10=16+11i,$$
$$(1-3i)\cdot(2+4i)=2-6i+4i-12i^2=2-2i+12=14-2i.$$

Zbroj, razlika i umnožak kompleksnih brojeva

Ako su $z_1=x_1+y_1i$, $z_2=x_2+y_2i$ bilo koja dva kompleksna broja, njihov zbroj, razlika i umnožak kompleksni su brojevi koji se računaju ovako:

$$z_1+z_2=x_1+x_2+(y_1+y_2)i \tag{2}$$
$$z_1-z_2=x_1-x_2+(y_1-y_2)i \tag{3}$$
$$z_1\cdot z_2=x_1x_2-y_1y_2+(x_1y_2+x_2y_1)i \tag{4}$$

Formulu za umnožak kompleksnih brojeva ne moramo pamtiti, već pri množenju koristimo prije navedena svojstva kompleksnih brojeva.

Tako, na primjer, 'izvod' formule (4) glasi:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (x_1+y_1i)(x_2+y_2i)= && \text{(distributivnost)}\\ &= x_1x_2+y_1x_2i+x_1y_2i+y_1y_2i^2= && (i^2=-1)\\ &= x_1x_2-y_1y_2+(x_1y_2+x_2y_1)i. \end{aligned}$$

* * *

Evo nekoliko primjera.

Primjer 3. Načinimo naznačene operacije

$$(3+2i)(1-2i)=3+2i-6i-4i^2=7-4i,$$
$$(2+i)^2=4+4i+i^2=3+4i,$$
$$(1+i\sqrt{5})(1-i\sqrt{5})=1-i^2(\sqrt{5})^2=1+5=6. \triangleleft$$

Primjer 4. Neka su a i b realni brojevi.

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2 = a^2 + b^2,$$
$$(a+bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2i^2 = a^2 - b^2 + 2abi,$$
$$(a+bi)^3 = a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3$$

Vrijedi: $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$. Zato je

$$(a+bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i.$$

Izračunajte sami $(a-bi)^3$. $\triangleleft$

Primjer 5. Odredimo realni i imaginarni dio sljedećih kompleksnih brojeva:
A. $(1-i)(2+i)$; **B.** $(1+i)^2$; **C.** $(1-i\sqrt{3})^3$.

$\triangleright$ Moramo odrediti algebarski prikaz zadanih kompleksnih brojeva.

A. $z = (1-i)(2+i) = 2 - 2i + i - i^2 = 2 - i + 1 = 3 - i$. Dakle, $\operatorname{Re} z = 3$, $\operatorname{Im} z = -1$.

B. $z = (1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$. Odavde, $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 2$.

C. $z = (1-\sqrt{3}\,i)^3 = 1 - 3\sqrt{3}\,i + 3(\sqrt{3}\,i)^2 - (\sqrt{3}\,i)^3 = 1 - 3\sqrt{3}\,i - 9 + 3\sqrt{3}\,i = -8$, te je $\operatorname{Re} z = -8$, $\operatorname{Im} z = 0$. $\triangleleft$

Primjer 6. Odredimo realne brojeve x i y iz jednakosti kompleksnih brojeva:

$$(4x+i)(2-i) + (2x+yi)(1-2i) = 7 - 8i.$$

$\triangleright$ Sređivanjem lijeve strane jednakosti, dobivamo

$$8x + 2i - 4xi - i^2 + 2x + yi - 4xi - 2yi^2 = 7 - 8i,$$
$$10x + 2y + 1 + (-8x + y + 2)i = 7 - 8i.$$

Ovi su kompleksni brojevi jednaki ako im se podudaraju realni i imaginarni dijelovi, zato mora biti

$$10x + 2y + 1 = 7,$$
$$-8x + y + 2 = -8.$$

Rješavanjem ovog sustava dobivamo $x = 1$, $y = -2$. $\triangleleft$

* * *

Potencije imaginarne jedinice

Izračunajmo čemu su jednake potencije broja i. Vrijedi:

$$i^2 = -1,$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = -i,$$
$$i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = 1,$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = i.$$

Dalje se račun ponavlja: $i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -1$, $i^7 = -i$ itd.

Svaki se prirodni broj n može napisati u obliku $n = 4k + r$, gdje je r ostatak pri dijeljenju s 4, $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Zapamtimo da je uvijek $i^{4k} = \left(i^4\right)^k = 1^k = 1$. Tad je

$$i^n = i^{4k+r} = i^{4k} \cdot i^r = 1 \cdot i^r = i^r.$$

Na primjer, $i^{23} = i^{4\cdot 5} \cdot i^3 = i^3 = -i$, $i^{1998} = i^{4\cdot 499+2} = i^2 = -1$ i slično.

Potencije imaginarne jedinice

Neka je k prirodan broj. Za potencije imaginarne jedinice vrijedi:

$$i^{4k} = 1, \qquad i^{4k+1} = i, \qquad i^{4k+2} = -1, \qquad i^{4k+3} = -i.$$

Primjer 7.

$$\begin{aligned} i^{79} &= i^{4\cdot 19+3} = i^3 = -i, \\ i^{729} &= i^{29} = i^1 = i, \\ i^{3246} &= i^{46} = i^2 = -1. \ \triangleleft \end{aligned}$$

Zadatak 8. Izračunaj i^{22}, i^{75}, i^{313}, i^{248}.

Kompleksno konjugirani brojevi

Neka je $z = x + yi$ bilo koji kompleksni broj. Sa $\overline{z}$ označavamo broj

$$\overline{z} := x - yi$$

koji nazivamo **kompleksno konjugiranim** broju z.

Tako je $\overline{2 + 3i} = 2 - 3i$, $\overline{3 - i} = 3 + i$, $\overline{2i} = -2i$, $\overline{3} = 3$, $\overline{-4} = -4$.

Primijetimo da vrijedi: $\overline{\overline{z}} = \overline{x - yi} = x + yi = z$; zato je z kompleksno konjugiran broju $\overline{z}$. Par z, $\overline{z}$ nazivamo parom **kompleksno konjugiranih** brojeva. To je, dakle, par koji se razlikuje samo u predznaku imaginarnog dijela!

Zadatak 9. Odredi broj koji je konjugiran kompleksnom broju $z = -\frac{1}{2} + 3i$; $z = -2 - 4\sqrt{5}\,i$; $z = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}\,i$; $z = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,i$; $z = \sqrt{11}$.

Primjer 10. Dokažimo sljedeća svojstva operacije kompleksnog konjugiranja:

A. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; **B.** $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$; **C.** $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

$\triangleright$ **A.**

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i)} \\ &= \overline{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i} \\ &= (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i \\ &= x_1 - y_1 i + x_2 - y_2 i = \overline{z_1} + \overline{z_2} \end{aligned}$$

Istovjetno se dokazuje **B.** Dokažimo **C.**

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{x_1x_2 - y_1y_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)i} \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 - (x_1y_2 + x_2y_1)i \\ &= (x_1 - y_1 i)(x_2 - y_2 i) \\ &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}. \ \triangleleft\end{aligned}$$

* * *

Množeći z i $\overline{z}$ dobit ćemo

$$z \cdot \overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2.$$

Dakle, vrijedi

$$\boxed{x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy)\,.}$$

Zadaci 1.2

1. Odredi realni i imaginarni dio kompleksnog broja z, ako je:

1) $z = 5 + 2i$; **2)** $z = 1 - 3i$; **3)** $z = -\frac{1}{2}i$;

4) $z = \sqrt{2}$; **5)** $z = \frac{2-3i}{3}$; **6)** $z = 1 - \sqrt{2} + i\sqrt{3}$.

2. Izračunaj:

1) $(3-5i) + (-2+3i)$; **2)** $(1-2i) + (3-5i)$;

3) $i(i-1) + (2+i)(i-1)$; **4)** $(3-2i)(1+i)(2+3i)$.

3. Izračunaj $z+w$, $z-w$ i $z \cdot w$ ako je:

1) $z = -\frac{1}{2} + i$, $w = 1 - \frac{1}{3}i$; **2)** $z = -2 + 3i$, $w = 2 + i$;

3) $z = \frac{3}{4} - \frac{2}{3}i$, $w = \frac{3}{4} + \frac{1}{3}i$.

4. Ako je $z = 1 - 2i$, $w = 3 - i$, koliko je $z+w$, $z-w$, $z \cdot w$, z^2 i w^2?

5. Izračunaj:

1) $(1+i)^2$; **2)** $(1-2i)^2$; **3)** $(2-i)^2$; **4)** $(1+2i)^3$;

5) $(3+2i)^3$; **6)** $(i+2)^3$; **7)** $(1-i)^4$; **8)** $(2+i)^4$.

6. Izračunaj:

1) $(1-i\sqrt{2})(\sqrt{2}-i)$; **2)** $(\sqrt{3}-i)(1+i\sqrt{3})$;

3) $(\sqrt{2}-i)(\sqrt{3}+2i) - (\sqrt{3}+i)(\sqrt{2}-i)$.

7. Izračunaj:

1) $(1-i)(2-i)(3-i)$; **2)** $(1+i)(1+2i)(1+3i)$;

3) $\left(\frac{1}{2} - i\right)(1+2i)\left(1 - \frac{1}{2}i\right)(2+i)$.

8. Izračunaj:

1) $(1-i)^2 \cdot (2-i)^2 \cdot (3-i)^2$; **2)** $(1-i)^2 \cdot (1-2i)^2 \cdot (1-3i)^2$;

9. Izračunaj:

1) $(1 - \sqrt{2} + i)(1 + \sqrt{2} - i)$;

2) $\left(1 - (\sqrt{2} - \sqrt{3})i\right)\left(1 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})i\right)$;

3) $(1 - \sqrt{2} + i\sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - i\sqrt{3})(1 - \sqrt{2} - i\sqrt{3})(1 + \sqrt{2} + i\sqrt{3})$.

10. Izračunaj vrijednost izraza za zadanu vrijednost kompleksnoga broja:
1) $z^3 - z^2 + 2z$, za $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$;
2) $z^3 + 3z^2 - z + 1$, za $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 2 - i$;
3) $z^4 - z^2 + 2$, za $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$.

* * *

11. Neka je $z = x + yi$. Odredi realni i imaginarni dio kompleksnih brojeva z^2 i z^3.

12. Brojevi $z_1 = 3 + 4i$ i $z_2 = 3 - 4i$ rješenja su jednadžbe $z^2 - 6z + 25 = 0$. Provjeri.

13. Brojevi $z_1 = 2 - 3i$ i $z_2 = 2 + 3i$ rješenja su jednadžbe $z^2 - 4z + 13 = 0$. Provjeri.

14. **1)** Provjeri je li kompleksni broj $z = 1 - 2i$ rješenje jednadžbe $(1+i)z^2 - (3+i)z + 4 + 2i = 0$.
2) Je li kompleksni broj $z = 1 + i$ rješenje jednadžbe $(1 + i)z^2 - (3 + i)z + 4 + 2i = 0$?

15. Provjeri jesu li brojevi $z_1 = 1 + i$ i $z_2 = 2 + i$ rješenja jednadžbe $z^2 - (3 + 2i)z + 1 + 3i = 0$.

16. Koliko je $(z\sqrt{2} - z - 1)(z\sqrt{2} + z + 1)$, ako je $z = 1 - i$?

* * *

17. Odredi realne brojeve x i y iz jednakosti:
1) $x + (y - 1)i = -1 + 3i$; **2)** $2x + y - yi = 1 + i$;
3) $x - y + (x + y)i = 2 + 4i$; **4)** $x - 2y + (2x - y)i = 3i$.

18. Odredi realne brojeve x i y iz jednakosti:
1) $(1 - i)x + (1 + i)y = i$; **2)** $(2 - 3i)x - (1 + 4i)y = 3 + i$;
3) $(x + y)(2 - i) + (x - y)(1 + 3i) = 2 + 3i$;
4) $(x + yi)(2 + i) + (x - yi)(1 - 3i) = 5 + 2i$.

19. Ako je $z = 1 + i$, $w = 2 + i$, odredi realne brojeve x i y tao da bude $x \cdot z + y \cdot w = z \cdot w$

20. Odredi kompleksni broj z iz jednakosti: $(z + i)(1 + 2i) + (1 + zi)(3 - 4i) = 1 + 7i$.

21.* Riješi sustave jednadžbi:

1) $\begin{cases} z + 2w = 1 + i, \\ 3z + iw = 2 - 3i; \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} 2z + w = 7i, \\ zi + w = -1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (1 - i)z + (2 + i)w = 10 + 2i, \\ (1 + i)z - (1 - 2i)w = -2 + 10i. \end{cases}$

22.* Odredi kompleksne brojeve z i w iz sustava jednadžbi

1) $\begin{cases} i \cdot z + \overline{w} = 1, \\ \overline{z} - i \cdot w = 2 - i; \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} \overline{z} - \overline{w} = 1 + i, \\ i \cdot z + i \cdot w = 3i. \end{cases}$

* * *

23. Koliko je:
1) i^{77}; **2)** i^{2468}; **3)** i^{3579}; **4)** $(i^{111})^{33}$.

24. Izračunaj:
1) $1 + i^3 + i^6 + i^9$; **2)** $1 + i + i^2 + \ldots + i^9 + i^{10}$;
3) $(1 + i^{50})(1 - i^{51})$; **4)** $i^{111} + i^{222} + \ldots + i^{999}$.

25. Dokaži da za svaki cijeli broj k vrijedi:
1) $i^k + i^{k+1} + i^{k+2} + i^{k+3} = 0$; **2)** $i^k \cdot i^{k+1} \cdot i^{k+2} \cdot i^{k+3} = -1$.

26. Koristeći se činjenicama iz prethodnog zadatka izračunaj:
1) $i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{303}$; **2)** $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdots i^{303}$.

27. Koliko je $i^{2k-1} + i^{2k+1}$, $k \in \mathbf{Z}$?
Koristeći se dobivenim rezultatom izračunaj: $i + i^3 + i^5 + \ldots + i^{111}$.

28. Koliko je $i^{2k} + i^{2k+2}$, $k \in \mathbf{Z}$?
Koristeći se dobivenim rezultatom izračunaj: $i^2 + i^4 + i^6 + \ldots + i^{100}$.

29. Izračunaj:
1) $(1-i)^5$; **2)** $(1+i)^8$; **3)** $(\sqrt{3}-i)^6$; **4)** $(1+i\sqrt{3})^9$.

30. Koliko je $(1-i)(1+i)(1+i^2)(1+i^4)(1+i^8)(1+i^{16})$?

31. Provjeri da za svaki prirodni broj n vrijedi:
1) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = (-i)^n$; **2)** $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{3n} = (-1)^n$.

32. Za svaki od danih kompleksnih brojeva z odredi njegov kompleksno konjugiran broj $\bar{z}$:
1) $z = -1 + 3i$; **2)** $z = 1 + \sqrt{22}$; **3)** $z = \dfrac{1-\sqrt{2}}{3}i$;
4) $z = 1-(\sqrt{2}-\sqrt{3})i$; **5)** $z = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}i$.

33. Za koje su realne brojeve m i n kompleksni brojevi $z = 2m + n + mi$ i $w = m - (n-3)i$ međusobno kompleksno konjugirani?

34. Odredi $\bar{z}$, ako je:
1) $z = (2-i)(1+2i)$; **2)** $z = (\sqrt{3}-i)(1+i\sqrt{3})$;
3) $z = (1+i)(2-i)(3+i)(4-i)$.

1.3. Dijeljenje kompleksnih brojeva

Dijeljenje kompleksnih brojeva

Formula
$$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$$
pomaže nam osloboditi se iracionalnosti u nazivniku algebarskih izraza. Primjenjujemo je u računima nalik na sljedeći:
$$\frac{1}{3-\sqrt{2}} = \frac{1}{3-\sqrt{2}} \cdot \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{2}}{3^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{3+\sqrt{2}}{7}.$$
Slično tome, formulom
$$(x-yi)(x+yi) = x^2 + y^2$$
možemo se 'osloboditi imaginarnosti' u nazivniku ovakvih izraza:
$$\frac{1}{3-2i} = \frac{1}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{3+2i}{3^2+2^2} = \frac{3+2i}{13} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i.$$
Općenito, vrijedi
$$\frac{1}{x+yi} = \frac{1}{x+yi} \cdot \frac{x-yi}{x-yi} = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i.$$

Na sličan način možemo opisati postupak dijeljenja dvaju kompleksnih brojeva. Da bi podijelili dva kompleksna broja (pri čemu je djelitelj različit od nule), moramo rezultat dijeljenja svesti na standardni zapis kompleksnoga broja.

Dijeljenje kompleksnih brojeva

Dva se kompleksna broja $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, ($z_2 \neq 0$) dijele na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} \\ &= \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\, i. \end{aligned} \tag{1}$$

Ovu formulu nećemo pamtiti, već ćemo u svakom konkretnom primjeru ponoviti postupak.

Primjer 1.

$$\frac{3+2i}{1-2i} = \frac{3+2i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{3+2i+6i+4i^2}{1+4} = \frac{-1+8i}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{8}{5}\, i.$$

Zadatak 2. Izračunaj

A. $\dfrac{1-3i}{1+i}$; **B.** $\dfrac{2+i}{1-i}$; **C.** $\dfrac{3-4i}{1+2i}$; **D.** $\dfrac{\sqrt{2}-i}{1+i\sqrt{2}}$.

$\triangleright$ **A.** $-1-2i$; **B.** $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$; **C.** $-\frac{3}{5}-2i$; **D.** $-i$. $\triangleleft$

Primjer 3. Odredimo realni i imaginarni dio sljedećih kompleksnih brojeva:

A. $\dfrac{1}{1-i}$; **B.** $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$.

$\triangleright$ Moramo odrediti algebarski prikaz zadanih kompleksnih brojeva.

A. $z = \dfrac{1}{1-i} = \dfrac{1}{1-i} \cdot \dfrac{1+i}{1+i} = \dfrac{1+i}{1-i^2} = \dfrac{1+i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\, i$.

Dakle, $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2}$.

B. $z = \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3 = \left(\dfrac{1-i}{1+i} \cdot \dfrac{1-i}{1-i}\right)^3 = \left(\dfrac{1-2i+i^2}{2}\right)^3 = (-i)^3 = i$.

Odavde, $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 1$. $\triangleleft$

Modul kompleksnog broja

Za umnožak dvaju kompleksno konjugiranih brojeva vrijedi:

$$z \cdot \overline{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2.$$

Ovaj je umnožak uvijek realan nenegativan broj.

Modul kompleksnog broja

Modul kompleksnoga broja $z = x + yi$ definira se formulom

$$|z| := \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2}$$

Modul $|z|$ jednak je nuli ako i samo ako vrijedi $x^2 + y^2 = 0$ a to je istina onda i samo onda ako je $z = 0$. Za svaki drugi kompleksni broj z modul $|z|$ pozitivan je realan broj.

Primjer 4.

$$
\begin{aligned}
|3 + 4i| &= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5,\\
|2 - 3i| &= \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13},\\
|4i| &= \sqrt{0^2 + 4^2} = 4,\\
|-2| &= \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2,\\
|x - yi| &= \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2},\\
|(x + i)^2 - 1| &= |x^2 + 2xi + i^2 - 1|\\
&= |(x^2 - 2) + 2xi| = \sqrt{(x^2 - 2)^2 + 4x^2} = \sqrt{x^4 + 4}.
\end{aligned}
$$

Primjećujemo da je modul realnog broja upravo apsolutna vrijednost tog realnog broja. Prema tome, *modul je poopćenje pojma apsolutne vrijednosti* na kompleksne brojeve. Zbog toga umjesto riječi modul često koristimo i izraz **apsolutna vrijednost** kompleksnoga broja.

* * *

Pokažimo da modul kompleksnog broja ima sljedeće svojstvo:

$$\boxed{|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.} \tag{3}$$

Neka je $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. Tad vrijedi:

$$
\begin{aligned}
|z_1 \cdot z_2| &= |(a + bi)(c + di)|\\
&= |(ac - bd) + (ad + bc)i|\\
&= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2}\\
&= \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2}\\
&= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = |z_1| \cdot |z_2|.
\end{aligned}
$$

Ako su z_1, z_2, z_3 kompleksni brojevi, onda imamo

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot z_3| = |z_1 \cdot z_2| \cdot |z_3| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3|.$$

Općenito vrijedi

$$|z_1 \cdot z_2 \cdots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_n|.$$

Ako su svi brojevi jednaki, onda za svaki prirodni broj n vrijedi

$$\boxed{|z^n| = |z|^n.} \tag{4}$$

* * *

Primjetimo da za recipročnu vrijednost kompleksnog broja vrijedi

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i$$

pa je

$$\left|\frac{1}{z}\right|=\sqrt{\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}}=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{|z|}.$$

Prema ovoj formuli zaključujemo

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\left|z_1\cdot\frac{1}{z_2}\right|=|z_1|\cdot\left|\frac{1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}. \tag{5}$$

Zadatak 5. Izračunaj $|z|$ ako je

A. $(\sqrt{3}-i\sqrt{2})(\sqrt{2}+i\sqrt{3})$; **B.** $\dfrac{1-i}{1+i}$; **C.** $(1-i)^8$; **D.** $\dfrac{(3-i)^4}{(4+3i)^3}$.

▷ **A.** 5; **B.** 1; **C.** 16; **D.** $\dfrac{4}{5}$. ◁

Zadaci 1.3

1. Izračunaj:

1) $\dfrac{3-i}{1+i}$; **2)** $\dfrac{1+2i}{1-i}$; **3)** $\dfrac{-4i}{\sqrt{3}+i}$;

4) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$; **5)** $\dfrac{i}{i-1}+\dfrac{i+1}{i}$; **6)** $\dfrac{i-1}{i-2}+\dfrac{i+1}{i+2}$.

2. Izračunaj

1) $\dfrac{1}{1+i}$; **2)** $\dfrac{2}{1-2i}$; **3)** $\dfrac{1-i}{1+i}$;

4) $\dfrac{1+3i}{i}$; **5)** $\dfrac{i}{3-i}$; **6)** $\dfrac{i^2-1}{i^3+1}$;

3. Odredi realni i imaginarni dio sljedećih kompleksnih brojeva:

1) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2$; **2)** $\left(\dfrac{1}{i}+\dfrac{i}{2}\right)^3$; **3)** $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$;

4) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$; **5)** $\left(\dfrac{2}{1+i\sqrt{3}}\right)^4$; **6)** $\dfrac{i^{107}+i^{57}}{i^{107}-i^{57}}$.

4. Izračunaj

1) $\operatorname{Re} z$, ako je $z=\dfrac{1+i}{(2+i)(1-3i)}$; **2)** $\operatorname{Im} z$, ako je $z=\dfrac{1-i}{(3-i)(1+2i)}$.

5. Izračunaj

1) $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z^2-\bar{z}}$, ako je $z=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$; **2)** $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z^2+iz}$, ako je $z=\dfrac{\sqrt{2}-i}{3}$.

6. Neka je $z=x+iy$. Odredi realni i imaginarni dio kompleksnog broja $\dfrac{1}{z^2}$.

* * *

7. Koliko je $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\ldots+\frac{1}{i^{100}}$?

8. Izračunaj

1) $\left(\frac{1+i+i^2+\ldots+i^{10}}{i^{11}+i^{12}+\ldots+i^{20}}\right)^{10}$; **2)** $\left(\frac{1-i+i^2-i^3+\ldots+i^{10}}{1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{10}}\right)^{10}$.

9. Izračunaj:

1) $\left(\frac{4+3i}{1+3i}+\frac{3-4i}{3-i}\right)\cdot\frac{3+4i}{10}$; **2)** $\frac{(1+i)(2+i)}{2-i}-\frac{(1-i)(2-i)}{2+i}$.

10. Izračunaj:

1) $\frac{(1-2i)^2-(2-i)^2}{(1-i)^3-(1+i)^3}$; **2)** $\frac{(1+2i)^2-(2+i)^2}{(1+i)^3+(1-i)^3}$.

11. Izračunaj:

1) $\frac{1-\sqrt{2}-i\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-i\sqrt{3}}+\frac{1+\sqrt{2}-i\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$; **2)** $\frac{1+\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}-i\sqrt{2}}-\frac{1-\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}-i\sqrt{2}}$.

12. Izračunaj vrijednost brojevnog izraza $\frac{z\overline{w}-\overline{z}w}{z^2-w^2}$, ako je:

1) $z=-1+2i$, $w=2-3i$; **2)** $z=1-i\sqrt{2}$, $w=\sqrt{2}-i$.

13. Izračunaj:

1) $\left(\frac{i^{55}-i^{66}}{i^{77}+i^{88}}\right)^{99}$; **2)** $\left(i^{101}+\frac{i^{202}}{i^{303}}\right)^{404}$; **3)** $\left(\frac{i^{55}-1}{1+i^{55}}\right)^{55}$;

4) $\left(\frac{i^{33}-1}{i^{55}-1}\right)^{77}$; **5)** $\left(\frac{i^{77}-1}{i^{55}-1}\right)^{33}$.

14. Koliko je $\operatorname{Re} z$, ako je $z=\frac{i^{357}}{(1-2i)(3+i)}$?

15. Koliko je $\operatorname{Im} z$, ako je $z=\frac{i^{246}}{(1+2i)(3-i)}$?

* * *

16. Odredi modul $|z|$ kompleksnog broja z, ako je:

1) $z=-1+\frac{3}{4}i$; **2)** $z=\sqrt{3}-i$; **3)** $z=-i\sqrt{3}$; **4)** $z=1-\sqrt{2}$.

17. Odredi $|z|$, ako je:

1) $z=(1-i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)$;

2) $z=(1-\sqrt{2}+i\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-i\sqrt{3})$;

3) $z=(\sqrt{2}-i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i\sqrt{2})(1-i\sqrt{2})(\sqrt{2}+i)$;

4) $z=-3i(1+i)^4\cdot(1-i\sqrt{3})^3$.

18. Odredi $|w|$, ako je

1) $w=\frac{z^2}{\overline{z}-iz}$, $z=3-i$; **2)** $w=\frac{z^2}{z\cdot\overline{z}-i}$, $z=1-2i$;

3) $w=\frac{\overline{z}}{z^2\cdot i+z}$, $z=1-i$; **4)** $w=\frac{z^2}{z+i\cdot\overline{z}}$, $z=1+i$.