1. Realni brojevi

1.1. Skupovi brojeva

Upitamo li nekoga, tko nije matematičar, ili mu barem matematika nije osobito bliska, čime se bavi ta znanost, vjerojatno će odgovoriti — *brojevima*. Premda odgovor baš i nije točan, on nije neobičan, jer prva iskustva s matematikom u svakog su čovjeka vezana uz brojeve i računanje. A i ne baš tako davno matematičke su se početnice zvale *Računice*.

Osnovna svojstva skupova prirodnih, cijelih, racionalnih i realnih brojeva poznata su nam iz osnovne škole.

Prirodni i cijeli brojevi

Prirodnim se brojevima služimo kad brojimo ili prebrojavamo. Prirodni će broj biti odgovor na pitanje: *koliko članova ima neki konačni skup?*

Skup prirodnih brojeva

Skup **prirodnih brojeva** označavamo s $\mathbf{N}$.

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., n, ...\}.$$

Svaka se dva prirodna broja m i n mogu *usporediti prema veličini*, pri čemu je ispunjena točno jedna od sljedećih mogućnosti:

$m < n$ (broj m je *manji* od broja n);
$m = n$ (broj m je *jednak* broju n);
$m > n$ (broj m je *veći* od broja n).

U skupu prirodnih brojeva postoji najmanji broj, to je broj 1. Ne postoji najveći prirodni broj; *od ma kako velikog prirodnog broja postoji još veći.* Iz ove činjenice proistječe da je *skup prirodnih brojeva beskonačan.*

Neka je n po volji odabran prirodni broj. Onda je sljedeći po redu prirodni broj $n+1$ koji nazivamo **sljedbenikom** broja n. Taj je broj veći od broja n. Ako je $n > 1$, onda je broj $n-1$ **prethodnik** broja n. Dakle, svaki prirodni broj ima svog sljedbenika, i svi prirodni brojevi veći od 1 imaju svog prethodnika.

Tek prije otprilike 500 godina ljudi su došli na ideju da se postupak brojanja *unatrag*: 3, 2, 1 može nastaviti brojem 0, i *negativnim brojevima* -1, pa -2, pa -3 itd. Negativnim brojevima danas prikazujemo npr. temperaturu ispod ništice, visinu vodostaja manju od uobičajene, knjigovodstveni manjak u računovodstvu itd.

U skupu prirodnih brojeva definirane su operacije zbrajanja i množenja, o čemu ste učili tijekom osnovne škole. Zbroj prirodnih brojeva prirodni je broj. Umnožak prirodnih brojeva također je prirodni broj. Zato kažemo da je skup prirodnih brojeva **zatvoren** s obzirom na zbrajanje i množenje.

No razni praktični problemi nametnuli su potrebu za uvođenjem računskih operacije suprotnih zbrajanju i množenju, operacija *oduzimanja* i *dijeljenja*.

Znamo da razlika $a-b$ dvaju prirodnih brojeva a i b nije uvijek prirodni broj, skup prirodnih brojeva *nije zatvoren* s obzirom na oduzimanje. Ta je razlika općenito **cijeli broj**.

Skup cijelih brojeva

Skup cijelih brojeva označavamo sa $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\}$$

Skup cijelih brojeva je zatvoren s obzirom na zbrajanje, množenje i oduzimanje. Drugim riječima, zbroj, umnožak i razlika svaka dva cijela broja cijeli je broj.

Skup cijelih brojeva nije zatvoren s obzirom na dijeljenje, računsku operaciju obrnutu množenju; količnik dvaju cijelih brojeva nije uvijek cijeli broj. Zbog toga uvodimo i opet nove brojeve, to su *razlomci* ili **racionalni brojevi**.

Racionalni i iracionalni brojevi

Količnici cijelih brojeva poput $\frac{3}{5}$, $\frac{-13}{7}$, $\frac{2}{-11}$ su **racionalni brojevi**. Količnik bilo koja dva cijela broja racionalni je broj. Pritom moramo isključiti dijeljenje nulom, jer se nulom ne smije dijeliti.

Skup racionalnih brojeva

Skup **racionalnih brojeva** označavamo s $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \ :\quad a, b \in \mathbf{Z}, \quad b \neq 0. \right\}$$

Trebamo li poznavati brojeve općenitije od racionalnih? I na ovo pitanje znamo odgovor otprije.

Primjer 1. $\sqrt{2}$ **nije racioanlan broj.** Prema Pitagorinu poučku, ako je duljina stranice kvadrata jednaka 1, duljina njegove dijagonale iznosi $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

Kad bi $\sqrt{2}$ bio racionalan broj, značilo bi da ga možemo prikazati u obliku razlomka $\frac{m}{n}$, gdje su m i n prirodni brojevi (jer je $\sqrt{2}$ pozitivan broj). *Možemo pretpostaviti da m i n nisu oba parna.* U suprotnom bismo ih kratili s 2, dok barem jedan od njih ne bi bio neparan.

Kvadriranjem jednakosti $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$ dobijemo $2=\frac{m^2}{n^2}$, odnosno, $m^2=2n^2$. Zaključujemo: m^2 je paran broj. No, onda je i m paran. (Zašto?) *Dakle je n neparan.*

Zapišimo $m=2k$, $k\in\mathbf{N}$, pa je $4k^2=2n^2$, odnosno $n^2=2k^2$, odakle slijedi da je n^2, pa time i *n paran broj*.

No, prirodni je broj n ili paran, ili je neparan; ne može biti i jedno i drugo. Do ovog proturječnog zaključka dovela nas je pretpostavka da je $\sqrt{2}$ racionalan broj. Ta je pretpostavka dakle bila kriva, broj $\sqrt{2}$ nije racionalan. ◁

Zadatak 2. Dokaži da broj $\sqrt{3}$ nije racionalan broj.

Brojeve koji nisu racionalni, poput $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ili π, nazivamo **iracionalnim**.

Decimalni zapis racionalnog broja

Racionalni su brojevi količnici cijelih brojeva. Zapisujemo ih u obliku razlomaka. No, ako bismo proveli razlomkom naznačeno dijeljenje, dobili bismo prikaz istog racionalnog broja u **decimalnom zapisu**.

Tako je primjerice:

$$-\frac{1}{2}=-1:2=-0.5; \qquad \frac{3}{4}=3:4=0.75;$$
$$-\frac{5}{8}=-5:8=-0.625; \qquad \frac{55}{128}=55:128=0.4296875,$$

i tako dalje.

Broj π nije racionalan broj.

Broj π, koji je jednak omjeru opsega i promjera svakog kruga, jedan je od najpoznatijih brojeva.

Još od davnina pretpostavljalo se da π nije racionalan. Ova, naoko jednostavna činjenica dokazana je tek u XVIII. stoljeću, a njezin je dokaz vrlo složen te ga ne možemo ovdje izložiti.

Približna vrijednost broja π je 3.14, ili točnije (očitano s džepnog računala) 3.141592654. Njegova još točnija vrijednost, ali dakako također približna, je:

3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510
58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679
82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582 23172 53594 08128
48111 74502 84102 70193 85211 05559 64462 29489 54930 38196
44288 10975 66593 34461 28475 64823 37867 83165 27120 19091

Svi su navedeni primjeri **konačni decimalni brojevi**. Znademo dakako i za drukčije primjere:

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{7} &= 3 : 7 = 0.428571428571428571\ldots;\\
\frac{1}{3} &= 1 : 3 = 0.333333333333333\ldots;\\
-\frac{10}{11} &= -10 : 11 = -0.9090909090909090\ldots;\\
\frac{26}{111} &= 26 : 111 = 0.234234234234234\ldots.
\end{aligned}
$$

Ovdje je riječ o racionalnim brojevima čiji je decimalni prikaz **beskonačan decimalni broj**.

Ako je decimalni zapis racionalnog broja beskonačan, onda možemo uočiti kako se skupina znamenki uzastopce ponavlja. U prvom primjeru tu skupinu čini šest znamenki, u drugom samo jedna, u trećem dvije, u četvrtom tri.

Kažemo da su ti decimalni brojevi **beskonačni i periodski.** Skupinu znamenki koja se iza decimalne točke ponavlja zovemo **period.**

Pri zapisu beskonačnih periodskih decimalnih brojeva nad prvom i posljednjom znamenkom perioda stavljamo točkicu:

$$
\frac{3}{7} = 0.\dot{4}2857\dot{1}; \quad \frac{1}{3} = 0.\dot{3}; \quad -\frac{10}{11} = -0.\dot{9}\dot{0}; \quad \frac{26}{111} = 0.\dot{2}3\dot{4}.
$$

Zbog čega pri decimalnom zapisu racionalnog broja dolazi do ponavljanja skupine znamenki? Odgovor na ovo pitanje bit će sasvim jasan provedete li pismeno dijeljenje (ne dijeljenje džepnim računalom ili bilo kakvim sličnim pomagalom) brojnika i nazivnika u danom razlomku:

$$
\begin{array}{l}
26 : 111 = 0.234\\
260\\
\;\;380\\
\;\;\;\;470\\
\;\;\;\;\;\;26
\end{array}
$$

U ovom trenutku došli smo do početne pozicije. Ako nastavimo dijeljenje, ponavljat će se niz znamenaka 234.

Bez obzira je li decimalni zapis nekog racionalnog broja konačan ili beskonačan, taj je zapis *potpuno poznat* i može mu se odrediti bilo koja njegova znamenka.

Primjer 3. Koja je znamenka na 1001. mjestu iza decimalne točke u decimalnom zapisu broja $\frac{3}{7}$?

Kad će decimalni prikaz racionalnog broja biti konačan, a kad beskonačan periodski? To ovisi samo o nazivniku racionalnog broja! Ako su njegovi jedini faktori brojevi 2 i 5, tad je decimalni prikaz konačan. Ima li nazivnik ijedan faktor različit od 2 ili 5, njegov je decimalni prikaz beskonačan.

▷ Vidjeli smo da je $\dfrac{3}{7} = 0.\dot{4}2857\dot{1}$, tj. uzastopce se ponavlja 6 znamenki.

Podijelimo li 1001 sa 6, dobit ćemo količnik 166 i ostatak 5. Stoga će se skupina od 6 navedenih znamenki izredati 166 puta i potom će slijediti još pet znamenki. Zaključujemo kako je 1001. po redu znamenka 7. ◁

Pretvaranje decimalnog prikaza u standardni zapis

Vidjeli smo kako racionalne brojeve možemo prevesti iz oblika razlomka u decimalni broj. Valja nam samo provesti dijeljenje cijelih brojeva što su u brojniku i nazivniku razlomka. Ni to nije uvijek lako jer ponekad to može biti i podulji račun.

Kako ćemo obaviti obratan postupak, racionalni broj zapisan u obliku beskonačnog decimalnog broja zapisati u obliku razlomka?

Navedimo primjere:

Primjer 4. Zapišimo u obliku razlomka brojeve **a)** $0.\dot{7}\dot{2}$; **b)** $-44.\dot{7}1428\dot{5}$.

▷ Neka je $x = 0.\dot{7}\dot{2}$. Tada je

$$100x = 72.\dot{7}\dot{2} = 72 + 0.\dot{7}\dot{2} = 72 + x$$

Odavde imamo $99x = 72$, te je $x = \dfrac{72}{99} = \dfrac{8}{11}$.

S drugim brojem imat ćemo nešto više posla:

Neka je $x = 0.\dot{7}1428\dot{5}$. Tada je

$$10^6 \cdot x = 714285.\dot{7}1428\dot{5} = 714285 + x.$$

Sad imamo: $(10^6 - 1)x = 714285$, te je $x = \dfrac{714285}{10^6 - 1}$.

Može li se ovaj razlomak skratiti? U nazivniku se nalazi broj

$$999\,999 = 9 \cdot 111\,111 = 9 \cdot 111 \cdot 1001 = 27 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13.$$

Probom utvrđujemo da se brojnik može kratiti s $27 \cdot 37 \cdot 11 \cdot 13$ pa je konačno $-44.\dot{7}1428\dot{5} = -44\frac{5}{7}$. Da nismo skratili razlomak, dobili bismo također istinit zapis $-44.\dot{7}1428\dot{5} = -44\frac{714285}{999999}$. ◁

Realni brojevi

Ranije smo već spominjali primjere iracionalnih brojeva, kao što su

$$\sqrt{2} = 1.414273562\cdots,$$
$$\pi = 3.141592654\cdots.$$

I to su beskonačni decimalni brojevi, no bitno različiti od prethodnih, racionalnih. Uočavate li tu razliku? U čemu se ona sastoji?

U decimalnom zapisu brojeva kao što su $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ili π *ne nailazimo ni na kakve pravilnosti*. Takve brojeve nazivamo **iracionalnim**. U decimalnom zapisu iracionalnih brojeva nema periodičnosti, tj. ponavljanja skupine znamenaka. Na temelju ma koliko početnih znamenaka u tom prikazu ne možemo predvidjeti niti prvu sljedeću znamenku!

Skup iracionalnih brojeva označavamo s $\mathbf{I}$.
Napišemo li po volji odabran decimalni broj:

$$4.44, \quad 3.1010010001\cdots, \; -5.213648260630034\cdots$$

(znamenke se u posljednja dva primjera nastavljaju u beskonačnost i ne ponavljaju se periodski), tad ćemo dobiti decimalni zapis iracionalnog broja. Iracionalne i racionalne brojeve jednim imenom nazivamo **realni brojevi**.

Skup realnih brojeva

Skup realnih brojeva $\mathbf{R}$ sastoji se od racionalnih i iracionalnih brojeva. Svaki realni broj a možemo prikazati u (konačnom ili beskonačnom) decimalnom prikazu:

$$a = \pm a_0.a_1a_2a_3\ldots$$

pri čemu je a_0 prirodan broj ili nula, a a_1, a_2, $a_3\ldots$ neke od znamenaka 0, 1,. . . , 9.

Zadaci 1.1.

1. **1)** Zapiši prirodni broj koji neposredno slijedi iza prirodnog broja n.
2) Zapiši prirodni broj koji neposredno prethodi prirodnom broju $n-2$. Kad zadatak ima rješenje?
3) Zapiši broj koji je za 2 veći od zbroja brojeva m i n.
4) Zapiši broj koji je dvostruko veći od razlike brojeva a i b.
5) Zapiši broj koji je tri puta manji od umnoška brojeva a i b.

2. Ispiši:
1) sve cijele brojeve koji su između cijelih brojeva $k-1$ i $k+5$;
2) sve neparne cijele brojeve koji su veći od $2k-1$ i manji od $2k+7$, gdje je k cijeli broj;
3) sve parne cijele brojeve veće od $2k-5$ i manje od $2k+1$, gdje je k cijeli broj.

3. Kolika je razlika zbroja prvih 100 parnih i prvih 100 neparnih prirodnih brojeva?

4. Izračunaj:
1) $1+2+3+\ldots+55$; **2)** $1+3+5+\ldots+101$;
3) $2+4+6+\ldots+100$; **4)** $50+51+52+\ldots+101$;
5) $20+22+24+\ldots+60$; **6)** $11+13+15+\ldots+111$;
7) $1+4+7+10+\ldots+100$; **8)** $1+5+9+13+\ldots+101$.

5. Odredi četiri uzastopna prirodna broja čiji je zbroj jednak $1\,258$.

6. Zbroj pet uzastopnih parnih prirodnih brojeva jednak je $6\,080$. Koji su to brojevi?

7. Zbroj sedam uzastopnih neparnih prirodnih brojeva jednak je 581. Koji su to brojevi?

8. Koja je posljednja znamenka umnoška $1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot 99$?

9. S koliko nula završava umnožak $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 33$?

10. Ako svaki od n pribrojnika povećamo za isti broj k, kako će se promijeniti zbroj?

11. Ako svaki od n pribrojnika pomnožimo istim, od nule različitim brojem k, kako se promijeni zbroj?

12. Provjeri jesu li sljedeći brojevi treće potencije nekog prirodnog broja:
1) $3^3+4^3+5^3$; **2)** $1^3+6^3+8^3$; **3)** $3^3+10^3+18^3$;
4) $14^3+23^3+70^3$; **5)** $11^3+12^3+13^3+14^3$.

* * *

13. Razlomke $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{15}{16}$ prikaži u obliku decimalnog broja.

14. Brojeve 0.5, 0.25, 0.125, 0.75, 0.625 prikaži u obliku razlomka.

15. Odredi period u decimalnom zapisu racionalnog broja:

1) $\frac{5}{6}$; **2)** $\frac{3}{11}$; **3)** $\frac{5}{13}$; **4)** $\frac{6}{7}$.

16. Koja se znamenka nalazi na 101. mjestu iza decimalne točke u decimalnom zapisu svakog od četiriju brojeva iz prethodnog zadatka?

17. U decimalnom zapisu sljedećih brojeva odredi period:

1) $\frac{5}{6}$; **2)** $\frac{4}{11}$; **3)** $\frac{22}{7}$; **4)** $\frac{12}{13}$; **5)** $\frac{1}{111}$.

18. Odredi 303. znamenku u decimalnom zapisu broja $\frac{15}{37}$.

19. Odredi 777. znamenku u decimalnom zapisu broja $-\frac{111}{11}$.

20. Odredi 1500. znamenku u decimalnom zapisu broja $\frac{3}{13}$.

21. Zapiši u obliku razlomka brojeve:

1) $0.6\dot{8}\dot{1}$; **2)** $3.8\dot{5}\dot{4}$; **3)** $-123.\dot{2}46\dot{7}$; **4)** $4.55\dot{4}3\dot{2}$.

* * *

22. Koji su od sljedećih brojeva racionalni:

$$-\frac{11}{15},\ \sqrt{17},\ \frac{\pi}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ 5,\ \frac{5}{\sqrt{5}},\ -444\ ?$$

23. Između kojih dvaju uzastopnih cijelih brojeva se nalaze sljedeći brojevi:

$$\sqrt{117},\ \ -\sqrt{515},\ \ \frac{5\pi}{3},\ \ -\sqrt{77},\ \ \sqrt{777}\ \ -15\pi\ \ ?$$

24. Napiši nekoliko iracionalnih brojeva koji su veći od broja 0.11, a manji od broja 0.12.

25. Arhimed je dao približne vrijednosti broja π smjestivši ga između dva racionalna broja: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. U XVI. stoljeću Nizozemac Adrianus Metius našao je još jednu dobru približnu vrijednost broja π, iskazao ju je razlomkom $\frac{355}{113}$ (što su Kinezi poznavali gotovo tisuću godina ranije!). Usporedi na ovaj način dobivene približne vrijednosti broja π s prije navedenim.

1.2. Operacije sa skupovima

Pojam skupa

Govorili smo dosad o *skupu* prirodnih brojeva, *skupu* racionalnih brojeva... Što je to *skup*? Poput drugih temeljnih pojmova (npr. broja, točke, pravca i sl.) taj se pojam *ne definira*, jer ga je teško raščlaniti na jednostavnije pojmove, pa to nećemo ni pokušavati. Zadovoljit ćemo se dogovorom da je *skup određen ako je dobro definiran zakon prema kojem određujemo njegove elemente*. Tako npr. skup "svih učenika u vašem razredu" je dobro definiran. Međutim, skup "svih visokih učenika u vašem razredu" nije dobro definiran, jer nam je nepoznat kriterij "biti visok".

Označimo s A skup *neparnih prirodnih brojeva manjih od* 10. Taj je skup dobro definiran, jer za svaki zadani broj znamo odrediti pripada li mu ili ne. Zapisujemo ga ovako, navodeći njegove elemente:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\},$$

ili na ovaj način:

$$A = \{n : n \in \mathbf{N} \text{ je neparan}, n < 10\}.$$

Broj 7 pripada ovom skupu, pišemo $7 \in A$. (Čitaj: 7 *je element* skupa A, ili, 7 pripada skupu A.) Broj 6 mu ne pripada. Pišemo $6 \notin A$.

Neka je $B = \{3, 5, 9\}$. Svaki element skupa B pripada skupu A. Kažemo onda da je B *podskup* skupa A i pišemo $B \subseteq A$. Ako skup A sadrži barem jedan element koji *ne pripada* skupu B, onda kažemo da je B *pravi podskup* skupa A i pišemo $B \subset A$. U ovom je primjeru, dakle, $B \subset A$.

Tako je primjerice (obrazloži!)

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

Neka je sada

$$A = \{n \in \mathbf{N} : n \text{ je paran}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\},$$
$$B = \{n \in \mathbf{N} : n \text{ je djeljiv s } 3\} = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}.$$

Za ove skupove ne vrijedi ni $A \subseteq B$ ni $B \subseteq A$. Međutim, ovi skupovi ipak imaju neke zajedničke elemente, to su brojevi 6, 12, 18 itd, tj. brojevi djeljivi sa 6.

Presjek skupova

Presjek skupova A i B je skup $A \cap B$, koji sadrži zajedničke elemente ovih dvaju skupova:

$$A \cap B = \{x : x \in A \quad \text{i} \quad x \in B\}.$$

Za prije navedene skupove je presjek:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{n \in \mathbf{N} : n \text{ je djeljiv s } 2 \text{ i s } 3\} \\ &= \{n \in \mathbf{N} : n \text{ je djeljiv sa } 6\} \\ &= \{6, 12, 18, 24, \ldots\}. \end{aligned}$$

Zadatak 1. U skupu svih četverokuta u ravnini izdvojimo podskupove: $A =$ { skup svih paralelograma }, $B =$ { skup svih pravokutnika }, $C =$ { skup svih rombova }, $D =$ { skup svih deltoida }. $E =$ { skup svih kvadrata }, Što predstavljaju skupovi $A \cap B$, $A \cap D$, $B \cap C$, $B \cap D$?

* * *

Svaki se parni broj može napisati u obliku $2k$, gdje je k cijeli broj. Zato je skup svih parnih cijelih brojeva:

$$A = \{n : n = 2k,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

Oduzmemo li parnom broju 1, dobit ćemo neparan broj. I obratno, svaki neparni broj je oblika $2k - 1$. Skup svih neparnih cijelih brojeva je:

$$B = \{n : n = 2k - 1,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

Ova dva skupa nemaju zajedničkih elemenata. Za njih kažemo da su **disjunktni**. Njihov presjek $A \cap B$ je **prazan**. Pišemo: $A \cap B = \emptyset$. $\emptyset$ je oznaka za **prazan skup**, skup koji nema nijednog elementa.

S druge strane, svaki je cijeli broj bilo paran bilo neparan. To znači da se svaki cijeli broj nalazi ili u skupu A ili u skupu B. Kažemo da je **unija** skupova A i B jednaka skupu cijelih brojeva. Općenitije, definiramo:

Unija skupova

Unija skupova A i B je skup $A \cup B$, koji sadrži one elemente koji se nalaze u barem jednom od ova dva skupa:

$$A \cup B = \{x : x \in A \quad \text{ili} \quad x \in B\}.$$

Primjer 2. Neka je $C = \{1, 2, 4, 7, 9\}$, $D = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Onda vrijedi

$$C \cap D = \{2, 4, 7\}, \qquad C \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}. \quad \triangleleft$$

Primjer 3. Za skupove brojeva vrijedi: $\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset$, $\mathbf{Q} \cup \mathbf{I} = \mathbf{R}$. $\triangleleft$

Zadatak 4. Na primjeru skupova $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 5, 6, 9\}$ $C = \{5, 6, 7, 8, 10\}$ uvjeri se da vrijede sljedeći identiteti:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

* * *

Upoznajmo i treću operaciju među skupovima:

Razlika skupova

Razlika skupova A i B je skup $A \setminus B$, koji sadrži sve elemente skupa A koji ne pripadaju skupu B:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \quad \text{i} \quad x \notin B\}.$$

Primjer 5. Neka je $A = \{1, 2, 4, 7\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $C = \{2, 4, 7\}$. Onda vrijedi

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{1, 7\}, & A \setminus C &= \{1\}, \\ B \setminus A &= \{3, 5, 6\}, & B \setminus C &= \{3, 5, 6\}, \\ C \setminus A &= \emptyset, & C \setminus B &= \{7\}, \quad \triangleleft \end{aligned}$$

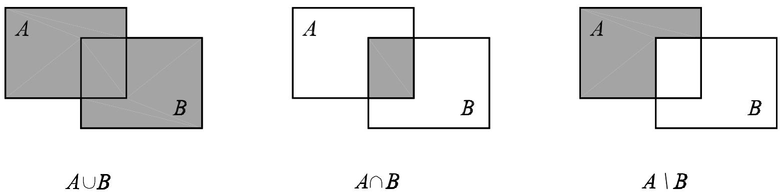
Razlika $C \setminus A$ je prazan skup, jer je $C \subseteq A$.

Zadatak 6. Na primjeru skupova $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 5, 6, 9\}$ $C = \{5, 6, 7, 8, 10\}$ uvjeri se da vrijede sljedeći identiteti:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C), \qquad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

* * *

Uniju, presjek i razliku dvaju skupova prikazujemo shematski **Euler-Vennovim** dijagramima:

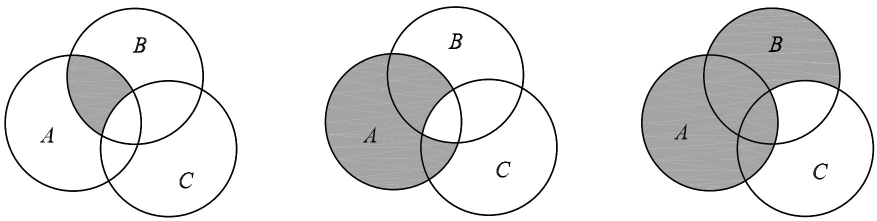


Sl. 1.1. Unija dvaju skupova (lijevo), presjek (u sredini) i razlika (desno).

Primjer 7. Ilustrirajmo na Euler-Vennovim dijagramima skupove

1) $(A \cap B) \setminus C$; **2)** $A \setminus (B \cap C)$; **3)** $A \cup (B \setminus C)$.

$\triangleright$ Rješenje je nacrtano na slici. $\triangleleft$



Sl. 1.2.

Zadatak 8. Euler-Vennovim dijagramima uvjeri se u istinitost sljedećih jednakosti

1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; **2)** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

3) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C$; **4)** $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C$.

1

1.2

Zadaci 1.2.

1. Odredi neki skup A tako da vrijedi:

1) $\{1,2,3\} \cap A = \{1,2\}$; **2)** $\{1,2,3\} \cap A = \emptyset$; **3)** $\{1,2,3\} \cap A = \{3,4\}$.

2. Odredi neki skup B tako da vrijedi:

1) $\{1,2,3\} \cup B = \{1,2,3,4,5\}$; **2)** $\{1,2,3\} \cup B = \{1,2,3\}$.

3. Elementi skupova A, B i C neki su od prirodnih brojeva koji su manji od 10. Pritom je: $A \cap B = \{3,8\}$, $A \cap C = \{8,9\}$, $B \cap C = \{8\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,8,9\}$, $A \cup C = \{1,2,3,5,6,7,8,9\}$, $B \cup C = \{3,4,5,6,7,8,9\}$. Odredi skupove A, B i C.

4. Elementi skupova A, B i C neki su od prirodnih brojeva koji su manji od 10. Pritom je: $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{3,4\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,6,7\}$, $A \cup C = \{1,2,3,4,5\}$, $B \cup C = \{3,4,5,6,7\}$. Odredi skupove A, B i C.

5. Skupovi A, B i C podskupovi su skupa prirodnih brojeva: $A = \{n : n = 2k-1, k \in \mathbf{N}\}$, $B = \{n : n = 3k, k \in \mathbf{N}\}$, $C = \{n : n = 4k, k \in \mathbf{N}\}$. Odredi skupove $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$.

6. Neka je $A \subseteq B$. Čemu su jednaki skupovi $A \cap B$, $A \cup B$?

7. Što se može reći o skupovima A, B, C za koje vrijedi

1) $A \cup B = A$, **2)** $A \cup B = A \cap B$ **3)** $A \cap B \cap C = A$, **4)** $A \cup B \cup C = A$?

8. Koristeći Euler-Vennove dijagrame uvjeri se da vrijede sljedeće jednakosti:

1) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$, **2)** $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$,

3) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$, **4)** $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$,

5) $(A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \setminus (B \cap C)$, **6)** $(A \cup C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

9. Je li neka od sljedećih relacija istinita za svaki izbor skupova A, B, C:

1) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$, **2)** $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap (B \cup C)$?

10. Odredi sve skupove X za koje vrijedi $X \subset \{a,b,c\}$.

11. U nekom je razredu 28 učenika. U razne sportske aktivnosti uključeno ih je 15, a 16 učenika pjeva u pjevačkom zboru škole. Sedam učenika tog razreda niti su među sportašima, niti su članovi pjevačkog zbora. Koliko je učenika ovog razreda uključeno u obje aktivnosti?

12. Učenici nekog razreda uče dva jezika, engleski i njemački. Engleski uče 23 učenika, njemački 19, a oba jezika uči 12 učenika. Koliko je učenika u tom razredu ako svaki uči barem jedan od ova dva jezika?

13. U nekoj udruzi umirovljenika $\frac{3}{4}$ njezinih muških članova nosi naočale, a $\frac{2}{3}$ ih je ćelavo. U toj je udruzi 48 muških članova i svaki je ili ćelav ili nosi naočale. Ima li među njima takvih koji su ćelavi, a nose i naočale?

14. Maturalna zadaća iz matematike sastojala se od tri zadatka. Prvi je riješilo 82% učenika koji su pristupili ispitu, drugi i treći po 78%. Prvi i drugi zadatak riješilo je 62% maturanata, prvi i treći 66%, a drugi i treći 60%. Sva tri zadatka točno je riješilo 75 učenika. Koliko je učenika rješavalo ovu zadaću?

15. Od 20 dječaka 14 ih ima smeđe oči, 15 svijetlu kosu, 17 ih je težih od 20 kg, a 18 viših od 1.60 m. Dokaži da su među njima barem četvorica koji imaju sve četiri navedene osobine.