

## KOMPLEKSNI BROJEVI

### I.1.

1. Odredi realne brojeve  $x$  i  $y$  iz jednakosti

$$\frac{xi}{1-i} + \frac{yi}{1+i} = \frac{1}{i}.$$

2. Koliko je

$$i + i^4 + i^7 + \dots + i^{100} ?$$

3. Izračunaj vrijednost brojevnog izraza  $\frac{z\bar{w} - \bar{z}w}{z^2 - w^2}$ , ako je  $z = 1 - i$ ,  $w = 2 - 3i$ .

4. Izračunaj, koliko je  $\operatorname{Re} \left( \frac{z^3 + 2|z| - 4i^{12345}}{\bar{z} - z} \right)$ , ako je  $z = 1 - i\sqrt{3}$ .

5. Koliko je  $\left( \frac{i^{202} - i^{303}}{i^{404} + i^{505}} \right)^{101}$  ?

6. U Gaussovoj ravnini prikaži skup svih točaka koje su zadane uvjetom

$$(1 - i) \cdot \bar{z} = (1 + i) \cdot z, \quad z = x + yi.$$

### I.2.

1. Odredi realne brojeve  $x$  i  $y$  iz jednakosti

$$\frac{x-1}{3+i} + \frac{y-1}{3-i} = i.$$

2. Koliko je

$$i^2 + i^5 + i^8 + i^{11} + \dots + i^{101} ?$$

3. Izračunaj vrijednost brojevnog izraza  $\frac{z\bar{w} - \bar{z}w}{z^2 + w^2}$ , ako je  $z = 1 + i$ ,  $w = 2 - 3i$ .

4. Izračunaj, koliko je  $\operatorname{Im} \left( \frac{z^4 + 6|z| + 3i^{323}}{z - \bar{z}} \right)$ ,  $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ .

5. Koliko je  $\left( \frac{i^{111} - i^{222}}{i^{333} + i^{444}} \right)^{555}$  ?

6. Prikaži u Gaussovoj ravnini skup točaka koji je određen uvjetom

$$1 < |z + 2| \leq 3, \quad z = x + yi.$$

## I.3.

1. Odredi realne brojeve  $x$  i  $y$  iz sljedećih jednakosti kompleksnih brojeva:

$$(1 - i)x + (2 + i)y = 1 - 3i.$$

2. Koliko je:

$$i \cdot i^4 \cdot i^7 \cdot i^{10} \cdot \dots \cdot i^{100} ?$$

3. Odredi

$$\operatorname{Re} \frac{i^{115}}{(1 - i)(2 + i)}.$$

4. Riješi u skupu  $\mathbf{C}$  jednadžbu:  $|z| - \bar{z} = 1 + 2i$ .

5. Izračunaj  $|z|$ , ako je  $z = \frac{(\sqrt{2} - i)^5}{(1 - i\sqrt{2})^8}$ .

6. Prikaži u Gaussovoj ravnini skup točaka određenih jednadžbom

$$\left| \frac{z + i}{z - 3i} \right| = 1.$$

## I.4.

1. Odredi realne brojeve  $x$  i  $y$  iz sljedeće jednakosti kompleksnih brojeva:

$$(2 + 3i)x + (1 - i)y = 2 + i.$$

2. Koliko je:

$$i \cdot i^4 \cdot i^7 \cdot i^{10} \cdot i^{100} ?$$

3. Izračunaj

$$\operatorname{Im}(1 - i\sqrt{2})^4.$$

4. Odredi kompleksne brojeve  $z$  i  $w$  iz sustava jednadžbi:

$$zi + wi = 1 + 2i$$

$$\bar{z} - \bar{w} = 3i.$$

5. Koliko je  $|z|$ , ako je  $z = (1 - i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{2})(1 - i)(1 + i)(\sqrt{2} + i)(\sqrt{3} + i)$ ?

6. Odredi u Gaussovoj ravnini skup točaka određenih uvjetom  $1 < |iz - 1| \leq 3$ .

## I.5.

1. Koliko je:  $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^5} + \dots + \frac{1}{i^{103}} + \frac{1}{i^{105}}?$

2. Odredi realne brojeve  $x$  i  $y$  iz jednakosti

$$\frac{2x - i}{1 - 2i} - \frac{y + 2i}{2 + i} = 2.$$

3. Riješi po  $z$  i  $w$ ,  $z, w \in \mathbf{C}$  sustav jednažbi:

$$\begin{aligned}\bar{z} \cdot \bar{w} &= -5i \\ zi - w &= -4.\end{aligned}$$

4. Prikaži u Gaussovoj ravnini skup točaka  $z$ , za koje je  $\left| \frac{z+1}{z-3i} \right| = 1$ .

5. Izračunaj vrijednost umnoška  $(1 - z + i)(1 + z - i)(1 + z + i)(1 - z - i)$ , ako je  $z = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ .

6. Dokaži:  $\sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i} = 4$ .

## I.6.

1. Koliko je:

$$\frac{1 + i + i^2 + \dots + i^{105} + i^{106}}{1 \cdot i \cdot i^2 \cdot \dots \cdot i^{105} \cdot i^{106}}?$$

2. Odredi realne brojeve  $x$  i  $y$  iz jednakosti:

$$\frac{xi}{1+i} + \frac{yi}{1-i} = \frac{2}{i}.$$

3. Riješi sustav jednažbi:

$$\begin{aligned}\bar{z} - wi &= 2 - i \\ \bar{w} + zi &= 5, \quad z, w \in \mathbf{C}.\end{aligned}$$

4. Prikaži u Gaussovoj ravnini skup točaka  $z$ , za koje je

$$\left| \frac{z}{i} \right| = \left| z + \frac{1}{i} \right|.$$

5. Izračunaj:  $1 + z + z^2 + \dots + z^{11}$ , ako je  $z = 1 - i$ .

6. Dokaži, ako je  $z = \frac{1+xi}{1-xi}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , onda je  $\bar{z} = z^{-1}$ .

## I.7.

1. Koliko je:  $i^{2k} + i^{2k+2}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ? Izračunaj zbroj:  $i^2 + i^4 + i^6 + \dots + i^{102}$ .

2. Izračunaj:

$$\frac{5+i}{(1+i) \cdot (2-3i)}.$$

3. Koliko je  $\operatorname{Im} \left( \frac{|z| + \bar{z} - 2i^{232}}{z \cdot \bar{z} - z^2} \right)$ , ako je  $z = 1 - i\sqrt{3}$ ?

4. Odredi realne brojeve  $x$  i  $y$  iz sljedeće jednakosti

$$\frac{x}{2+i} - \frac{yi}{1+2i} = i.$$

5. Riješi jednađžbu:  $z \cdot \bar{z} - i = 2 + z^2$ ,  $z \in \mathbf{C}$ .

6. Prikaži grafički u Gaussovoj ravnini skup točaka  $z$ , za koje vrijedi

$$1 \leq z \cdot \bar{z} < 2.$$

## I.8.

1. Koliko je:

$$i^{2k+1} + i^{2k+3}, k \in \mathbf{Z}?$$

Izračunaj zatim zbroj:  $i + i^3 + i^5 + \dots + i^{99}$ .

2. Izračunaj:

$$\frac{3+i}{(1+i)(1-2i)}.$$

3. Koliko je:

$$\left( \frac{i^{313} + i^{414}}{i^{515} - i^{616}} \right)^{717}?$$

4. Odredi realne brojeve  $x$  i  $y$  iz jednakosti:

$$\frac{x-i}{2i} - \frac{x+y}{1-i} \cdot i = \frac{1-i}{1+i}.$$

5. Riješi jednađžbu:

$$|z|^2 - 2i = 2i \cdot \bar{z}.$$

6. Prikaži grafički u Gaussovoj ravnini skup točaka  $z$  koje zadovoljavaju uvjet  $|z - i| > 1$ .

## I.9.

1. Izračunaj:  $\left(\frac{1+i+i^2+\dots+i^{10}}{i^{11}+i^{12}+\dots+i^{20}}\right)^{10}$ .
2. Ako je  $z = 1 - i$ ,  $w = 2 + i$ , odredi realne brojeve  $x$  i  $y$  za koje je
$$x \cdot z + y \cdot w = z \cdot w.$$
3. Odredi  $|w|$ , ako je  $w = \frac{z^2}{\bar{z} - i \cdot z}$ , gdje je  $z = 3 - i$ .
4. Je li kompleksni broj  $z = 1 - 2i$  rješenje jednačbe
$$(1+i)z^2 - (3+i)z + 4 + 2i = 0?$$
5. Odredi  $\operatorname{Im} z$ , ako je  $z = (1 - i)^5$ .
6. Sustavom nejednakosti  $1 \leq |z - i| < 3$ , gdje je  $z$  neki kompleksni broj određen je skup točaka u kompleksnoj ravnini.
  - 1) Prikaži taj skup točaka grafički.
  - 2) Je li kompleksni broj  $z = 2 + i$  jedno rješenje toga sustava?
  - 3) Promatrajući crtež odredi još barem jedno rješenje zadanoga sustava uvjeta.

## I.10.

1. Izračunaj:  $\left(\frac{1-i+i^2-i^3+\dots+i^{10}}{1+i+i^2+i^3+\dots+i^{10}}\right)^{10}$ .
2. Ako je  $z = 1 - 2i$ ,  $w = 2 + i$ , odredi realne brojeve  $x$  i  $y$  za koje je
$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{z}{w}.$$
3. Odredi  $|w|$ , ako je  $w = \frac{z^2}{z \cdot \bar{z} - i}$ , gdje je  $z = 1 - 2i$ .
4. Je li kompleksni broj  $z = 1 + i$  rješenje jednačbe
$$(1+i)z^2 - (3+i)z + 4 + 2i = 0?$$
5. Odredi  $\operatorname{Re} z$ , ako je  $z = (1 + i)^5$ .
6. Sustavom nejednakosti  $1 \leq |z + 2| < 3$ , gdje je  $z$  neki kompleksni broj određen je skup točaka u kompleksnoj ravnini.
  - 1) Prikaži taj skup točaka grafički.
  - 2) Je li kompleksni broj  $z = -1 + 2i$  jedno rješenje toga sustava?
  - 3) Promatrajući crtež odredi još barem jedno rješenje zadanoga sustava uvjeta.

## I.11.

1. Koliko je  $\operatorname{Re} z$ , ako je  $z = \frac{i^{357}}{(1-2i)(3+i)}$ ?

2. Riješi sustav jednačnji:

$$i \cdot z + \bar{w} = 1$$

$$\bar{z} - i \cdot w = 2 - i.$$

3. Odredi  $|w|$ , ako je  $w = \frac{\bar{z}}{z^2 \cdot i + z}$ , gdje je  $z = 1 - i$ .

4. Kompleksni brojevi  $z_1 = 3 + 4i$  i  $z_2 = 3 - 4i$  rješenja su jednačnje  $z^2 - 6z + 25 = 0$ . Provjeri.

5. Izračunaj:  $\frac{(1-2i)^2 - (2-i)^2}{(1-i)^3 - (1+i)^3}$ .

6. Odredi skup svih točaka kompleksne ravnine koje su određene uvjetom  $|z-1| = |z+i|$ .

## I.12.

1. Koliko je  $\operatorname{Im} z$ , ako je  $z = \frac{i^{246}}{(1+2i)(3-i)}$ ?

2. Riješi sustav jednačnji:

$$\bar{z} - \bar{w} = 1 + i$$

$$i \cdot z + i \cdot w = 3i.$$

3. Odredi  $|w|$ , ako je  $w = \frac{z^2}{z+i \cdot \bar{z}}$ , gdje je  $z = 1 + i$ .

4. Kompleksni brojevi  $z_1 = 2 + 3i$  i  $z_2 = 2 - 3i$  rješenja su jednačnje  $z^2 - 4z + 13 = 0$ . Provjeri.

5. Izračunaj:  $\frac{(1+2i)^2 - (2+i)^2}{(1+i)^3 + (1-i)^3}$ .

6. Odredi skup svih točaka kompleksne ravnine koje su određene uvjetom  $|z| = |z-1-i|$ .

## I.13.

1. Izračunaj:  $(1 - i)^2 \cdot (1 - 2i)^2 \cdot (1 - 3i)^2$ .
2. Odredi  $\operatorname{Re} z$ , ako je  $z = \frac{1 + i}{(2 + i)(1 - 3i)}$ .
3. Odredi realne brojeve  $x$  i  $y$  iz jednakosti
$$(x + y)(2 - i) + (x - y)(1 + 3i) = 2 + 3i.$$
4. Izračunaj:  $\left(\frac{i^{77} - 1}{i^{55} - 1}\right)^{33}$ .
5. Koliko je  $|z|$ , ako je  $z = \frac{u^2 - v^2}{u^3 + v^3}$ ,  $u = 2 - i$ ,  $v = 1 - i$ .
6. Prikaži u Gaussovoj ravnini skup svih točaka  $z$  za koje je  $|z| \geq 1$  i  $|z + 2| \leq 2$ .

## I.14.

1. Izračunaj:  $(1 - i)^2 \cdot (2 - i)^2 \cdot (3 - i)^2$ .
2. Odredi  $\operatorname{Im} z$ , ako je  $z = \frac{1 - i}{(3 - i)(1 + 2i)}$ .
3. Odredi realne brojeve  $x$  i  $y$  iz jednakosti
$$(x + yi)(2 + i) + (x - yi)(1 - 3i) = 5 - 2i.$$
4. Izračunaj:  $\left(\frac{i^{33} - 1}{i^{55} - 1}\right)^{77}$ .
5. Koliko je  $|z|$ , ako je  $z = \frac{(u - v)^2}{u^3 + v^3}$ ,  $u = 1 - 2i$ ,  $v = 2 - i$ .
6. Prikaži u Gaussovoj ravnini skup svih točaka  $z$  za koje je  $|z| \geq 2$  i  $|z + 2i| \leq 2$ .

## I.15.

1. Odredi kompleksne brojeve  $z$  i  $w$  iz sustava jednažbi

$$\begin{aligned}\bar{z} - \bar{w} &= 4 + i \\ z \cdot i + w \cdot i &= 3 - 2i.\end{aligned}$$

2. Odredi  $|z|$ , ako je:  $z = \frac{(3-i)^3}{(2-i)^3 \cdot (1-i)^3}$ .
3. Riješi u skupu  $\mathbf{C}$  jednažbu:  $z^2 \cdot i = \bar{z}$ .
4. Izračunaj:  $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{12}$ .
5. Odredi  $\operatorname{Re} \frac{1}{z^2 - \bar{z}}$ , gdje je  $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ .
6. Točke kompleksne ravnine što su pridružene brojevima  $1+2i$ ,  $-2+i$  i  $-1-2i$  vrhovi su kvadrata. Odredi kompleksni broj pridružen četvrtom vrhu tog kvadrata.

## I.16.

1. Odredi kompleksne brojeve  $z$  i  $w$  iz sustava jednažbi

$$\begin{aligned}z + i \cdot \bar{w} &= 4 - 2i \\ \bar{z} \cdot i - w &= 2i.\end{aligned}$$

2. Odredi  $|z|$ , ako je:  $z = \frac{(1+2i)^5 \cdot (1+i)^5}{(1+3i)^5}$ .
3. Riješi u skupu  $\mathbf{C}$  jednažbu:  $z^2 = \bar{z} \cdot i$ .
4. Izračunaj:  $\left(\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{12}$ .
5. Odredi  $\operatorname{Im} \frac{1}{z^2 + zi}$ , gdje je  $z = \frac{\sqrt{2}-i}{3}$ .
6. Točke kompleksne ravnine što su pridružene brojevima  $-3i$ ,  $4-i$  i  $2+3i$  vrhovi su kvadrata. Odredi kompleksni broj pridružen četvrtom vrhu tog kvadrata.



## I.1.

1. Danom jednačočku iskazana je jednakost dvaju kompleksnih brojeva. No najprije te brojeve valja zapisati u standardnom obliku. Nakon sređivanja, dobit će se:  $-x + y + (x + y)i = -2i$ . Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im jednaki realni i imaginarni dijelovi, odnosno ako vrijedi:  $-x + y = 0$  i  $x + y = -2$ . Iz ovog se sustava nalazi  $x = y = -1$ .

2. Uoči zbroj potencija imaginarne jedinice gdje eksponenti uzastopno rastu za po 3. Isti je zbroj jednak:

$$(i + 1 - i - 1) + (i + 1 - i - 1) + \dots + i + 1.$$

Grupirajući po četiri pribrojnika, čiji je zbroj jednak nuli, na kraju nam preostaju dva te je

$$i + i^4 + i^7 + \dots + i^{100} = 1 + i.$$

3. Nakon uvrštavanja i jednostavnog računanja dobit će se rezultat  $\frac{4}{25} + \frac{2}{25}i$ .

4. Najprije zasebno izračunavamo:  $z^3 = 1 - 3i\sqrt{3} - 9 + 3i\sqrt{3} = -8$ ,  $2|z| = 2\sqrt{1+3} = 4$ ,  $4i^{12345} = 4i^{45} = 4i$ ,  $\bar{z} - z = 2i\sqrt{3}$ . Potom uvrstimo te imamo:

$$\operatorname{Re} \frac{-4 - 4i}{2i\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

5. Kako je  $i^{202} = -1$ ,  $i^{303} = -i$ ,  $i^{404} = 1$ ,  $i^{505} = i$  to je  $\frac{i^{202} - i^{303}}{i^{404} + i^{505}} = \frac{-1 + i}{1 + i} = i$  te konačno  $i^{101} = i$ .

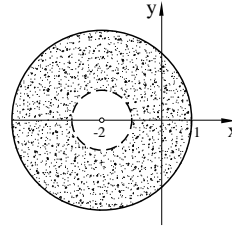
6. Iz jednakosti  $(1 - i)(x - yi) = (1 + i)(x + yi)$  nakon sređivanja dobivamo  $(x + y)i = 0$ , što vrijedi samo ako je  $x + y = 0$ . Skup svih točaka što je određen danim uvjetom jest pravac, simetrala II. i IV. kvadranta.

## I.2.

1.  $x = -4$ ,  $y = 6$ .
2.  $-1 + i$ .
3.  $-\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$ .
4.  $-\sqrt{2}$ .

5.  $i$ .

6. Vidi sliku!



## I.3.

1. Iz sustava  $x + 2y = 1$ ,  $-x + y = -3$ , nalazimo  $x = \frac{7}{3}$ ,  $y = -\frac{2}{3}$ .

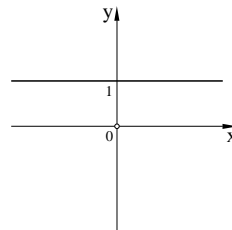
2. Umnožak je jednak  $i$ .

3.  $\operatorname{Re} \frac{-i}{3 - i} = \operatorname{Re} \frac{1 - 3i}{10} = \frac{1}{10}$ .

4.  $z = \frac{3}{2} + 2i$

5.  $|z| = \frac{|\sqrt{2} - i|^5}{|1 - i\sqrt{2}|^8} = \frac{(\sqrt{3})^5}{(\sqrt{3})^8} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ .

6. Iz  $|z + i| = |z - 3i|$ ,  $z \neq 3i$ , nalazimo  $y - 1 = 0$ . Vidi sliku!



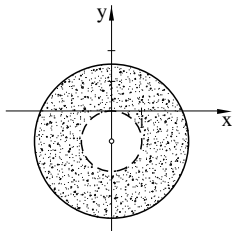
## I.4.

1. Iz sustava jednačžbi  $2x + y = 2$ ,  $3x - y = 1$  nalazi se  $x = \frac{3}{5}$ ,  $y = \frac{4}{5}$ .

2. Umnožak je jednak  $-1$ .

3.  $\operatorname{Im} (-1 - 2i\sqrt{2})^2 = 4\sqrt{2}$ .

- $z = 1 - 2i, w = 1 + i.$
- $|z| = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 2 = 24.$
- Zadani sustav nejednadžbi ekvivalentan je sustavu  $1 < x^2 + (y + 1)^2 \leq 3.$  Vidi sliku!



### I.5.

- $-i.$
- $x = 2, y = -3.$
- $z = 1 + 2i, w = 2 + i$  ili  $z = -1 + 2i, w = 2 - i.$
- $x + 3y - 4 = 0.$
- $z^4 + 4 = 3.$
- Kubiramo danu jednakost.

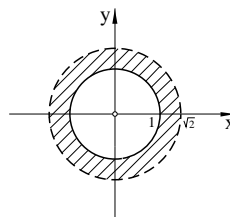
### I.6.

- $-1.$
- $x = y = -2.$
- $z = 1 - 2i, w = 3 + i.$
- $y = \frac{1}{2},$  pravac paralelan s osi  $x.$
- $1 + z + z^2 + \dots + z^{11} = \frac{z^{12} - 1}{z - 1} = -65i.$
- $\bar{z} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} - \frac{2x}{1 + x^2}i = z^{-1}.$

### I.7.

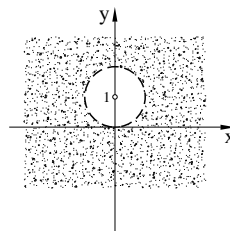
- $-1.$
- $\frac{12}{13} + \frac{5}{13}i.$
- $\frac{\sqrt{3}}{12}.$

- $x = y = -\frac{5}{2}.$
- $z_1 = \frac{1}{2} - i, z_2 = -\frac{1}{2} + i.$
- Vidi sliku!



### I.8.

- $0.$
- $\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.$
- $-i.$
- $x = 1, y = 0.$
- $z = -1 + i.$
- Vidi sliku!



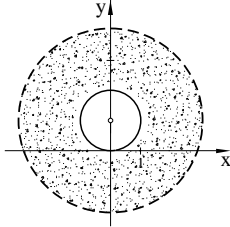
### I.9.

- $\left( \frac{1 + i - 1 - i + \dots + 1 + i - 1}{-i + 1 + \dots + 1} \right)^{10} = \left( \frac{i}{1 - i} \right)^{10} = \frac{1}{32}i.$
- Iz jednakosti  $x + 2y + (-x + y)i = 3 - i$  dobijemo sustav jednadžbi  $x + 2y = 3, -x + y = -1,$  s rješenjem  $x = \frac{5}{3}, y = \frac{2}{3}.$
- $z^2 = 8 - 6i, \bar{z} = 3 + i, i \cdot z = 1 + 3i,$   
 $w = \frac{4 - 3i}{1 - i}, |w| = \frac{5}{\sqrt{2}}.$

4. Provjeravamo uvrštavanjem broja  $z$  u jednadžbu:  $(1+i)(-3-4i) - (3+i)(1-2i) + 4 + 2i = 1 - 7i - 5 + 5i + 4 + 2i = 0$ . Broj  $z$  je rješenje zadane jednadžbe.

5.  $((1-i)^2)^2 \cdot (1-i) = (-2i)^2 \cdot (1-i) = -4(1-i) = -4 + 4i$ ,  $\text{Im } z = 4$ .

6. 1) Vidi sliku!



2)  $|2+i-i| = 2$ , Da! 3)  $\bar{z} = 2-i$ ,  $z = -i$ , itd.

## I.10.

1.  $\left( \frac{1-i-1+i+\dots+1-i-1}{1+i-1-i+\dots+i-1} \right)^{10} = \left( \frac{-i}{i} \right)^{10} = 1$ .

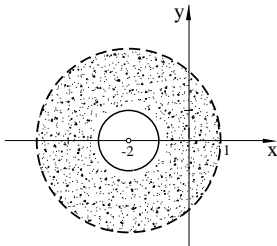
2. Iz jednakosti  $2x+y+(x-2y)i = -3-4i$  dobijemo sustav jednadžbi  $2x+y = -3$ ,  $x-2y = -4$ , s rješenjem  $x = -2$ ,  $y = 1$ .

3.  $z^2 = -3 - 4i$ ,  $z \cdot \bar{z} = 5$ ,  $w = \frac{-3-4i}{5-i}$ ,  $|w| = \frac{5}{\sqrt{26}}$ .

4.  $2i \cdot (1+i) - (3+i)(1+i) + 4 + 2i = 2i - 2 - 2 - 4i + 4 + 2i = 0$ .

5.  $((1+i)^2)^2 \cdot (1+i) = (2i)^2 \cdot (1+i) = -4(1+i) = -4 - 4i$ ,  $\text{Re } z = -4$ .

6. 1) Vidi sliku!



2)  $|1+2i| = \sqrt{5}$ , Da! 3)  $\bar{z} = -1-2i$ ,  $z = 0$ , itd.

## I.11.

1.  $z = \frac{i}{5(1-i)} = \frac{-1+i}{10}$ ,  $\text{Re } z = -\frac{1}{10}$ .

2. Ako stavimo  $z = a + bi$ ,  $w = c + di$  dobijemo sustav jednadžbi  $a - d = 0$ ,  $a + d = 2$ ,  $-b + c = 1$ ,  $-b - c = -1$  čije je rješenje  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$ ,  $d = 1$ , te je  $z = 1$ ,  $w = 1 + i$ .

3.  $z^2 = -2i$ ,  $z^2 i = 2$ ,  $\bar{z} = 1 + i$ ,  $w = \frac{1+i}{3-i}$ ,  $|w| = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

4.  $-7 + 24i - 18 - 24i + 25 = 0$ ; Slično se provjerava i za drugi kompleksni broj.

5.  $z = -\frac{3}{2}i$ .

6.  $x + y = 0$ .

## I.12.

1.  $z = \frac{-1}{5(1+i)} = \frac{-1+i}{10}$ ,  $\text{Im } z = \frac{1}{10}$ .

2. Ako stavimo  $z = a + bi$ ,  $w = c + di$  dobijemo sustav jednadžbi  $a - c = 1$ ,  $a + c = 3$ ,  $-b + d = 1$ ,  $b + d = 0$  čije je rješenje  $a = 2$ ,  $b = -\frac{1}{2}$ ,  $c = 1$ ,  $d = \frac{1}{2}$ , te je  $z = 2 - \frac{1}{2}i$ ,  $w = 1 + \frac{1}{2}i$ .

3.  $z^2 = 2i$ ,  $i \cdot \bar{z} = 1 + i$ ,  $w = \frac{i}{1+i}$ ,  $|w| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

4.  $-5 + 12i - 8 - 12i + 13 = 0$ . Slično se provjerava i za drugi kompleksni broj.

5.  $z = \frac{3}{2}$ .

6.  $y = -x + 1$ .

### I.13.

1.  $(1-i)^2 \cdot (1-2i)^2 \cdot (1-3i)^2 = ((1-i) \cdot (1-2i) \cdot (1-3i))^2 = (-10)^2 = 100.$

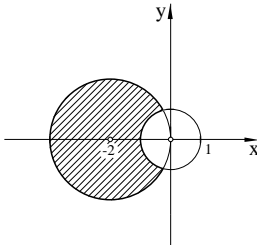
2.  $z = \frac{1+i}{5(1-i)} = \frac{1}{5}i, \operatorname{Re} z = 0.$

3. Iz sustava jednačžbi  $3x+y=2$ , i  $2x-4y=3$ , dobije se  $x = \frac{11}{14}, y = -\frac{5}{14}.$

4.  $\left(\frac{i^{77}-1}{i^{55}-1}\right)^{33} = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{33} = (-i)^{33} = -i^{33} = -i.$

5. Najprije izračunamo,  $u^2-v^2 = 3-2i, u^3+v^3 = -13i$ , pa imamo:  $|z| = \left|\frac{3-2i}{-13i}\right| = \frac{|3-2i|}{|-13i|} = \frac{\sqrt{13}}{13}.$

6. Vidi sliku!



### I.14.

1.  $(1-i)^2 \cdot (2-i)^2 \cdot (3-i)^2 = ((1-i) \cdot (2-i) \cdot (3-i))^2 = (-10i)^2 = -100.$

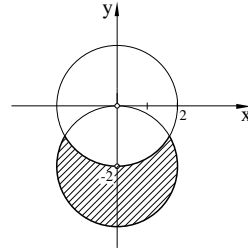
2.  $z = \frac{1-i}{5(1+i)} = -\frac{1}{5}i, \operatorname{Im} z = -\frac{1}{5}.$

3. Iz sustava jednačžbi  $3x-4y=5$ , i  $-2x+y=-2$ , dobije se  $x = \frac{3}{5}, y = -\frac{4}{5}.$

4.  $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{77} = (-i)^{77} = -i^{77} = -i.$

5. Najprije izračunamo,  $(u-v)^2 = 2i, u^3+v^3 = -9(1+i)$ , pa imamo:  $|z| = \left|\frac{2i}{-9(1+i)}\right| = \frac{|2i|}{|-9(1+i)|} = \frac{\sqrt{2}}{9}.$

6. Vidi sliku!



### I.15.

1.  $z = 1-2i, w = -3-i.$

2.  $|z| = \frac{|3-i|^3}{|2-i|^3 \cdot |1-i|^3} = \frac{(\sqrt{10})^3}{(\sqrt{5})^3 \cdot (\sqrt{2})^3} = 1.$

3.  $z_1 = 0, z_2 = i, z_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$

4.  $-2^6 = -64.$

5.  $\frac{1}{z^2 - \bar{z}} = \frac{1}{-1 - i\sqrt{3}} = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$ , te je  $\operatorname{Re} \frac{1}{z^2 - \bar{z}} = -\frac{1}{4}.$

6.  $z = (2, -1).$

### I.16.

1.  $z = 3-i, w = -1+i.$

2.  $|z| = \frac{|1+2i|^5 \cdot |1+i|^5}{|1+3i|^5} = \frac{(\sqrt{5})^5 \cdot (\sqrt{2})^5}{(\sqrt{10})^5} = 1.$

3.  $z_1 = 0, z_2 = -i, z_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$

4.  $-\frac{1}{2^6} = -\frac{1}{64}.$

5.  $\frac{1}{z^2 + zi} = \frac{9}{4 + i\sqrt{2}} = \frac{4 - i\sqrt{2}}{2}$ , te je  $\operatorname{Im} \frac{1}{z^2 + zi} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

6.  $z = (-2, 1).$