1. lekcija

Realni brojevi

1. lekcija Ponovimo

Prirodni brojevi

Skup **prirodnih brojeva** označavamo s $\mathbf{N}$.

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\}.$$

Skup prirodnih brojeva zatvoren je s obzirom na zbrajanje i množenje.

Neka je $b > 1$ prirodan broj. Prirodni broj N zapisan u **pozicijskom sustavu s bazom** b ima vrijednost:

$$N = a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_{0\,(b)} = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot b + a_0.$$

Znamenke $a_0, a_1, \ldots, a_n$ cijeli su brojevi iz skupa $\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$. Indeks označava u kojoj je bazi zapisan broj. U dekadskom sustavu brojeva je $b = 10$, u binarnom $b = 2$, u oktalnom $b = 8$, a u heksadecimalnom $b = 16$.

Svaka se dva prirodna broja m i n mogu usporediti prema veličini.

Neka je n po volji odabran prirodni broj. Onda je njegov sljedbenik prirodni broj $n+1$, a njegov prethodnik $n-1$.

Prirodni broj m djeljiv je prirodnim brojem n ako postoji prirodni broj p takav da je $m = n \cdot p$. Kažemo da je n **djelitelj** ili **mjera** od m i pišemo $n|m$.

Prirodni broj veći od 1 je **prost** ako je djeljiv samo s 1 i sa samim sobom. Broj je **složen** ako nije prost, s iznimkom broja 1 koji ne držimo ni prostim ni složenim. **Paran broj** je složen broj djeljiv s 2.

Svaki se prirodni broj može na jedinstven način napisati u obliku umnoška prostih brojeva:

$$n = p_1 p_2 \cdots p_m.$$

Kriteriji djeljivosti

- Prirodni broj je djeljiv brojem 2 ako je njegova posljednja znamenka 0 ili paran broj.
- Prirodni broj je djeljiv brojem 3 ako je zbroj njegovih znamenki broj djeljiv sa 3.
- Prirodni broj je djeljiv s 4 ako je dvoznamenkast broj što ga čine posljednje dvije znamenke djeljiv sa 4.
- Prirodni broj je djeljiv s 5 ako je njegova posljednja znamenka 0 ili 5.
- Prirodni broj je djeljiv sa 6 ako je djeljiv s 2 i s 3.

- Prirodni broj je djeljiv s 8 ako je njegov troznamenkast završetak broj djeljiv s 8.
- Broj je djeljiv s 9 ako je zbroj njegovih znamenki djeljiv s 9.
- Broj je djeljiv s 11 ako je razlika zbroja znamenki na parnim pozicijama i zbroja znamenki na neparnim pozicijama broj djeljiv s 11.

Cijeli brojevi

Operacija oduzimanja u skupu prirodnih brojeva ne može se uvijek definirati. To dovodi do proširenja skupa prirodnih brojeva na skup cijelih brojeva.

Skup **cijelih brojeva** označavamo sa $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots\}.$$

Taj skup zatvoren je s obzirom na zbrajanje, oduzimanje i množenje. Dijeljenje s nulom nije definirano.

Svojstva zbrajanja i množenja u skupu cijelih brojeva

- Zakon komutativnosti ili zamjene mjesta:

$$a + b = b + a; \qquad a \cdot b = b \cdot a.$$

- Zakon asocijativnosti:

$$a + (b + c) = (a + b) + c;$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

- Zakon distributivnosti množenja prema zbrajanju:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

- Za svaki cijeli broj a vrijedi:

$$a + 0 = a;$$

$$a \cdot 1 = a.$$

- Za svaki cijeli broj $a \neq 0$ postoji cijeli broj $-a$ tako da vrijedi:

$$a + (-a) = 0.$$

  Broj $-a$ je **suprotni broj** broja a.

Mjera i višekratnik

Ako za dva cijela broja a i b postoji broj d, $d \neq 0$, takav da je $a = a_1 \cdot d$ i $b = b_1 \cdot d$, kažemo da je d **zajednički djelitelj** ili **zajednička mjera** brojeva a i b.

Najveći broj d s ovim svojstvom zove se **najveća zajednička mjera** od a i b.

Ako su dana dva cijela broja a i b, tada broj v za koji vrijedi $a|v$ i $b|v$ zovemo zajedničkim višekratnikom brojeva a i b. Najmanji od brojeva v s ovim svojstvom zovemo **najmanjim zajedničkim višekratnikom** i označavamo s $V(a, b)$.

Ako dva (ili više) cijelih brojeva nemaju zajedničkih djelitelja (osim broja 1), tada kažemo da su ti brojevi **relativno prosti**.

Racionalni brojevi

Nemogućnost potpunog definiranja operacije dijeljenja u skupu cijelih brojeva zahtijeva uvođenje skupa racionalnih brojeva. Racionalni brojevi su količnici cijelih brojeva. Skup **racionalnih brojeva** označavamo s $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \ : \quad m, n \in \mathbf{Z}, \quad n \neq 0 \right\}.$$

Svaki racionalni broj moguće je zapisati u obliku razlomka $\frac{m}{n}$, gdje je m cijeli, a n prirodni broj.

Skup racionalnih brojeva zatvoren je s obzirom na zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje.

Uspoređivanje razlomaka

Razlomke jednakih nazivnika uspoređujemo poput prirodnih brojeva, uspoređujući njihove brojnike.

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{c}, \text{ ako je } a < b \qquad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}, \text{ ako je } a > b.$$

Razlomke različitih nazivnika uspoređujemo svođenjem na zajednički nazivnik dobivajući tako razlomke jednakih nazivnika.

Jednakost razlomaka

Razlomci $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ jednaki su ako i samo ako je $a \cdot d = b \cdot c$.

Za svaki racionalni broj $\frac{a}{b}$ i svaki broj m različit od nule vrijedi:

$$\frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{a}{b}.$$

Čitamo li jednakost zdesna ulijevo, tada je riječ o **proširivanju razlomaka** $\frac{a}{b}$, a čitamo li je slijeva udesno, tada govorimo o **kraćenju razlomaka** $\frac{a \cdot m}{b \cdot m}$.

Svaki se racionalni broj može kraćenjem dovesti na oblik u kojem brojnik i nazivnik nemaju zajedničkih djelitelja.

Zbrajanje i oduzimanje racionalnih brojeva

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

Razlomke koji nemaju zajednički nazivnik moramo proširiti kako bismo dobili razlomke jednakih nazivnika. Zajednički je nazivnik izraz koji sadrži faktore svih pojedinih nazivnika razlomaka koje zbrajamo ili oduzimamo.

Množenje i dijeljenje racionalnih brojeva

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Količnik dvaju razlomaka može se zapisati u obliku dvojnog razlomka:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}.$$

Pritom a i d nazivamo vanjskim, a b i c unutarnjim članovima dvojnog razlomka. Ovo pamtimo kao pravilo: **razlomci se dijele tako da se prvi razlomak pomnoži recipročnim razlomkom drugog**.

Svojstva zbrajanja i množenja u skupu racionalnih brojeva

- Komutativnost:

$$a + b = b + a;$$

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

- Asocijativnost:

$$a + (b + c) = a + (b + c);$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

- Distributivnost množenja prema zbrajanju:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

- Neutralni elementi (0 za zbrajanje, 1 za množenje):

$$a + 0 = a,$$
$$a \cdot 1 = a.$$

- Za svaki racionalni broj $a \neq 0$ postoji njemu suprotni broj $-a$ i racionalan broj $\frac{1}{a}$ takav da vrijedi:

$$a + (-a) = 0 \qquad \text{i} \qquad a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

Broj $\frac{1}{a}$ **inverzni** je **broj** broja a.

Pravi razlomak je razlomak kojem je brojnik manji od nazivnika.

Mješoviti broj je zbroj $a + \frac{b}{c}$, prirodnog broja a i pravog razlomka $\frac{b}{c}$. Iz praktičnih se razloga zapisuje u obliku $a\frac{b}{c}$:

$$a\frac{b}{c} = a + \frac{b}{c}.$$

Realni brojevi

Brojevi koji nisu racionalni, tj. koje nije moguće predočiti kao količnike dvaju cijelih brojeva zovu se **iracionalni brojevi**.

Skup **iracionalnih brojeva** označavamo s **I**.
Iracionalni brojevi su na primjer brojevi $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{5}$, π, e,. . . .

Skup **realnih brojeva** $\mathbf{R}$ sastoji se od racionalnih i iracionalnih brojeva:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}.$$

Taj skup je zatvoren s obzirom na zbrajanje, oduzimanje, množenje i djeljenje.

Svojstva zbrajanja i množenja u skupu realnih brojeva

- Komutativnost:

$$a + b = b + a;$$
$$a \cdot b = b \cdot a.$$

- Asocijativnost:

$$a + (b + c) = a + (b + c);$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

- Distributivnost množenja prema zbrajanju:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c;$$

- Neutralni elementi (0 za zbrajanje, 1 za množenje):

$$a + 0 = a,$$
$$a \cdot 1 = a.$$

- Suprotni i inverzni element:

$$a + (-a) = 0, \quad a \cdot \frac{1}{a} = 1, \quad \text{za svaki } a \neq 0.$$

Svaki realan broj a možemo prikazati u decimalnom zapisu:

$$a = a_0.a_1a_2a_3\ldots$$

pri čemu je a_0 cijeli broj, a a_1, a_2, $a_3\ldots$ neke od znamenki $0, 1, \ldots, 9$.

Decimalni zapis racionalnog broja je ili konačan ili beskonačan i periodični, što znači da se od izvjesnog mjesta iza decimalne točke skupina znamenki periodički ponavlja. Decimalni zapis racionalnog broja $\frac{m}{n}$ je konačan ako i samo ako nazivnik n nema drugih prostih faktora osim 2 i 5.

Decimalni zapis iracionalnog broja je beskonačan i neperiodični.

Potencije

Potencija a^n jednaka je umnošku n jednakih faktora:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Realni je broj a **baza** (ili **osnovica**) **potencije**, a prirodni broj n njezin je **eksponent**. Uzima se da je $a = a^1$.

Pri računanju s potencijama vrijede sljedeća pravila:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$
$$a^m : a^n = a^{m-n},$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$
$$a^0 = 1,$$
$$(a^m)^n = a^{mn},$$
$$a^n \cdot b^n = (ab)^n,$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Potencije s racionalnim eksponentom

Ako je a pozitivan realni broj i m, n prirodni brojevi, onda je:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Vrijedi:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m,$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

Korijeni

Kvadratni (drugi) korijen pozitivnog broja a jest pozitivni broj $\sqrt{a}$ za koji vrijedi:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Također je $\sqrt{0} = 0$.

Za bilo koji realni broj a vrijedi:

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Za pozitivne brojeve a i b vrijedi:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Ako su a i b pozitivni brojevi, te n prirodni broj i ako vrijedi $b^n = a$, broj b je tada n-ti korijen iz a. Dakle:

$$b^n = a \Longleftrightarrow b = \sqrt[n]{a}.$$

Svojstva korijena su:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}, \quad k \in \mathbf{N};$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b};$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a};$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^m}.$$

Ako je a realni broj i n neparan, onda je $\sqrt[n]{a^n}=a$. Ako je a realni broj i n paran, onda je $\sqrt[n]{a^n}=|a|$.

Neka je a pozitivan realni broj. Tada $(-a)^{\frac{1}{n}}$ postoji samo ako je n neparan broj. Pritom je:

$$(-a)^{\frac{1}{n}}=-a^{\frac{1}{n}}, \qquad \sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}.$$

Aritmetička sredina

Neka je dano n realnih brojeva a_1, a_2, $a_3,\ldots,$ a_n. Broj:

$$A_n=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}$$

je njihova **aritmetička sredina** ili **prosjek**.

Geometrijska sredina

Neka je dano n nenegativnih brojeva a_1, a_2, $a_3,\ldots,$ a_n. Broj:

$$\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}$$

je njihova **geometrijska sredina**.

Postotni račun

Osnovna vrijednost x je broj od kojeg se obračunava postotak.

Postotak p je broj jedinica koji se uzima od 100 jedinica neke veličine:

$$p\%=\frac{p}{100}.$$

Postotni iznos P je broj koji se dobije kad se od osnovne veličine odredi dio naznačen danim postotkom:

$$P=x\cdot\frac{p}{100}.$$

Izračunati postotak p od neke osnovne vrijednosti x znači izračunati postotni iznos P, tj. odrediti vrijednost funkcije:

$$f(x)=\frac{p}{100}\cdot x.$$

Ako je broj P dobiven uvećanjem broja x za postotak p, to pišemo:

$$P=x+x\cdot\frac{p}{100}=x\left(1+\frac{p}{100}\right).$$

1. lekcija Primjeri

Primjer 1.

Zbroj šest uzastopnih prirodnih brojeva je 57. Koliki je njihov najmanji zajednički višekratnik?

Rješenje. Neka je n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ i $n+5$ šest uzastopnih prirodnih brojeva. Njihov zbroj je:

$$6n+15=57,$$

odakle je $n=7$. Ostali brojevi su 8, 9, 10, 11 i 12. Rastavimo li ih sada na proste faktore, dobivamo:

$$7=7, \quad 8=2^3, \quad 9=3^2, \quad 10=2\cdot 5, \quad 11=11, \quad 12=2^2\cdot 3,$$

te je njihov najmanji zajednički višekratnik jednak $N=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11=27\,720$.

Primjer 2.

1) Ako je $a+b=42$, $b+c=28$, $c+a=24$, koliko je $a\cdot b\cdot c$?

2) Ako je $a\cdot b=42$, $b\cdot c=28$, $c\cdot a=24$, koliko je $a+b+c$?

Rješenje. **1)** Zbrajanjem svih triju jednadžbi, dobije se $2(a+b+c)=94$, a odatle $a+b+c=47$. I sada, iz $a+b=42$ i $a+b+c=47$ slijedi $42+c=47$, pa je $c=5$. Na jednak se način dobije $a=19$ i $b=23$. Konačno, $abc=2185$.

2) Pomnožimo sve tri jednadžbe i dobijemo $(abc)^2=(6\cdot 7\cdot 4)^2$, te je $abc=6\cdot 7\cdot 4$ ili $abc=-6\cdot 7\cdot 4$. Lako se sada dobije $a=6$, $b=7$, $c=4$ ili $a=-6$, $b=-7$, $c=-4$ te je $a+b+c=17$, odnosno $a+b+c=-17$.

Primjer 3.

Odredimo sve cijele brojeve x, y i z za koje je:

1) $x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-10)=0$;

2) $(x^2-1)^2+(y^2-1)^2=0$;

3) $(x-2)\cdot(y+1)\cdot(z-3)=1$.

Rješenje. **1)** Da bi umnožak bio jednak nuli dovoljno je da bude jedan faktor jednak nuli. Zato ova jednadžba ima jedanaest rješenja:

Ili je $x=0$, ili je $x=1$, ili $x=2$ ili, ..., ili $x=10$.

2) Kako zbroj kvadrata dvaju brojeva nikad nije negativan broj, ova jednakost je moguća samo kada su oba pribrojnika jednaka nuli. Tako imamo ova rješenja jednadžbe: $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$.

3) Kako je riječ o umnošku cijelih brojeva, a broj faktora je neparan, imamo sljedeće mogućnosti:

(1) $x-2=1$, $y+1=1$, $z-3=1$, odakle slijedi $x=3$, $y=0$, $z=4$;

(2) $x-2=1$, $y+1=-1$, $z-3=-1$, odakle slijedi $x=3$, $y=-2$, $z=2$;

(3) $x-2=-1$, $y+1=1$, $z-3=-1$, odakle slijedi $x=1$, $y=0$, $z=2$;

(4) $x-2=-1$, $y+1=-1$, $z-3=1$, odakle slijedi $x=1$, $y=-2$, $z=4$.

Primjer 4.

Dokažimo:

1) zbroj svakih pet uzastopnih cijelih brojeva djeljiv je s 5;

2) zbroj svaka tri uzastopna parna broja djeljiv je sa 6;

3) zbroj svaka četiri uzastopna neparna cijela broja djeljiv je s 8.

Rješenje. **1)** Zbroj pet uzastopnih cijelih brojeva zapisat ćemo na sljedeći način: $(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)$. Taj je zbroj jednak $5n$, što je očito broj djeljiv s 5.

2) Imamo redom: $(2n-2)+2n+(2n+2)=6n$. Rezultat je broj djeljiv sa 6.

3) Zbrajanjem dobijemo: $(2n-3)+(2n-1)+(2n+1)+(2n+3)=8n$. Očito, $8n$ je broj djeljiv s 8 za svaki cijeli broj n.

Primjer 5.

Zbroj prvih n prirodnih brojeva jednak je 561. Odredimo n.

Rješenje. Zbroj n uzastopnih cijelih brojeva računa se po formuli $\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$. Trebamo, dakle, riješiti kvadratnu jednadžbu $n\cdot(n+1)=1122$. Rješenja su brojevi $n_1=-34$ i $n_2=33$. Kako je broj n prirodan, prihvaćamo drugo rješenje. Zbroj prva 33 prirodna broja jednak je 561.

Primijetimo kako do rješenja možemo doći i na sljedeći način: Broj 1122 rastavimo na proste faktore: $1122=2\cdot3\cdot11\cdot17$. Kako je umnožak $n(n+1)$ umnožak dvaju uzastopnih prirodnih brojeva, zaključujemo: $n=33$.

Primjer 6.

Ako je $1+2+3+\ldots+50=1275$, koliko je $51+52+53+\ldots+100$?

Rješenje. Možemo zapisati: $51+52+53+\ldots+100=50\cdot 50+(1+2+3+\ldots+50)$. Zbroj brojeva u zagradi jednak je 1275 pa imamo: $51+52+53+\ldots+100=50\cdot 50+1275=2500+1275=3775$.

Primjer 7.

Koja je posljednja znamenka umnoška triju potencija $3^{55}\cdot 4^{55}\cdot 6^{55}$?

Rješenje. Posljednja se znamenka potencije 3^n periodički ponavlja. Kako je redom $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81,\ldots$, jasno je da će posljednja znamenka od $3^{55}=(3^4)^{13}\cdot 3^3$ biti 7. Analogno, jer je $4^{55}=(4^2)^{27}\cdot 4=16^{27}\cdot 4$, posljednja znamenka od 4^{55} jest 4. I konačno, posljednja znamenka broja 6^{55} je 6. Dakle, posljednja je znamenka umnoška $3^{55}\cdot 4^{55}\cdot 6^{55}$ znamenka 8.

No, primijetite kako sve tri potencije imaju jednak eksponent. Zbog toga je $3^{55}\cdot 4^{55}\cdot 6^{55}=(3\cdot 4\cdot 6)^{55}=72^{55}$ pa je posljednja znamenka umnoška jednaka posljednjoj znamenci potencije 2^{55}. A ona je, zbog $2^{55}=(2^4)^{13}\cdot 2^3$, jednaka 8.

Primjer 8.

Broj 750 podijelimo na dva dijela tako da 8% prvog dijela zajedno s 24% drugoga čini 11.2% od danog broja.

Rješenje. Neka je $x+y=750$. Tada je $0.08x+0.24y=0.112\cdot 750=84$. Ovo je sustav jednadžbi iz kojega se dobije $x=600$, $y=150$. Provjera pokazuje da je rezultat točan. Naime, vrijedi: $0.08\cdot 600=48$, zatim $0.24\cdot 150=36$, te je $48+36=84$, a već smo izračunali $84=0.112\cdot 750$. Također je $x+y=600+150=750$.

Primjer 9.

Ako je omjer razlike, zbroja i umnoška dvaju brojeva jednak $1:2:6$, koliki je količnik tih brojeva?

Rješenje. Iz $(a-b):(a+b)=1:2$ slijedi $a=3b$. A iz $(a+b):(ab)=1:3$, uz $a=3b$ i $b\neq 0$, dobije se $b=4$. Zatim je $a=12$, te je $a:b=3$.

Primjer 10.

U brojevnom sustavu s bazom n vrijedi jednakost $12_{(n)}+23_{(n)}=40_{(n)}$. O kojoj je bazi riječ?

Rješenje. Prebacimo brojeve iz zapisa u bazi n u dekadski zapis:

$$\begin{aligned} 12_{(n)} &= 1\cdot n^1+2\cdot n^0=n+2,\\ 23_{(n)} &= 2\cdot n^1+3\cdot n^0=2n+3,\\ 40_{(n)} &= 4\cdot n^1+0\cdot n^0=4n. \end{aligned}$$

Sada imamo jednadžbu $n+2+2n+3=4n$, iz koje slijedi $n=5$.

Primjer 11.

Zbroj aritmetičke i geometrijske sredine dvaju pozitivnih realnih brojeva jednak je 450. Kolika je aritmetička sredina drugih korijena tih brojeva?

Rješenje. Za x, $y>0$ vrijedi:

$$\frac{x+y}{2}+\sqrt{x\cdot y}=450.$$

Pomnožimo li jednakost s 2 i umjesto x i y napišemo $\sqrt{x}^2$ i $\sqrt{y}^2$, imamo:

$$\sqrt{x}^2+2\sqrt{xy}+\sqrt{y}^2=900,\quad \text{odnosno}\quad \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=900,$$

odakle korjenovanjem i dijeljenjem s 2 dobivamo aritmetičku sredinu drugih korijena brojeva $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}=15$.

Primjer 12.

Koja se znamenka nalazi na 701. mjestu iza decimalne točke u decimalnom zapisu broja $\dfrac{3}{7}$?

Rješenje. Broj $\dfrac{3}{7}=0.\dot{4}2857\dot{1}$ je periodičan s periodom duljine 6 znamenki. Podijelimo li 701 sa 6, dobivamo količnik 116 i ostatak 5. Dakle, period će se izredati 116 puta i nakon njega slijedi još 5 znamenki. Stoga je 701. znamenka iza decimalne točke upravo 7.

Primjer 13.

Ako je $0.4\dot{7}\dot{2} = \frac{m}{n}$, $M(m, n) = 1$, koliko je $m + n$?

Rješenje. Decimalni broj $0.4\dot{7}\dot{2}$ je beskonačan i periodičan (period čine dvije znamenke) a želimo ga zapisati u obliku razlomka.

Zapišimo $r = 0.4\dot{7}\dot{2} = 0.4 + 0.0\dot{7}\dot{2}$.

Označimo li sada $x = 0.0\dot{7}\dot{2}$, imat ćemo da je $1\,000 \cdot x = 72.\dot{7}\dot{2} = 72 + 10x$.

Odatle slijedi $990x = 72$, te je $x = \frac{72}{990} = \frac{4}{55}$.

I sada je $r = 0.4 + \frac{4}{55} = \frac{26}{55}$, pa je $m + n = 81$.

Primjer 14.

Izračunajmo bez uporabe kalkulatora: $(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$.

Rješenje. Zadatak možemo riješiti na sljedeći način:

$$\begin{aligned}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} &= -\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 \cdot (5 + 2\sqrt{6})} \\ &= -\sqrt{(5 - 2\sqrt{6}) \cdot (5 + 2\sqrt{6})} = -\sqrt{1} = -1.\end{aligned}$$

No, da smo uočili kako je $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} = |\sqrt{2} + \sqrt{3}| = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, bilo bi isto $(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) = -1$.

Primjer 15.

Izračunajmo vrijednost brojevnog izraza $\left[\left(a^{-\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} : \left(ab^{-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}\right]^{-2}$ za $a = \frac{1}{8}$, $b = 0.25$.

Rješenje. Najprije pojednostavnimo zadani izraz. Provedimo potenciranja naznačena okruglim zagradama pa zatim provedimo množenje potencija jednakih baza. Tako imamo redom:

$$\left[\left(a^{\frac{1}{3}} b^{-\frac{1}{4}}\right) : \left(a^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{2}}\right)\right]^{-2} = \left(a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{-\frac{3}{4}}\right)^{-2} = a^{-\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{3}{2}}.$$

Uvrstimo sada zadane vrijednosti za a i b pa imamo:

$$\left(2^{-3}\right)^{-\frac{4}{3}} \cdot \left(2^{-2}\right)^{\frac{3}{2}} = 2^4 \cdot 2^{-3} = 2.$$

1

1. lekcija

Zadaci

1. Ako je $ab+bc=33$, $bc+ac=30$, $ac+ab=15$, izračunajte $a+b+c$.

2. S koliko nula završava broj:
$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 25$?

3. Koja je posljednja znamenka zbroja $1!+2!+3!+\ldots 25!$, gdje je $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n$?

4. Izračunajte:

1) $1-2+3-4+5-\ldots+99-100+101$;

2) $\dfrac{1}{0.1}+\dfrac{2}{0.2}+\dfrac{3}{0.3}+\ldots+\dfrac{9}{0.9}$.

5. Zbroj 11 uzastopnih cijelih brojeva iznosi 110. Koji su to brojevi?

6. Zbroj prvih 11 prirodnih brojeva pomnožimo s 2, zatim s 3, pa s 4 i tako redom. Konačno, taj zbroj pomnožimo i s 11. Koliki je zbroj svih ovih umnožaka?

7. Odredite broj c ako je $a:b=3:2$, $b:c=3:5$, te $a+b+c=\dfrac{25}{36}$.

8. Ako je $a:b=2:3$, $b:c=1:2$, koliko je $\dfrac{a-b}{a+b}:\dfrac{b-c}{b+c}$?

9. Ako je $(xy):(yz):(zx)=2:3:5$, koliko je $x:y:z$?

10. Koliki mora biti zbroj znamenki x i y u broju $35xy72$ kako bi taj broj bio djeljiv s 18?

11. Odredite 333. znamenku u decimalnom zapisu broja $\dfrac{5}{7}$.

12. Odredite najmanji prirodni broj n za koji je:

1) $2^n>100$; **2)** $(-2)^n>100$.

13. Izračunajte:

1) $\dfrac{0.04^{-2}\cdot 125^4\cdot 0.2^{-1}}{4\cdot 25^8}$;

2) $\dfrac{\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-4}+2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{0}}{3-(-2)^{-3}}$.

14. Odredite prirodni broj n ako je:

1) $2^{2n}=4^5$; **2)** $3\cdot 9^n=3^{11}$;

3) $(2^n)^3\cdot 4=2^{11}$.

15. Ako je $5^m=3$, te $3^n=0.2$, koliko je $m\cdot n$?

16. Koliko znamenki ima broj $4^5\cdot 5^{13}$?

17. Ako je $a=3^{18}$, $b=4^{20}$, koja je posljednja znamenka zbroja, a koja umnoška brojeva a i b?

18. **1)** Prikažite u obliku potencije s bazom 2:
$2^8+4^5+8^3+16^2$.

2) Prikažite u obliku potencije s bazom 3:
$5\cdot 9^5+4\cdot 27^3+8\cdot 3^9$.

3) Prikažite u obliku potencije s bazom 6:
$2^{n-1}\cdot 3^{n+1}-2^{n+1}\cdot 3^{n-1}+6^{n-1}$.

19. Aritmetička sredina 10 različitih prirodnih brojeva jednaka je 11. Koju najveću moguću vrijednost može imati neki od tih brojeva?

20. Aritmetička sredina 27 brojeva je 72. Ako su dva od tih 27 brojeva brojevi 13 i 41, kolika je aritmetička sredina ostalih 25 brojeva?

21. U skupini od 32 osobe prosječna starost iznosi 25 godine. Ako se izdvoje najmlađa osoba, kojoj je 15 godina, i najstarija, kojoj je 35 godina, koliki je prosjek godina ostalih?

22. U I^c razredu je 28 učenika. Na pismenom ispitu iz matematike prosjek osvojenih bodova iznosio je 15. Ako je 5 učenika imalo 20 bodova, a 3 učenika imali su po 18 bodova, koliki je prosjek ostalih?

23. Neki je tenisač pobijedio u 7 od 18 susreta, a u sljedećih 7 susreta pobijedio je 3 puta. Izrazite u postocima broj njegovih poraza u svim ovim susretima.

24. Cijena nekog odijela snižena je za 35% i sada iznosi 942.5 kn. Kolika je bila cijena odijela prije sniženja?

25. Ako cijena goriva na benzinskoj crpki poraste za 4%, a potom još za 4%, koliko je ukupno povećanje?

26. Cijena neke robe povisi se za 12%. Za koliko postotaka bi se trebala umanjiti ta povećana cijena kako bi se vratila na staru?

27. U nekom razredu na pismenom su ispitu postavljena dva zadatka. Prvi je uspješno riješilo 72% učenika, drugi 76%, a oba zadatka riješilo ih je 12. Svaki je učenik riješio barem jedan zadatak. Koliko je učenika u tom razredu?

28. Izračunajte:

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{-0.75}+\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{25}\right)^{-0.5}.$$

29. Koliko je:

$$[4^{-0.25}+(3\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}}]\cdot[4^{-0.25}-(3\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}}].$$

30. Koliko je:
$|1-\sqrt{2}|-|\sqrt{2}-\sqrt{3}|-|\sqrt{3}-\sqrt{4}|-\ldots-|\sqrt{99}-\sqrt{100}|$?

Pojednostavnite:

31. $$\left(\frac{\sqrt[4]{a^3b}-\sqrt[4]{ab^3}}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}\right)^{-4}.$$

32. $$\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt{3}}}:\sqrt{3\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{3}}}.$$

33. $$\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}}:\sqrt[3]{x^2\cdot\sqrt{x}}.$$

34. Izračunajte vrijednost brojevnog izraza $\left[\left(a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{-2}\right)^{0.75}:\left(a^{-\frac{1}{2}}\cdot b^3\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-3}$, za $a=\dfrac{16}{81}$, $b=0.01$.

35. Racionalizirajte nazivnik u razlomku $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$.

36. Racionalizirajte nazivnik u razlomku $\dfrac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$.

37. Racionalizirajte nazivnik u razlomku $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}-1}$.

38. Koliko je $(1+\sqrt{a})(1+\sqrt[4]{a})(1+\sqrt[8]{a})(1+\sqrt[16]{a})(1-\sqrt[16]{a})$, za $a=2$?

39. Pojednostavnite:

$$\frac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{ab^{\frac{2}{3}}-ba^{\frac{2}{3}}}+\frac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{ab^{\frac{2}{3}}+ba^{\frac{2}{3}}}.$$

40. Pojednostavnite:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}+\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right).$$

1. lekcija Ispiti

Ispit 1

1. Neka je n najveća zajednička mjera brojeva 210, 168, i 63. Zbroj znamenki broja n jednak je:

A. 0 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

2. Ako je $a : b = 1 : 2$, $b : c = 1 : 3$ te $a + b + c = 27$, onda je umnožak abc jednak:

A. 512 **B.** 108 **C.** 324 **D.** 212

3. Zbroj najmanjeg i najvećeg troznamenkastog broja koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 5 jednak je:

A. 1012 **B.** 1102 **C.** 1120 **D.** 1210

4. Broj $n = 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 + 10^{-1} + 10^{-2}$ zapisan u standardnom obliku je broj:

A. 3020.11 **B.** 321.11 **C.** 32.11 **D.** 3120.11

5. Ako je $a = 0.\dot{2}\dot{7}$, onda je recipročna vrijednost broja a jednaka:

A. 27 **B.** $3\frac{2}{3}$ **C.** $1\frac{1}{9}$ **D.** 9

6. Izraženo u postocima 3 sekunde od 3 sata čine:

A. $\frac{1}{36}\%$ **B.** $\frac{1}{30}\%$ **C.** $\frac{1}{360}\%$ **D.** $\frac{1}{12}\%$

7. Aritmetička sredina dvaju brojeva jednaka je 5, geometrijska sredina je 4. Apsolutna vrijednost razlike tih dvaju brojeva jednaka je:

A. 2 **B.** 8 **C.** 4 **D.** 6

8. Umnožak a^3b^3 brojeva $a = 5 \cdot 10^8$ i $b = 0.04 \cdot 10^{-5}$ jednak je:

A. $8 \cdot 10^6$ **B.** $5 \cdot 10^6$ **C.** $4 \cdot 10^5$ **D.** 10^7

9. Jednostavniji zapis razlomka $\dfrac{(x^{-1} - y^{-1})^{-2}}{(x^{-2} - y^{-2})^{-1}}$ je:

A. $\dfrac{1}{y+x}$ **B.** $\dfrac{x-y}{y+x}$ **C.** $\dfrac{x+y}{y-x}$ **D.** 1

10. Vrijednost brojevnog izraza $\sqrt[3]{8x} - \sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}}$ za $x = 3^{-3}$ jednaka je:

A. $\frac{1}{3}$ **B.** 2 **C.** $\frac{1}{9}$ **D.** 6

Ispit 2

1. Posljednja znamenka umnoška prvih 50 prostih brojeva jest:

A. 0 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 5

2. Ako je $22_{(b)} \cdot 33_{(b)} = 1331_{(b)}$, koliko je u istom brojevnom sustavu $23_{(b)} \cdot 32_{(b)}$?

A. $3413_{(b)}$ **B.** $1341_{(b)}$ **C.** $1431_{(b)}$ **D.** $1134_{(b)}$

3. Rješenje jednadžbe $x + 2x + 3x + \ldots + 111x = 259$ je:

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{1}{8}$ **C.** $\frac{1}{12}$ **D.** $\frac{1}{24}$

4. U kinodvorani je 50 redova, u svakom je redu 25 sjedala. Ako je u svakom redu po pet praznih sjedala popunjenost dvorane je:

A. 70% **B.** 75% **C.** 80% **D.** 90%

5. Ako je $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$, $\frac{c}{d} = \frac{2}{5}$, $\frac{d}{b} = \frac{6}{7}$, koliko je $\frac{a}{c}$?

A. $\frac{1}{7}$ **B.** $\frac{5}{36}$ **C.** $\frac{35}{36}$ **D.** $\frac{6}{7}$

6. Razlomak $\frac{0.25}{0.\dot{2}\dot{5}}$ jednak je broju:

A. $\frac{1}{25}$ **B.** 0.99 **C.** $\frac{100}{99}$ **D.** $\frac{1}{9}$

7. Geometrijska sredina dvaju pozitivnih realnih brojeva je 2, zbroj njihovih kvadrata je 8. Aritmetička sredina tih brojeva iznosi:

A. 2 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 16

8. $(4^{-\frac{3}{2}} - 8^{-\frac{2}{3}})^{-2} =$

A. 64 **B.** 0.5 **C.** -1 **D.** -0.8

9. $\dfrac{|4-\sqrt{18}| + |3-\sqrt{8}|}{|4-\sqrt{2}| - |\sqrt{8}-3|} =$

A. $2\sqrt{2}-1$ **B.** $3-2\sqrt{2}$ **C.** $2-\sqrt{2}$ **D.** $1+2\sqrt{2}$

10. Koliko dugo će putovati radiosignal, koji se kreće brzinom svjetlosti ($3 \cdot 10^5$ km/ s), s Marsa do Zemlje ako je udaljenost ovih dvaju planeta jednaka $1.38 \cdot 10^8$ km?

A. 12 sati **B.** 20 min 15 sek **C.** 1 h 24 min **D.** 7 min 40 sek

Ispit 3

1. Zbroj šest uzastopnih cijelih brojeva iznosi $1\,275$. Najmanji od njih djeljiv je s:

A. 10 **B.** 25 **C.** 40 **D.** 100

2. Ako su $\frac{2}{3}$ nekog broja jednake 7, onda je $\frac{4}{7}$ tog broja jednako:

A. 12 **B.** 10 **C.** 6 **D.** 8

3. Koliko ima cijelih brojeva n, $1 \leq n \leq 100$ koji nisu djeljivi ni s 2, ni s 3?

A. 33 **B.** 50 **C.** 42 **D.** 67

4. Ako je $x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ te je $a = 10^{-2}$, $b = 10^2$, tada je:

A. $x = 100.01$ **B.** $x = 101$ **C.** $x = 101.1$ **D.** $x = 111.1$

5. Od četiri dana broja tri su iracionalna, jedan je racionalan. To je broj:

A. $\sqrt{1.44^{-1}}$ **B.** 2π **C.** $\sqrt[4]{0.16}$ **D.** $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$

6. Ako je $2^{10} \cdot 5^{12} = n \cdot 10^8$, onda je:

A. $n = 2.5$ **B.** $n = 25$ **C.** $n = 250$ **D.** $n = 2\,500$

7. Obujam bakterije jednak je $0.00000000000000025 \text{ m}^3$. Zapisan u znanstvenom obliku taj broj glasi:

A. $25 \cdot 10^{-15}$ **B.** $2.5 \cdot 10^{16}$ **C.** $2.5 \cdot 10^{-16}$ **D.** $2.5 \cdot 10^{-17}$

8. Ako je 15% od x jednako 24% od 210, onda je:

A. $x = 336$ **B.** $x = 450$ **C.** $x = 240$ **D.** $x = 330$

9. Vrijednost brojevnog izraza $\frac{2^{-3}+3^{-3}}{2^{-2}-3^{-2}} : \frac{2^{-2}+3^{-2}}{2^{-3}-3^{-3}}$ jednaka je:

A. $\frac{133}{1\,296}$ **B.** $\frac{133}{468}$ **C.** $\frac{11}{13}$ **D.** $\frac{135}{246}$

10. $(\sqrt{3}-1)^2 \cdot (4+2\sqrt{3}) =$

A. 2 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 8

Ispit 4

1. Broj $\overline{35x7y0}$ djeljiv je sa 6. Tada umnožak znamenki xy ne može biti jednak:

A. 5 **B.** 10 **C.** 20 **D.** 35

2. Zbroj svih cijelih brojeva n za koje je i razlomak $\frac{6}{n+1}$ cijeli broj jednak je:

A. 4 **B.** 6 **C.** -8 **D.** -10

3. S $a \circ b = a - ab + b$ zadana je algebarska operacija u skupu realnih brojeva. Ako je $3 \circ (x \circ 2) = 9$, onda je:

A. $x = 7$ **B.** $x = 3$ **C.** $x = 5$ **D.** $x = 1$

4. U nekoj je brojevnoj bazi točna jednakost $22 + 33 = 121$. U istoj je bazi onda $22 \cdot 33$ jednako:

A. 1 212 **B.** 2 121 **C.** 1 122 **D.** 2 112

5. Ako je $x = 0.1$, $y = 0.01$, $xyz = 1$, tada je:

A. $z = 0.001$ **B.** $z = 1\,000$ **C.** $z = 10$ **D.** $z = 0.1$

6. Prikazan u obliku potencije s bazom 3 zbroj $5 \cdot 9^5 + 4 \cdot 27^3 + 8 \cdot 3^9$ jednak je:

A. 3^{13} **B.** 3^{12} **C.** 3^{14} **D.** 3^{11}

7. Najmanji od brojeva $a = 0.01$, $b = 100^{-1.5}$, $c = 0.1^{-2}$, $d = \sqrt[4]{0.001}$ jest broj:

A. a **B.** b **C.** c **D.** d

8. Ako je $a = 4^{n+1}$, $b = 25^{n-1}$ te $n \geq 1$, onda je umnožak ab broj koji ima:

A. $2n$ znamenki **B.** $n + 1$ znamenku **C.** $n + 2$ znamenke **D.** $2n + 1$ znamenki

9. Broj $(4^{-1} - 5^{-1})^{-2}$ jednak je:

A. -9 **B.** 12 **C.** 41 **D.** 400

10. Površina Hrvatske jednaka je $56\,542 \text{ km}^2$, površina Zemlje je $510\,000\,000 \text{ km}^2$. Omjer tih dviju površina jednak je:

A. $1.1 \cdot 10^{-4}$ **B.** $1.2 \cdot 10^{-3}$ **C.** 10^{-5} **D.** $0.11 \cdot 10^{-6}$