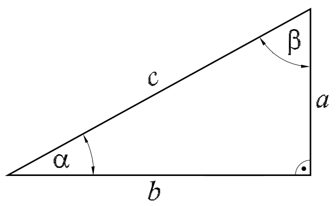
Temeljni pojmovi trigonometrije i vektorskog računa

1. Trigonometrijske funkcije

Trigonometrijske funkcije su omjeri stranica u pravokutnom trokutu. Mjerenjem je utvrđeno da međusobni omjeri stranica za jedan te isti kut daju uvijek istu vrijednost. Ta zakonitost je iskorištena da uz poznati kut i veličinu jedne stranice možemo izračunati vrijednost ostalih dviju stranica.



Sl. 1.

Omjer između katete nasuprotne oštrom kutu i hipotenuze u pravokutnom trokutu zove se *sinus* toga kuta. Prema toj definiciji za trokut na sl. 1 sinus kuta α i β je:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \qquad \sin\beta = \frac{b}{c}.$$

Omjer između katete priležeće uz oštar kut i hipotenuze u pravokutnom trokutu zove se *kosinus* dotičnog kuta. Za trokut na sl. 1 je:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}; \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}.$$

Omjer katete nasuprotne oštrom kutu i priležeće katete u pravokutnom trokutu je *tangens* kuta. Za trokut na sl. 1 tangens kuta α i β je:

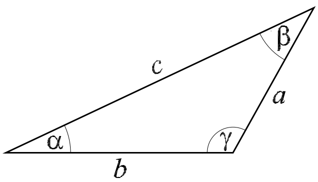
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}; \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}.$$

Postoji još funkcija kotangensa kuta, ali u praktičkim zadacima je dovoljno poznavati ove tri trigonometrijske funkcije.

$$\text{sinus kuta} = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{hipotenuza}}$$
$$\text{kosinus kuta} = \frac{\text{priležeća kateta}}{\text{hipotenuza}}$$
$$\text{tangens kuta} = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{priležeća kateta}}$$

Vrijednosti trigonometrijske funkcije za bilo koji kut mogu se očitati iz logaritamskih tablica ili pomoću džepnog kalkulatora.

Kod trokuta koji nisu pravokutni za određivanje veličine nepoznatih stranica koristi se *kosinusov* i *sinusov poučak*. Sinusov poučak se primjenjuje kada su poznati:
— 2 kuta,
— 1 stranica trokuta.
Vrijednosti drugih dviju stranica izračunaju se primjenom sinusovog poučka koji glasi: *sinusi kutova unutar bilo kakvog trokuta odnose se isto kao stranice nasuprotne tim kutovima*,tj.



Sl. 2.

$$\boxed{\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = b : c : a\,.}$$

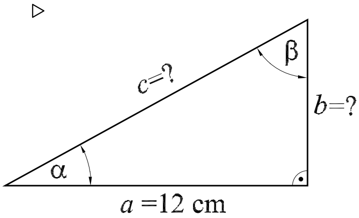
Kosinusov poučak može se primijeniti ako su poznati:
— 1 kut između nepoznatih stranica,
— 2 stranice trokuta,
a on glasi: *zbroj kvadrata nad bilo kojom stranicom jednak je zbroju kvadrata nad ostalim dvjema stranicama umanjen za dvostruki produkt tih stranica i kosinusa kuta među njima.* Za trokut na sl. 2 prema kosinusovom poučku vrijedi:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma\,.$$

Primjeri primjene trigonometrijskih funkcija

Primjer 1. U pravokutnom trokutu (sl. 3) poznat je kut $\alpha = 30^\circ$ i kateta uz kut $a = 12$ cm. Odredite veličinu katete b i hipotenuze c.

▷



Sl. 3.

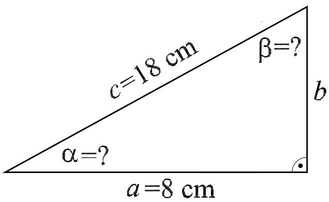
Iz $\cos\alpha = \dfrac{a}{c}$ izračuna se hipotenuza c:

$$c = \frac{a}{\cos\alpha} = \frac{12}{\cos 30^\circ} = \frac{12}{0.866} = 13.85 \text{ cm}.$$

Kateta b može se izračunati iz funkcije sinusa: $\sin\alpha = \dfrac{b}{c}$, a odatle $b = c \cdot \sin\alpha = c \cdot \sin 30^\circ = 13.85 \cdot 0.5$, $b = 6.925$ cm. ◁

Primjer 2. Koliki su kutovi α i β u pravokutnom trokutu (sl. 4) ako je kateta nasuprot kutu β $a = 8$ cm, a hipotenuza $c = 18$ cm?

▷



Sl. 4.

Iz $\cos\alpha = \dfrac{a}{c}$ izračuna se vrijednost kosinusa kuta α:

$$\cos\alpha = \frac{8}{18} = 0.44444.$$

Antilogaritmiranjem pomoću džepnog računala dobije se da vrijednost $\cos\alpha = 0.44444$ odgovara kutu:

$$\alpha = 63^\circ 36' 43''.$$

Kut β dobije se iz zbroja kutova u trokutu $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

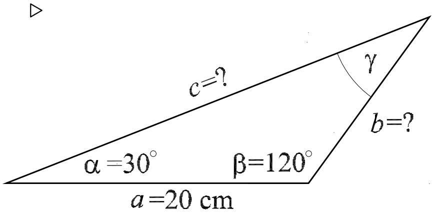
$$\alpha + \gamma = 63^\circ 36' 43'' + 90^\circ = 153^\circ 36' 43''$$

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 179^\circ 59' 60'' - 153^\circ 36' 43''$$

$$\beta = 26^\circ 23' 17''.$$ ◁

Primjer 3. U trokutu na sl. 5 treba odrediti stranice b i c ako je zadano $\alpha = 20^\circ$, $\beta = 120^\circ$ i $a = 20$ cm.

▷



Sl. 5.

Rješenje se može naći primjenom sinusovog poučka:

$$\sin\gamma : \sin\beta = a : c. \qquad (1)$$

Kut γ proizlazi iz: $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (30^\circ + 120^\circ)$, $\gamma = 30^\circ$. Rješenjem razmjera (1) dobije se:

$$\sin\gamma \cdot c = \sin\beta \cdot a \ / : \sin\gamma,$$

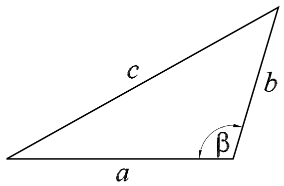
$$c = \frac{\sin\beta \cdot a}{\sin\gamma} = \frac{\sin 120^\circ \cdot 20}{\sin 30^\circ} = \frac{0.866 \cdot 20}{0.5} = 34.64 \text{ cm}.$$

Stranica b dobije se iz omjera:

$$\sin\alpha : \sin\gamma = b : a,$$
$$\sin\alpha \cdot a = \sin\gamma \cdot b \ / : \sin\gamma,$$
$$b = \frac{\sin\alpha \cdot a}{\sin\gamma} = \frac{\sin 30^\circ \cdot 20}{\sin 30^\circ} = \frac{0.5 \cdot 20}{0.5} = 20 \text{ cm.} \ \triangleleft$$

Primjer 4. Kolika je stranica c u trokutu na sl. 6 ako su poznati podaci $\beta = 135^\circ$, $a = 18$ cm, $b = 25$ cm?

$\triangleright$



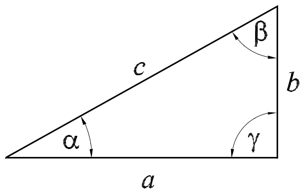
Sl. 6.

Stranica c može se izračunati primjenom kosinusovog poučka:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\beta},$$
$$c = \sqrt{18^2 + 25^2 - 2 \cdot 18 \cdot 25 \cdot \cos 135^\circ},$$
$$c = \sqrt{324 + 625 + 636.3} = 39.8 \text{ cm.} \ \triangleleft$$

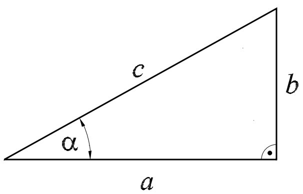
Zadaci za 1. vježbu

1. U pravokutnom trokutu prema sl. 7 treba odrediti katete a i b ako je poznata hipotenuza $c = 30$ cm i kut $\beta = 60^\circ$.
($Rj.$ $a = 25.98$ cm, $b = 15$ cm.)



Sl. 7.

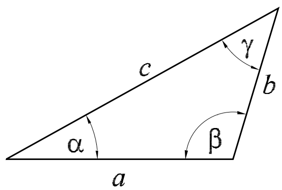
2. Kolika je hipotenuza c i kateta a u pravokutnom trokutu prema sl. 8 ako je poznata kateta $b = 12$ cm i kut $\alpha = 45^\circ$?
($Rj.$ $a = 12$ cm, $c = 16.97$ cm.)



Sl. 8.

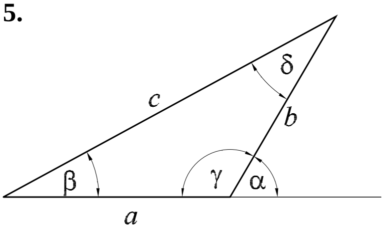
3. Koliki su kutovi α i β u pravokutnom trokutu ako je zadano $b = 8$ cm, $c = 12$ cm?
($Rj.$ $\alpha = 41^\circ 48' 37''$, $\beta = 48^\circ 11' 23''$.)

4. U trokutu prema sl. 9 treba odrediti kut β i stranice a i c ako je zadano $\alpha = 20^\circ$, $\gamma = 30^\circ$ i $b = 10$ cm.
($Rj.$ $\beta = 130^\circ$, $a = 14.6$ cm, $c = 22.39$ cm.)



Sl. 9.

5.



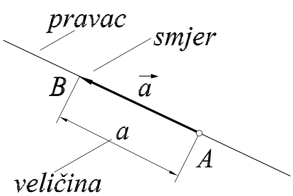
Sl. 10.

Za trokut prema sl. 10 treba izračunati stranicu c i kutove β, γ i δ ako je zadano: $\alpha = 60^\circ$, $a = 18$ cm, $b = 22$ cm.
(*Rj.* $c = 34.69$ cm, $\gamma = 120^\circ$, $\beta = 33^\circ 18' 45''$, $\delta = 26^\circ 41' 15''$.)

2. Vektori

U tehničkoj mehanici služimo se skalarima i vektorima. *Skalari* su prirodne veličine koje su određene samo svojim intenzitetom (modulom) i mogu se izraziti samo realnim brojem. Skalari su temperatura, vrijeme, snaga, radnja, masa itd., a mogu biti pozitivni i negativni brojevi.

Za neke prirodne veličine nije dovoljno poznavati samo brojčanu vrijednost, već je potrebno poznavati pravac i smjer. To su, npr., sila, moment, brzina, ubrzanje itd. Veličine koje su pored brojevne vrijednosti određene svojim pravcem i smjerom djelovanja nazivaju se *vektori*.



Sl. 11.

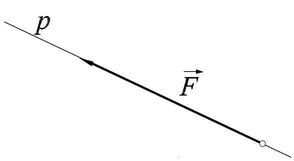
Geometrijski prikaz vektora dan je na sl. 11. Iz slike se vidi da je vektor jednoznačno određen trima veličinama:
1. pravcem,
2. intenzitetom (veličinom ili modulom),
3. smjerom.

Intenzitet vektora (dužina $\overline{AB} = a$) predočava se dužinom u određenim jedinicama u izabranom mjerilu. Npr., silu modula $F = 300$ N na njezinom pravcu djelovanja prikazali bismo kao vektor određene dužine (sl. 12) prema mjerilu:

$$M_F = \frac{100\ \text{N}}{10\ \text{mm}},$$

pa je:

$$|F| = \frac{F}{M_F} = \frac{300\ \text{N}}{\dfrac{100\ \text{N}}{10\ \text{mm}}} = \frac{10\ \text{mm} \cdot 300\ \text{N}}{100\ \text{N}} = 10\ \text{mm} \cdot 3 = 30\ \text{mm}.$$

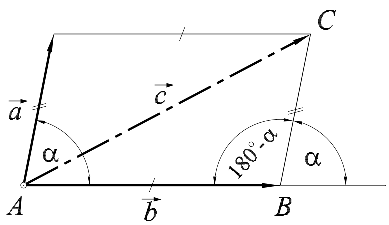


Sl. 12.

3. Vektorska algebra

Zbrajanje vektora

Geometrijski zbroj dvaju vektora jednak je dijagonali paralelograma čije su stranice zadani vektori (slika 13). Postupak se sastoji u tome da se vektor $\vec{a}$ nanese paralelno na vrh vektora $\vec{b}$, a vektor $\vec{b}$ također paralelno na vrh vektora $\vec{a}$. Dijagonala tako dobivenog paralelograma predstavlja geometrijski zbroj vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ koji je određen vektorskim jednadžbama:



Sl. 13.

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad \text{ili} \quad \vec{c} = \vec{b} + \vec{a},$$

a naziva se *rezultirajući vektor (vektor rezultante)*.

Analitički izraz za intenzitet (modul ili veličina) rezultirajućeg vektora dobije se iz trokuta ABC (sl. 13) prema kosinusovom poučku:

$$\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}},$$

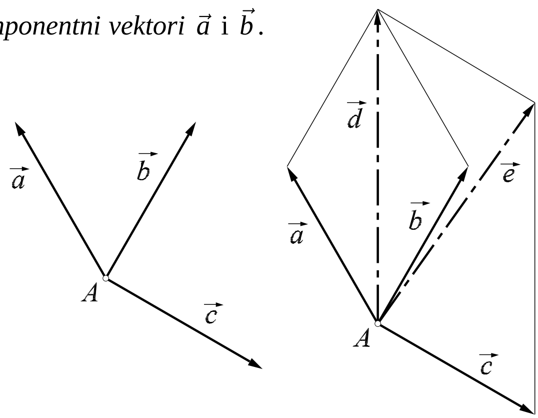
gdje je kut α kut koji zatvaraju *komponentni vektori* $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Pri zbrajanju većeg broja vektora koji leže u istoj ravnini (slika 14) postupa se po istom pravilu kao i kod geometrijskog zbrajanja dvaju vektora. Najprije se zbrajanjem vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dobije rezultirajući vektor $\vec{d}$:

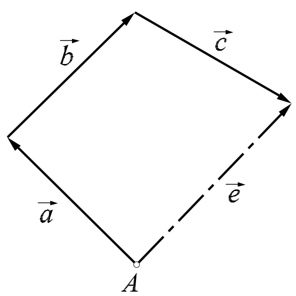
$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b},$$

a zatim se zbroji vektor $\vec{d}$ s vektorom $\vec{c}$ i dobije rezultirajući vektor $\vec{e}$, tj.:

$\vec{e} = \vec{d} + \vec{c}$ ili $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.



Sl. 14.

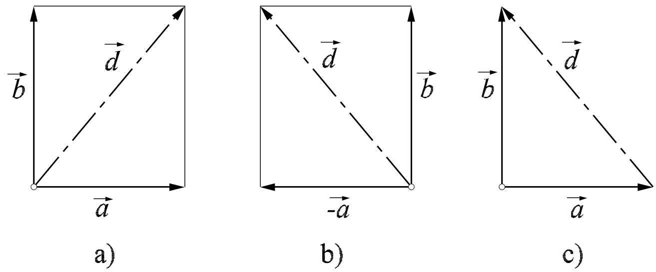


Sl. 15.

Takav postupak zbrajanja naziva se *poligon vektora*. Poligon vektora može se jednostavnije dobiti tako da se na vrh vektora $\vec{a}$ nanese paralelno vektor $\vec{b}$, a na njegov vrh paralelno vektor $\vec{c}$, sl. 15. Rezultirajući vektor $\vec{e}$ je dužina od hvatišta prvog vektora (vektor $\vec{a}$) do vrha zadnjeg vektora (vektor $\vec{c}$). Smjer rezultirajućeg vektora $\vec{e}$ uvijek se sučeljava sa smjerom zadnjeg vektora, u ovom slučaju vektora $\vec{c}$.

Oduzimanje vektora

Geometrijska razlika dvaju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zove se vektor $\vec{d}$ koji se dobije geometrijskim zbrajanjem vektora $-\vec{a}$ i $\vec{b}$ (slika 16).



Sl. 16.

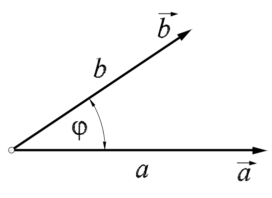
Na slici 16. a) predstavljen je geometrijski zbroj vektora, tj.

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Da se vektor $\vec{a}$ geometrijski oduzme od vektora $\vec{b}$, treba vektor $\vec{a}$ usmjeriti u suprotnu stranu, pa se dobije negativan predznak vektora $\vec{a} = -\vec{a}$ (slika 16). b). Zbrajanjem vektora $-\vec{a}$ i $\vec{b}$ dobije se rezultirajući vektor $\vec{d}$. Usporedbom slike 16. a) i 16. b) vidi se da je rezultirajući vektor $\vec{d}$ pri geometrijskom oduzimanju suprotna dijagonala paralelograma vektora od dijagonale pri geometrijskom zbrajanju. Na temelju toga može se pri geometrijskom oduzimanju dvaju vektora nacrtati rješenje kao na slici 16. c). Iz slike 16. c) vidi se da je za geometrijsko oduzimanje dvaju vektora potrebno samo spojiti njihove vrhove, te nije potrebno crtati paralelogram, pa je:

$$\vec{d} = -\vec{a} + \vec{b}.$$

Skalarni ili unutarnji produkt dvaju vektora



Sl. 17.

Oznaka skalarnog produkta je: $(\vec{a} \cdot \vec{b})$ ili jednostavno $\vec{a}\vec{b}$, pri čemu se uvijek ima na umu da je to *skalar*. Pod *skalarnim produktom dvaju vektora* razumijeva se umnožak duljine tih vektora i kosinusa kuta između njih.

Prema sl. 17. skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je:

$$\vec{a}\vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\varphi.$$

Skalarni produkt može biti i negativan, i to kada kut što ga međusobno zatvaraju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ leži u II. i III. kvadrantu.

Posebni slučajevi:

1. *Vektori su međusobno okomiti*: $\vec{a} \perp \vec{b}$, tj. $\varphi = 90^\circ$, tada je:

$$\vec{a}\vec{b} = ab\cos 90^\circ = a \cdot b \cdot 0 = 0.$$

Vrijednost skalarnog produkta međusobno okomitih vektora jednaka je nuli.

2. *Vektori su međusobno kolinearni*, što znači da su međusobno paralelni ili leže na istom pravcu i neka su istog smjera: $\vec{a}\|\vec{b}$, $\varphi = 0°$, tada je:

$$\vec{a}\vec{b} = ab\cos 0° = a \cdot b \cdot 1 = a \cdot b.$$

Vrijednost skalarnog produkta dvaju paralelnih vektora istog smjera jednaka je umnošku njihovih duljina. Ako su kolinearni vektori suprotnog smjera, tj. $\varphi = 180°$, tada je:

$$\vec{a}\vec{b} = ab\cos 180° = a \cdot b \cdot (-1) = -a \cdot b,$$

što znači da je njihov produkt jednak negativnoj vrijednosti njihovih duljina.

Svojstva skalarnog produkta:

1. *zakon komutacije*: $\vec{a}\vec{b} = a \cdot b\cos\varphi = b \cdot a\cos\varphi = \vec{b}\vec{a}$;
2. *zakon distribucije*: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$.

Vektorski ili vanjski produkt dvaju vektora

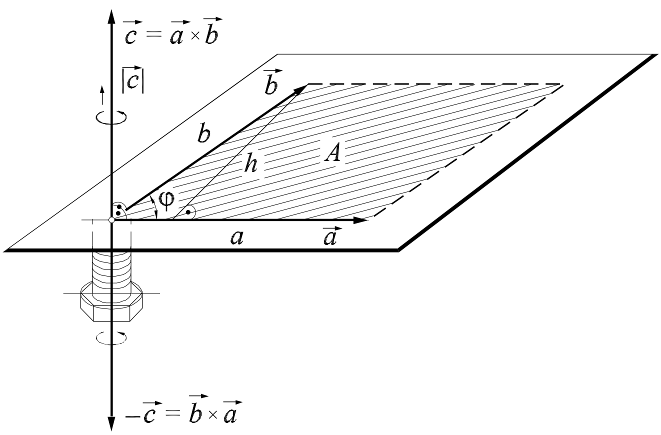
Vektorski produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ označava se s:

$$[\vec{a}\,\vec{b}] \quad \text{ili} \quad \vec{a} \times \vec{b},$$

pri čemu se uvijek ima na umu da je to *vektor*.

Vektorski produkt dvaju vektora daje novi vektor. Npr., vektorski produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ prema slici 18 dat će novi vektor $\vec{c}$, pa je:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}.$$



Sl. 18.

Pokazat ćemo što je veličina ili modul, pravac i smjer novog vektora $\vec{c}$.

— *Veličina* ili *modul vektora* $\vec{c}$ jednaka je površini paralelograma A (sl. 18), koja iznosi:

$$\boxed{|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b\sin\varphi.}$$

— *Pravac* je okomit na ravninu koju određuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (šrafirani paralelogram, sl. 18).

— *Smjer* je određen po *pravilu desnog vijka* (slika 18), odnosno pomoću *pravila desne ruke*. Okretanjem desnog vijka udesno (smjer kazaljke na satu) vijak će se kretati prema gore, čime je određen smjer vektora $\vec{c}$. Po pravilu desne ruke smjer se određuje tako da dlan predstavlja ravninu ili površinu A, palac pravac vektora $\vec{a}$, kažiprst pravac vektora $\vec{b}$, a uzdignuti preostali prsti pravac i smjer vektora $\vec{c}$.

Svojstva vektorskog produkta:

1. za vektorski produkt *ne vrijedi zakon komutacije*, jer se promjenom mjesta vektora dobije ista veličina i pravac novog vektora, ali je smjer suprotan (sl. 18), tj.:

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{c}.$$

Treba upamtiti da *pri promjeni mjesta faktora vektorski produkt mijenja predznak*.

2. za vektorski produkt dvaju vektora vrijedi *zakon distribucije*, tj.:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

Posebni slučajevi:

1. *Vektori su međusobno okomiti*: $\vec{a} \perp \vec{b}$, tj. $\varphi = 90^\circ$ ili $\varphi = 270^\circ$, tada je:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin 90^\circ = a \cdot b \cdot 1 = a \cdot b,$$

tj. veličina vektorskog produkta $\vec{a} \times \vec{b}$ u tom je slučaju jednaka umnošku njihovih duljina.

2. *Vektori su međusobno kolinearni*: $\vec{a} \| \vec{b}$, tj. $\varphi = 0^\circ$ ili $\varphi = 180^\circ$, tada je:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin 0^\circ = a \cdot b \cdot 0 = 0.$$

Vektorski produkt jednak je nuli, što je nužan i dovoljan uvjet da vektori budu kolinearni.

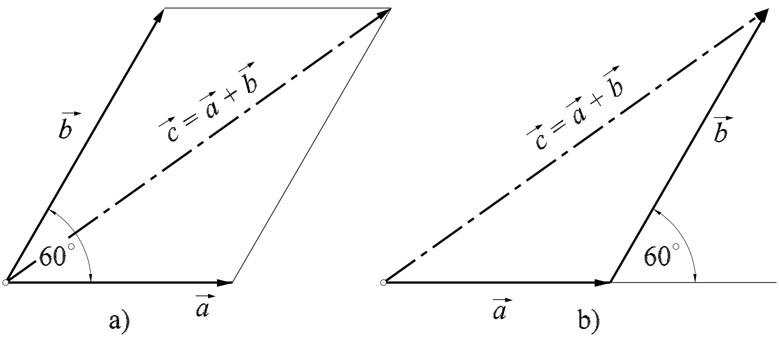
Primjeri iz vektorske algebre

Primjer 1. Treba odrediti modul rezultirajućeg vektora $\vec{c}$ ako su komponentni vektori $\vec{a} = 3$ cm, $\vec{b} = 4$ cm, a kut među njima $\alpha = 60^\circ$.

▷ Rezultirajući vektor $\vec{c}$ može se dobiti zbrajanjem vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ po pravilu paralelograma (sl. 19. a)) i trokuta vektora (sl. 19. b)).

Veličina ili modul rezultirajućeg vektora $\vec{c}$ dobije se primjenom kosinusovog poučka:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 0.5} = 6 \text{ cm}.$$

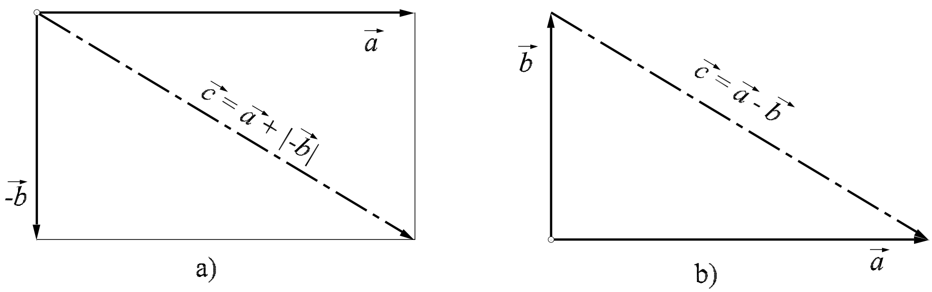


Sl. 19.

◁

Primjer 2. Oduzimanjem vektora $\vec{a}$, $a = 5$ cm i vektora $\vec{b}$, $b = 3$ cm treba naći rezultirajući vektor. Kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ iznosi $\alpha = 90°$.

▷ Zadatak se opet može riješiti primjenom paralelograma (sl. 20. a)) i trokuta vektora (sl. 20. b)).



Sl. 20.

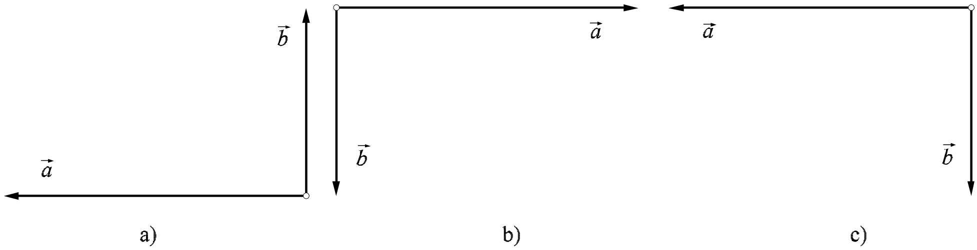
Veličina ili modul rezultirajućeg vektora $\vec{c}$ dobije se primjenom Pitagorinog poučka, jer vektori čine pravokutan trokut:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = 5.8 \text{ cm}. \quad \triangleleft$$

Zadaci za 2. vježbu

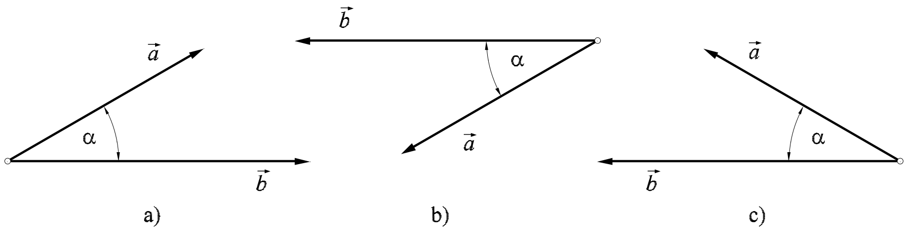
Za komponente vektora prema slikama 21, 22 i 23 treba naći rezultirajući vektor $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ grafičkim postupkom, primjenom paralelograma i trokuta vektora i analitičkim postupkom.

1. $\vec{a} = 4$ cm, $\vec{b} = 2.5$ cm. *Uputa.* Skalarna veličina vektora $\vec{d}$ može se dobiti primjenom Pitagorinog poučka. (*Rj.* $d = 4.71$ cm.)



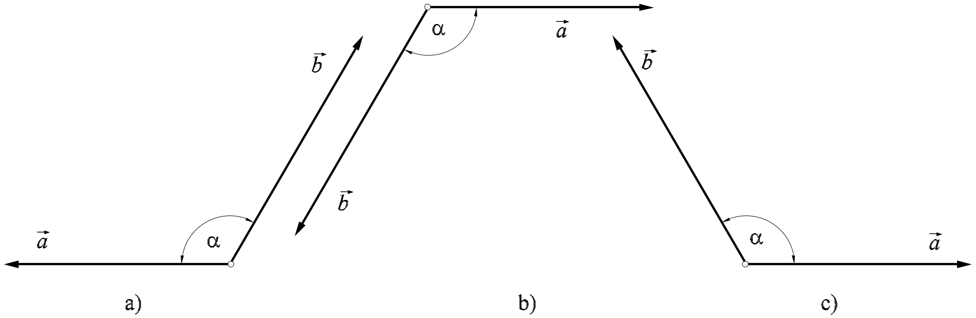
Sl. 21.

2. $\vec{a} = 3$ cm, $\vec{b} = 4$ cm, $\alpha = 30^\circ$. *Uputa.* Skalarna veličina vektora $\vec{d}$ dobije se primjenom kosinusovog poučka. (*Rj.* $d = 6.76$ cm.)



Sl. 22.

3. $\vec{a} = 3$ cm, $\vec{b} = 3.5$ cm, $\alpha = 120^\circ$. *Uputa.* Skalarna veličina vektora $\vec{d}$ dobije se primjenom kosinusovog poučka. (*Rj.* $d = 3.27$ cm.)



Sl. 23.

* * *

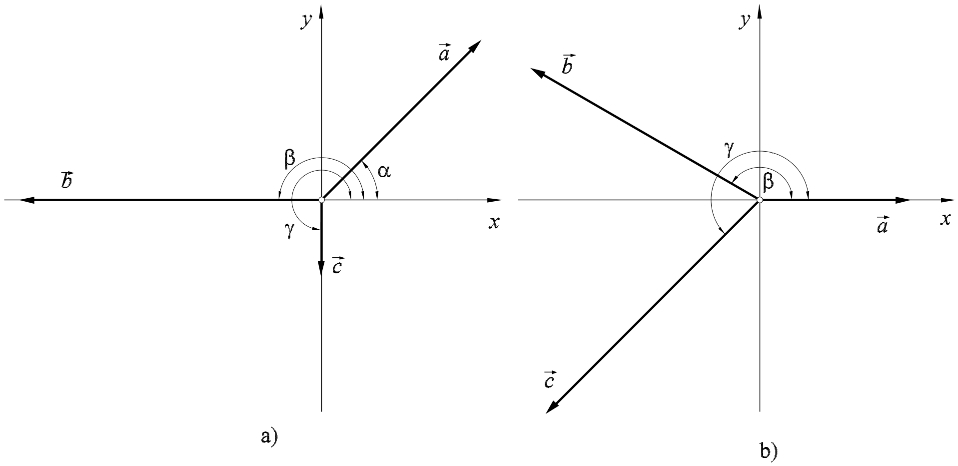
4. Zbroji komponente vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ prema sl. 24 primjenom poligona vektora ako je:

a) $\vec{a} = 3\,\text{cm}$, $\vec{b} = 4\,\text{cm}$, $\vec{c} = 1\,\text{cm}$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 180^\circ$, $\gamma = 270^\circ$;

b) $\vec{a} = 2\,\text{cm}$, $\vec{b} = 3.5\,\text{cm}$, $\vec{c} = 4\,\text{cm}$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 225^\circ$.

Uputa. Rezultirajući vektor $\vec{d}$ dobije se geometrijskim zbrajanjem komponentnih vektora ($\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$) pomoću poligona vektora.

(*Rj.* a) $|\vec{d}| = 2.18\,\text{cm}$, $\delta = 149^\circ 10' 48''$; b) $\vec{d} = 4\,\text{cm}$, $\delta = 195^\circ 36' 27''$.)



Sl. 24.