1.

Šetnja kroz geometriju

1.1. Uvod

Matura (ispit zrelosti) je pravi trenutak za osvrtanje i pogled naprijed. Nekoliko godina ranije učenik još nije prikupio dovoljno znanja da bi mogao uspoređivati cjeline u matematici i naslućivati kamo bi sve rečeno dalje moglo voditi. Nekoliko godina kasnije odluka o životnom pozivu bit će već donesena. Matematički potencijal možda izgubljen.

Čitajući po drugi put dobru knjigu, zrelija osoba nalazi u njoj kvalitete koje su joj ranije promakle. Nova značenja, začudne analogije, lijepe metafore. Zamislit će se nad nečim što se prije činilo nevažnim i njezina ili njegova misao može dobiti pokretački impuls u neočekivanom smjeru. Uvjet za to je da pročitano propušta kroz filter vlastitog mozga. Da ne vjeruje nego provjerava. Da ne smatra znanjem sposobnost mehaničkog ponavljanja tuđih rječi. Da sumnja, pretpostavlja i ispituje. Da što češće pitanje "Po kojoj to ide formuli?" zamijeni pitanjem "Što, točno, ovo zapisano znači?".

S namjerom da se učenika uvede u takav način čitanja, počinje se s geometrijom naučenom u nižim razredima osnovne škole. Sugerira se svaki put upitati "Odakle znamo da je to istina?" Dokazi ne spadaju u knjigu ovakvog tipa, pa se ponekad samo navodi ideja dokaza, nekad provodi uvjerljivo rezoniranje, a nekad sugerira samo provjera, makar i približna i za konačni broj slučajeva. Ne misli se učeniku to podmetnuti kao dokaz, već se samo inzistira na zornim predožbama i osposobljavanju za predviđanje granica unutar kojih bi se rezultat mogao nalaziti. Dakle, želi ga se osposobiti za razumijevanje dokaza i razviti potrebu traganja za njim, ako već nije uspio samostalno dokazati tvrdnju za čiju istinitost ima jakih indicija.

Nakon osnova planimetrije, naučenih još u osnovnoj školi, prelazi se na temelje stereometrije. Razlog je tome što se žele naglasiti neke analogije između planimetrije i stereometrije. Misao vodilja ovdje je izbjeći zbunjivanje učenika naizgled velikim brojem formula tamo gdje sve može riješiti samo njih nekoliko.

Umjesto podcjenjivanja učenika implicitnim stavom da on nije sam sposoban upisati umjesto oznake za površinu baze B izraz za površinu kvadrata, kad se o njemu radi, a trokuta ako je o trokutu riječ, želi se potaknuti učenika na samostalnost. Zato se ukazuje na činjenicu da i prilično raznovrsna tijela imaju istu formulu za izračunavanje volumena.

Zbog praktičnih i asocijativnih razloga koriste se, samo za potrebe ove knjige, izrazi koji nisu uobičajeni. Primjerice, tijela koja izgledaju kao stupovi (prizme i valjci, bilo uspravni, bilo kosi) ponekad se imenuju zajedničkim imenom **stupasta** (ili **prizmatična**) tijela. Namjera je tu naglasiti ono što je takvim tijelima zajedničko, bez obzira na postojeće razlike. Važno zajedničko svojstvo je da su svi presjeci tijela ravninom paralelnom s bazom međusobno sukladni. Za račun je značajno da je njihova zajednička formula za računanje volumena $V = B \cdot v$, pri čemu je B površina baze, v visina na bazu.

Drugi neobičan naziv, **šiljasta tijela**, ovdje se usprkos konvenciji, koristi za piramide i stošce, uspravne ili kose. Važno nam je da i tu učenik razumije kako je, unatoč mogućoj raznovrsnosti njihovih oblika, formula za računanje volumena jedinstvena

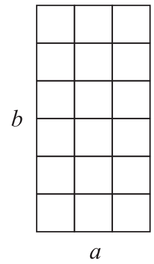
$V = \frac{1}{3}B \cdot v$, dok su presjeci ravninama paralelnima s bazom svi međusobno slični likovi.

Zajednička formula za oplošje stupastih tijela $O = 2B + Pl$ (Pl je oznaka za plašt) te za oplošje šiljastih tijela $O = B + Pl$ zahtijeva dodatno računanje površine plašta. Kod prizmi i piramida plašt se sastoji od mnogokuta i time zadatak postaje planimetrijski. Valjku i stošcu treba samo plašt razrezati po izvodnici, da bi ga se razvilo u ravninu. Onda je još jedino pitanje ima li plašt, razvijen u ravnini, tako jednostavan oblik da naše znanje planimetrije bude dovoljno za izračunavanje njegove površine. Plašt uspravnog valjka razvija se u pravokutnik, plašt uspravnog stošca u kružni isječak.

Zadaci iz stereometrije se često svode na uočavanje, uspoređivanje ili traženje zajedničkih elemenata poznatih ravninskih likova. Bitne trodimenzionalne predodžbe su one o volumenu spomenutih tijela, tijela koja se mogu sastaviti od takvih, ili kugle. Još samo na jednu stvar treba skrenuti pažnju. Prepoznavanje ili mjerenje kuta između pravca i ravnine te kuta između para neparalelnih ravnina zahtijeva svođenje bitno trodimenzionalnih zapažanja i pojmova na ravninsko mjerenje kuta.

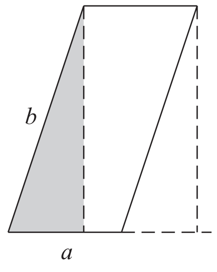
Mnogo srednjoškolskih zadataka iz stereometrije ostaje neriješeno, uza sve potrebne formule pred očima, jer učenik ne uspijeva prepoznati kut o kojemu je u zadatku riječ. Objašnjenje o određivanju kuta valja čitati polako, prateći ga bar pogledom na slici, ako se već učenik nije odlučio izraditi ili potražiti model geometrijskog tijela po kojem bi mogao povlačiti prstom.

1.2. Osnovni likovi



Prisjetimo se nižih razreda osnovne škole, kad smo dijelu zida kupaone oblika pravokutnika, popločenom kvadratnim keramičkim pločicama stranice 1 dm, površinu P određivali brojenjem pločica. Idući korak bila je konstatacija da se brojanje može izbjeći, uočimo li da se radi o 6 redova od po 3 pločice u svakom.

Za dimenzije pravokutnika a, b imali smo $P = a \cdot b$, čak i ako a i b nisu bili cijeli brojevi. Za racionalne a, b trebalo je pločice podijeliti na manje pravokutnike, da bi se vidjelo kako formula i dalje vrijedi. Ipak, nije je pametno učiti napamet. Lako se deducira kad je potrebno, a nije dovoljno općenita.



Za dio zida iste visine 6 dm i jedne stranice a koja je još uvijek 3 dm, ali oblika paralelograma koji nema prave kutove, ona preostala stranica b bit će dulja od 6 dm. Koliko točno, u osnovnoj se školi može mjeriti. Ipak to mjerenje nema smisla, zanima li nas visina. Sivi trokut otpiljen i premješten na novu poziciju pokazuje da površina ostaje $18\,\text{dm}^2$, ali to ovaj put nije umnožak stranica, nego jedne stranice i one visine koja je na nju okomita.

Razumno je pamtiti da za paralelogram vrijedi $P = a \cdot v_a$ i primijetiti, da je $v_a = b$ samo ako je već stranica b bila okomita na stranicu a.

Za računanje površine paralelograma trebamo prethodno izmjeriti neke veličine od kojih nisu baš sve ucrtane na slici paralelograma. Visinu, tj. dužinu koja se pod kutom od 90° spušta iz bilo koje točke jedne stranice do njoj paralelne, ili do pravca koji je u produžetku te paralelne stranice, treba prvo nacrtati, mislimo li je mjeriti.

Predodžba o površini onda sadrži i nešto apstrakcije, mogućnost zamišljanja visine koju ne vidimo, rezanja pločica govorimo li o likovima omeđenim dužinama ili još više apstrakcije govorimo li o krugu. Možemo možda zamišljati da dva lika imaju jednaku površinu kad nam je potrebna jednaka količina laka da ih prelakiramo jednako debelim slojem.

Kad je riječ o krugu, prihvatljivo je da krug većeg polumjera ima veću površinu, a krug manjeg polumjera manju. Polumjer se može mjeriti npr. centimetrima. Površina se izražava u cm^2. Razumno je pretpostaviti da je površina kruga polumjera r proporcionalna broju r^2. Nije lako vidjeti da je konstanta proporcionalnosti π, odnosno da je ta površina točno $P = r^2\pi$, niti sagledati prirodu broja π [1].

Zašto baš π, od svih brojeva, ima slovo koje koristimo umjesto njegove numeričke vrijednosti?

Prvo, nije π jedini takav. Vezano uz eksponencijalne i njima inverzne logaritamske funkcije postoji oznaka e za jedan broj.

Oba spomenuta broja zaslužuju posebnu oznaku jer su važni, a nisu racionalni, tj. ne mogu se dobiti dijeljenjem dvaju cijelih brojeva. To znači da ih se ne može prikazati decimalnim brojem s konačno mnogo znamenaka, niti beskonačnim u kojem bi se grupa znamenaka periodički ponavljala. Svaki numerički zapis je nužno pogrešan. Odlučimo li se na dvije decimale točnosti pa pišemo i računamo $\pi \approx 3.14$, korisnik rezultata naših izračuna ne može više računati točnije. Ostavimo li u rezultatu zapis π, korisnik će se odlučiti na onu točnost koja je za njegovu primjenu potrebna. Iz istog razloga se savjetuje da se rezultati računa koji sadrže druge iracionalne brojeve (takve realne brojeve koji nisu racionalni) kao npr. $\sqrt{2}$ ili $\sqrt{3}$ ostave u zapisu npr. $5\sqrt{2}$ ili $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ovdje zapis ne smanjuje točnost, nego ostavlja korisniku na volju odabrati željenu točnost računa.

Toliko priče o broju π, a glavnina priče tek predstoji na fakultetu.

U razumijevanju matematike vjerovati je štetno. Treba sumnjati i provjeravati rečeno, dokazivati ili barem težiti da brojnim konkretnim slučajevima tvrdnje učinimo uvjerljivima.

Kad se radi o broju π, dokazi nadilaze srednjoškolsko gradivo, a krug i kružnica previše su česti i važni u primjeni da bi se prešućivali. Iznimno, predlaže se odgoditi dokaz do iza mature i na povjerenje prihvatiti da je površina kruga $P = r^2\pi$, pri čemu je π iracionalni broj, približne vrijednosti 3.14, zaokružimo li ga na dvije decimale.

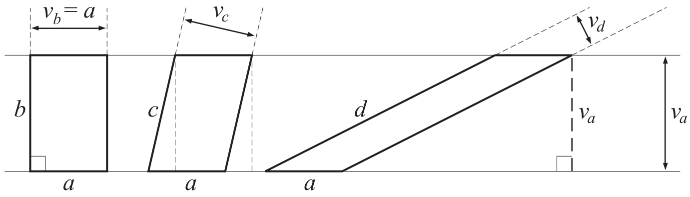
Opseg pak svakog kruga π puta je veći od njegovog promjera, tj. $O = \pi \cdot 2r$ ili uobičajeno $O = 2r\pi$.

Opsezi likova čiji se rub sastoji od dužina mogu se lako mjeriti i u nižim razredima osnovne škole. Sve je tu, na slici. Valja samo izmjeriti i zbrojiti sve dužine koje čine rub lika. Smiješno bi bilo učiti formule napamet.

---

[1] Čovječanstvo se tako dugo mučilo tražeći odgovore na ova pitanja da se trenutak rađanja svijesti o postojanju i ulozi broja π u pojedinoj kulturi smatra bitnim pokazateljem razine do koje je ta kultura stigla. Štoviše, pokušaj kontaktiranja s možebitnim vanzemaljskim civilizacijama uključuje slanje u Svemir pločice s osnovnim podacima o ljudskom rodu. Tu je i broj π, zapisan binarno. Ne može se, naime, očekivati da svaka inteligentna vrsta ima i deset prstiju i odluči se za dekadski brojevni sustav. Ali svaka vrsta vjerojatno zna za dualitet: nečega ima ili nema, pa je iz tog razloga odabran binarni sustav.

Ovoliko priče o poznatim površinama likova da se olakša prijelaz na razgovor o volumenima tijela. Pritom se oslanjamo na što više vizualnih predodžbi i zapažanja, uz minimum formula koje treba upamtiti.



Ova tri paralelograma smještena su između dva paralelna pravca međusobno udaljena v_a tako da im na pravcima leže po dvije stranice. Ako su za svaki od nacrtanih paralelograma te stranice dugačke a, sva tri paralelograma imaju istu površinu

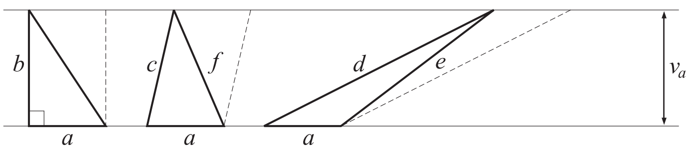
$$P = a \cdot v_a.$$

Za prvi paralelogram $v_a = b$. Za preostala dva je visina, koja se pod pravim kutom spušta od gornjeg do donjeg pravca, kraća od stranice čiji nagib prema tim istaknutim paralelama nije 90°.

Svaki od paralelograma ima i drugi par paralelnih stranica koji je na isti način moguće istaknuti. Njihova međusobna udaljenost je visina na preostalu stranicu (koja nije a). Površina se mogla izračunati i pomoću nje,

$$P = b \cdot v_b, \qquad P = c \cdot v_c, \qquad P = d \cdot v_d.$$

Opseg je zbroj svih stranica, pa ova tri paralelograma imaju jednake površine ali različite opsege. Od beskonačno mnogo paralelograma koje bi bilo moguće nacrtati tako da im stranice duljine a leže na paralelama, najmanji opseg ima pravokutnik. Među njima ne postoji paralelogram najvećeg opsega jer se uvijek može još više ukositi, čime dvije stranice postaju još dulje.



Dijagonala povučena u svakom od paralelograma na slici prepolavlja mu površinu. Svi ovi trokuti imaju istu površinu

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a.$$

Nešto drugačiju sliku, ali isti zaključak, dobili bismo izborom druge dijagonale paralelograma.

Visina na stranicu a, uvijek pod pravim kutom na tu stranicu (ili njezin produžetak), samo je u prvom slučaju na slici isto što i stranica $v_a = b$. U drugim slučajevima na slici opažamo da je $v_a < c$, $v_a < d$.

Površine triju trokuta s ove slike iznose točno polovicu površina paralelograma s prethodne slike.

Razmisli iznosi li opseg prvog trokuta s ove slike polovicu opsega prvog paralelograma s prethodne slike. Ako da – čime to dokazuješ? Ako ne, iznosi li više ili manje? Je li slično i za ostale slučajeve? Možeš li konstruirati primjer u kojem bi se opažalo suprotno?

Zadatak 1. Težišnica trokuta, dužina koja spaja vrh trokuta s polovištem suprotne stranice, dijeli trokut na dva manja trokuta.

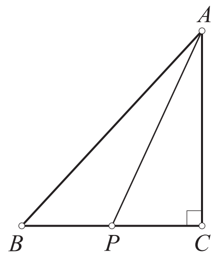
a) Jesu li ti trokuti općenito sukladni?

b) Imaju li ta dva trokuta u općem slučaju jednake površine?

Rješenje: Želimo li dokazati općenit zaključak, takav koji vrijedi za sve trokute, dobro je izbjeći skicu s posebnim ili naročito pravilnim trokutom (jednakostraničnim, jednakokračnim ili pravokutnim). S druge strane, pokušavamo li općeniti zaključak *opovrgnuti*, dovoljno je navesti jedan protuprimjer. Zato nije loše potražiti jednostavan slučaj, koji ne mora biti općenit.

a) Tvrdimo da općenito težišnica ne mora dijeliti trokut na dva sukladna trokuta, tj. da možemo navesti primjer kad nije tako. U toj namjeri možemo si dozvoliti promatranje pravokutnog trokuta sa slike.

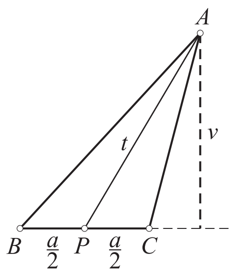
Ako je P polovište stranice $\overline{BC}$, onda je $\overline{AP}$ težišnica.



Dokaz da $\triangle BPA$ i $\triangle PCA$ nisu sukladni je u tome da je drugi pravokutan, a prvi nije. Ako nam to ne izgleda baš sasvim sigurno, onda ustanovimo da u pravokutnom trokutu preostala dva kuta moraju biti šiljasta, pa je zato $\sphericalangle BPA$ tupi. I u tupokutnom su trokutu dva preostala kuta nužno šiljasta, pa u $\triangle BPA$ pravog kuta nema.

Dakle, težišnica ne mora dijeliti trokut na dva sukladna trokuta (ali može, u posebnom slučaju).

b) Crtkano označena okomica na pravac – nosilac stranice a povučena iz vrha A je visina za $\triangle BPA$ i također za $\triangle PCA$. Trokuti imaju zajedničku visinu v. U $\triangle BPA$ to je visina na stranicu $\overline{BP}$, u $\triangle PCA$ visina na $\overline{PC}$. Ali $|BP| = |PC| = \dfrac{a}{2}$.



Oba trokuta imaju površinu

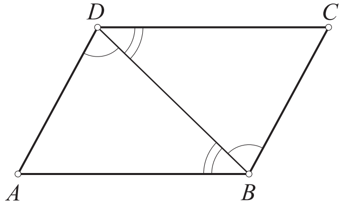
$$P = \frac{\frac{a}{2} \cdot v}{2} = \frac{av}{4}.$$

Težišnica mora uvijek dijeliti zadani trokut na dva trokuta iste površine.

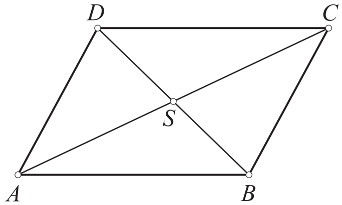
Zadatak 2. Dokaži da dijagonale paralelograma dijele paralelogram na 4 trokuta međusobno jednakih površina.

Napomena. Takva tvrdnja izrečena bez nekih posebnih uvjeta na paralelogram interpretira se kao tvrdnja koja vrijedi općenito, za bilo koji paralelogram.

Rješenje:



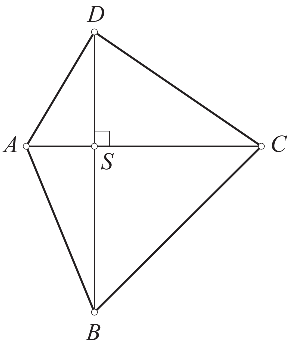
Jedna dijagonala dijeli paralelogram na dva sukladna trokuta. Imaju, naime jednu stranicu zajedničku i uz nju dva para jednakih kutova. Zato su im površine jednake.



Druga dijagonala raspolavlja prvu $\overline{BD}$, pa je $\overline{SC}$ težišnica $\triangle BCD$ i $\overline{SA}$ težišnica $\triangle BDA$. Trokuti DSC i SBC nisu sukladni (čak ni slični), ali imaju iste površine, kao što je pokazano u prethodnom zadatku. Zato svaki od trokuta SAB, SBC, SCD, SDA ima površinu koja je jednaka čevrtini površine paralelograma $ABCD$.

Zadatak 3. $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ su dužine koje se sijeku pod kutom od 90°. Ako je $|AC| = e$, $|BD| = f$, izrazi površinu četverokuta $ABCD$ pomoću e i f.

Rješenje: $\overline{SD}$ je visina $\triangle ACD$, pa je njegova površina



$$P(\triangle ACD) = \frac{|AC| \cdot |SD|}{2}.$$

Slično je

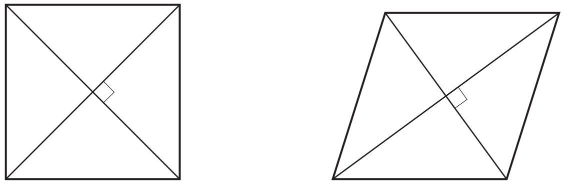
$$P(\triangle ACB) = \frac{|AC| \cdot |SB|}{2}.$$

Površina zadanog četverokuta je

$$\begin{aligned} P(ABCD) &= P(\triangle ACD) + P(\triangle ACB) \\ &= \frac{|AC|}{2}(|SD| + |SB|) = \frac{|AC|}{2} \cdot |BD| = \frac{e \cdot f}{2}. \end{aligned}$$

Zadatak 4. Kojim paralelogramima se površina može (osim na način $P = a \cdot v_a$ ili $P = b \cdot v_b$) računati još i pomoću njihovih dijagonala e, f na način $P = \dfrac{e \cdot f}{2}$?

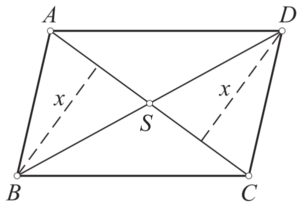
Rješenje: U prošlom zadatku pokazali smo da je formula valjana ako se dijagonale sijeku pod kutom od 90°. To je slučaj kod kvadrata i romba.



Dokaz slijedi iz činjenice da jedna dijagonala dijeli ove četverokute na dva sukladna jednakokračna trokuta.

Ako pak dijagonale nisu okomite, onda je (slično kao u zadatku 3):

$$P = P(\triangle ACD) + P(\triangle ACB) = \frac{|AC|}{2} \cdot x + \frac{|AC|}{2} \cdot x.$$



Ali kako je $x < |SB| = |SD|$:

$$P < \frac{|AC|}{2}\left(|SD| + |SB|\right) = \frac{|AC|}{2}|BD|.$$

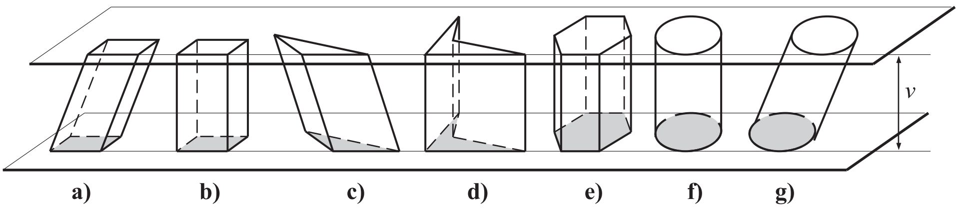
Dakle $P < \dfrac{e \cdot f}{2}$ ako dijagonale nisu okomite.

1.3. Stupasta tijela

Riječ **tijelo** podrazumjeva prostornost, dakle trodimenzionalnost. Tijelo je dio prostora omeđeno plohama. U slučaju koji ćemo prikazati idućom slikom, potrudit ćemo se da sva tijela nalikuju na stupove. Možda malo neobičnog izgleda. Ponekad ukošena, nestandardnih presjeka, ali ipak takva da čuvaju osnovnu karakteristiku stupa: sukladnost gornje i donje baze (ili osnovke) i svih njima paralelnih presjeka. Uočite ovdje analogiju s prikazom paralelograma u prethodnom poglavlju.

Plašt, koji uz gornju i donju bazu ograničava dio prostora, pravčasta je ploha. To znači da se sastoji od jedne dužine koja spaja rubnu točku donje s rubnom točkom gornje baze i skupa jednako dugačkih, njoj paralelnih dužina koje čine to isto, za svaku od točaka ruba (oboda, granice) npr. donje baze. Svakoj od tih dužina ime je izvodnica. Takva ploha se sastoji od dijelova ravnine, ili se može razrezati duž neke od izvodnica i razmotati u ravninu.

Uzet ćemo slobodu da opisana geometrijska tijela, koja donekle nalikuju na stupove, samo za potrebe ovog teksta nazivamo **stupastima**.



Na prvih pet tijela **a)**, **b)**, **c)**, **d)** i **e)** plašt se sastoji od nekoliko paralelograma. Na posljednja dva, **f)** i **g)**, plaštevi su zakrivljene plohe, i tek nakon što se razrežu po izvodnici mogu se razmotati i položiti u ravninu. Sa sferom (plohom koja ograničava prostor kugle) to nije moguće učiniti [2] .

Posljednja dva tijela, **f)** i **g)**, nemaju vrhove. Baze su im krugovi, tijela se zovu valjci. Kod preostalih stupastih tijela sa slike vrhovi su točke koje su zajedničke najmanje trima mnogokutima, plohama tijela. Stupasta tijela kojima su n-terokuti baze, imaju po n vrhova na donjoj i isto toliko na gornjoj bazi [3] .

Stupasta tijela omeđena mnogokutima zovemo prizme. Isključimo li iz razmatranja ona stupasta tijela čije su baze likovi kakvi se nisu izučavali u osnovnoj školi, preostaju nam za promatranje samo dvije vrste stupastih (ili prizmatičnih) tijela: prizme, ako su im baze mnogokuti te valjci, ako su baze krugovi. Svako od tih tijela može biti uspravno, ako su izvodnice okomite na ravninu baze, ili koso, ako nisu.

One izvodnice koje spajaju vrhove, ako vrhovi postoje, zovu se bočni bridovi tijela. Na posljednje dvije slike nema vrhova, pa onda nema ni bridova. Izvodnica ima i to beskonačno mnogo jednako dugačkih i međusobno paralelnih.

Ako postoji dužina koja spaja dva vrha a leži u donjoj ili gornjoj bazi (ili osnovki), zove se osnovni brid.

Visina stupastog tijela je međusobna udaljenost paralelnih ravnina u kojima leže baze tijela. Da bismo je izmjerili, potrebno je prvo spustiti okomicu iz neke točke gornje baze na ravninu donje baze. Ponekad je takva okomica brid tijela ili njegova izvodnica, kao na slikama **b)**, **d)**, **e)**, **f)**. Tada se kaže da je tijelo uspravno. Tijela **a)**, **b)**, **c)**, **d)** i **e)** omeđena mnogokutima su prizme. Tijela **f)** i **g)** čije su baze krugovi su valjci. Uspravne prizme su na slikama **b)**, **d)** i **e)**, a preostale, **a)** i **c)**, su kose prizme. Tijelo **f)** je uspravni valjak (često se kaže samo valjak). Tijelo **g)** je kosi valjak.

Općenito bi geometrijsko tijelo moglo biti pravilnije od promatranih stupastih tijela, poput kugle, ili možda nepravilnije poput kamena, primjerice, da u oba slučaja nema dvije paralelne baze. Tada gube smisao i pojmovi koji su se pozivali na baze poput pojmova plašt, bočni i osnovni brid, visina na bazu, izvodnica, uspravnost [4] .

[2] Ta činjenica predstavlja problem kartografima, koji pokušavaju velike dijelove površine Zemlje prikazati kartom, koja je dio ravnine. Takav zadatak nemoguće je obaviti točno.

[3] Ova rečenica nema potrebnu općenitost u razmatranju geometrijskih tijela jer svako tijelo nema nešto što bi se moglo zvati bazom.

[4] Uspravnost je pojam vezan uz smjer gravitacijske sile, pa prije spada u fiziku, nego u matematiku. Nama se čini spretnim da stupasto tijelo zamišljamo kako stoji na jednoj od baza kako bismo mogli govoriti o gornjoj ili donjoj bazi. Nema razloga da zaista stoji tako. Naprotiv, ima dobrih razloga da valjak koji je dio kotača vozila ili valjak koji ravna svježe asfaltiranu cestu ne stoji tako.

I napokon, prizmu koja je istovremeno uspravna i ima bazu koja je pravilni mnogokut zovemo pravilnom prizmom. Na našoj je slici prizmi **a)** baza pravilan mnogokut – kvadrat, ali prizma nije uspravna. Prizma **d)** je uspravna, ali joj baza nije pravilan četverokut. Samo **b)** i **e)** su pravilne prizme. Prema vrsti mnogokuta koji čine bazu **b)** je četverostrana, **e)** je šesterostrana prizma.

Pitanje je zašto toliko priče o stupastim tijelima koja promatramo kao skup, za razliku od svih ostalih. Zato, jer je dovoljna jedna jedina formula za računanje volumena stupastih tijela, istinita za svako od njih. Ako je B oznaka za površinu baze određenog stupastog tijela (prizme ili valjka), a v njegova visina (udaljenost između ravnina u kojima su baze), onda je volumen tijela jednak:

$$V = B \cdot v.$$

Ako svih sedam stupastih tijela sa slike imaju baze istih površina B (koje nipošto ne moraju biti sukladne), i istu visinu, volumeni su im jednaki. Usporedi to sa slikom, komentarima i zajedničkom formulom površine svih paralelograma jednako dugačkih baza i iste visine.

U tablicama formula svijest o jednoj jedinoj, zajedničkoj formuli za volumen prizmi i valjaka često je zamućena suvišnim detaljiziranjem. U zadacima o prizmama i valjcima nije problem odrediti površinu baze B ako se zna izračunati površina paralelograma, trokuta i kruga.

Zadatak 1. Pravilnoj šesterostranoj prizmi su svi bridovi jednaki. Najdulja prostorna dijagonala dugačka je $\sqrt{45}\,\mathrm{cm}$. Izračunaj volumen:

a) prizme;

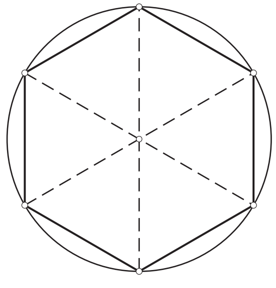
b) prizmi opisanog valjka;

c) prizmi upisanog valjka;

d) najmanje kutije oblika pravokutne prizme (kvadra) u koju se prizma može zapakirati tako da dvije paralelne plohe plašta prizme leže na plaštu kvadra, a baze prizme leže na bazama kvadra.

Rješenje: Ova prizma je uspravna, a baza joj je pravilni šesterokut. Svi bridovi su jednako dugački, pa ako je brid na bazi a (stranica šesterokuta), onda je i visina prizme a. Crtkane linije od središta opisane kružnice do svakog od vrhova dijele šesterokut na šest sukladnih jednakostraničnih trokuta (dokaži!). Površina baze prizme je

$$B = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2},$$

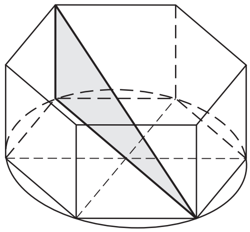


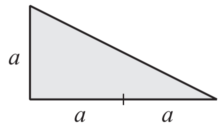
a volumen prizme

$$V = B \cdot v = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}.$$

Još valja odrediti a.

Najveća prostorna dijagonala uzdiže se nad najvećom dijagonalom šesterokuta dugačkom $2a$.





Uspravnost prizme garancija je da je trokut označen na slici pravokutan. Hipotenuza nam je $\sqrt{45}$, katete a, $2a$. Zato je

$$\sqrt{45}^2 = a^2 + (2a)^2$$
$$a = 3\,\text{cm}.$$

a) Prizma ima volumen

$$V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}^3.$$

b) Označimo s V_v volumen prizmi opisanog valjka. Visina tog valjka je također a, površina baze opisanog valjka je $B_v = a^2\pi$. Stoga je:

$$V_v = B_v \cdot a = a^2\pi \cdot a = a^3\pi = 27\pi\,\text{cm}^3.$$

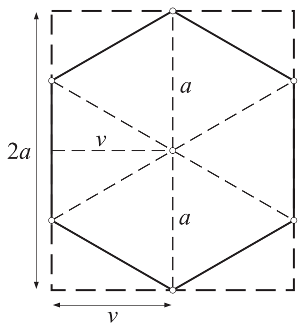
c) Šesterokutu upisana kružnica ima polumjer dugačak kao visina jednakostraničnog karakterističnog trokuta, $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Zato je površina baze upisanog valjka

$$B_u = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \pi = \frac{3\pi a^2}{4};$$

a volumen V_u tog valjka

$$V_u = B_u \cdot a = \frac{3\pi a^2}{4} \cdot a = \frac{3\pi a^3}{4} = \frac{81\pi}{4}\,\text{cm}^3.$$

d) Ako dvije paralelne plohe plašta trebaju ležati na plaštu kvadra, onda dvije paralelne stranice baze trebaju ležati na rubu pravokutnika – baze kutije oblika kvadra.



Jedna stranica pravokutnika dugačka je kao dvije visine karakterističnog trokuta:

$$2v = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Druga stranica istog pravokutnika dugačka je:

$$\frac{a}{2} + a + \frac{a}{2} = 2a.$$

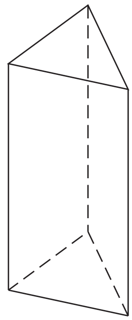
Površina baze kvadra je:

$$B_K = a\sqrt{3} \cdot 2a = 2\sqrt{3}a^2.$$

Volumen kvadra je:

$$V_K = B_K \cdot a = 2\sqrt{3}a^2 \cdot a = 2\sqrt{3}a^3 = 54\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^3.$$

Zadatak 2. Napiši formulu za volumen pravilne trostrane prizme, kojoj su osnovni bridovi duljine a, a bočni $3a$.



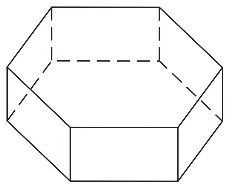
Rješenje:

$$V = B \cdot v, \quad B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad v = 3a;$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 3a = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}.$$

Zadatak 3. Napiši formulu za osnovni brid pravilne šesterostrane prizme, kojoj su bočni bridovi upola kraći od osnovnih bridova duljine a, a volumen joj je V.

Rješenje:



$$V = B \cdot v, \quad B = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}, \quad v = \frac{a}{2};$$

$$V = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{cm}^3;$$

$$4V = 3a^3\sqrt{3}, \quad \frac{4V}{3\sqrt{3}} = a^3, \quad a = \sqrt[3]{\frac{4V}{3\sqrt{3}}}.$$

Rezultat se može još malo srediti. Npr.

$$3\sqrt{3} = 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}, \quad \sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{3}; \qquad a = \frac{\sqrt[3]{4V}}{\sqrt{3}}.$$

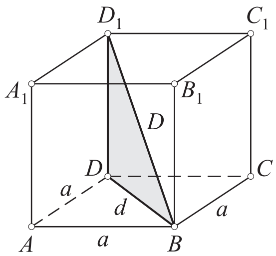
Mogao bi se još i racionalizirati nazivnik.[5]

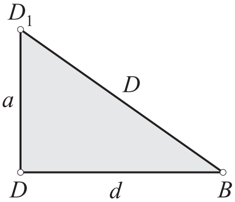
Ne znači nužno ni da je rezultat pogrešan ako ga se ne vidi odmah među ponuđenima. Možda se radi o istom broju zapisanom drugačije.

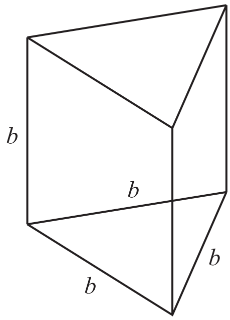
Zadatak 4. Pravilna trostrana prizma ima sve bridove jednake duljine. Kolika je ta duljina ako je volumen prizme jednak volumenu kocke čija je prostorna dijagonala dugačka D?

[5] Ova dva načina pisanja broja a sugeriraju učeniku da ne bude brzoplet u ocjeni svog rezultata. Nije pouzdana nada u točnost rezultata samo na osnovu toga što on postoji među ponuđenima. Redovno se nude i rezultati proizašli iz najčešćih pogrešaka.

Rješenje: Označimo brid kocke s a, a brid pravilne trostrane prizme s b.







Ako je d plošna dijagonala kocke, onda je $D^2 = d^2 + a^2$.

Gledajući trokut u bazi $\triangle ABD$: $d^2 = a^2 + a^2$. Dakle $D^2 = 3a^2$, $a = \dfrac{D}{\sqrt{3}}$.

Označimo površinu baze kocke s B_K. Volumen kocke:

$$V_K = B_K \cdot a = a^2 \cdot a = a^3, \quad V_K = \left(\frac{D}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{D^3}{3\sqrt{3}}.$$

Ako je V_P volumen prizme, B_P površina baze prizme, onda

$$V_P = B_P \cdot b = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \cdot b = \frac{b^3\sqrt{3}}{4}.$$

U zadatku se traži b, a kako su volumeni jednaki, tj. $V_P = V_K$:

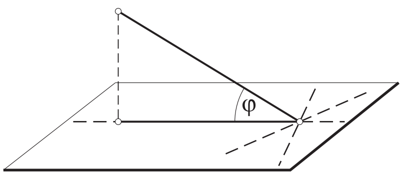
$$\frac{b^3\sqrt{3}}{4} = \frac{D^3}{3\sqrt{3}},$$

slijedi da je

$$b = D\sqrt[3]{\frac{4}{9}}.$$

U idućem zadatku govorit ćemo o kosom valjku. Koliko je nagnut? Trebat će izmjeriti **kut između jedne njegove izvodnice i ravnine baze**. Kutomjer mjeri kut između dva pravca kroz istu točku. Jedan pravac je izvodnica. Koji je drugi? Trebao bi proći kroz probodište te izvodnice s ravninom baze i ležati u toj ravnini. Ali takvih pravaca ima beskonačno mnogo i s izvodnicom zatvaraju različite kutove.

Najmanji među njima je kut duž kojeg bi štap položen po izvodnici padao pod utjecajem sile teže na vodoravno postavljenu ravninu baze. Ili, izbjegavajući pojmove fizike, **kut između izvodnice i njezine ortogonalne (okomite) projekcije na ravninu**[6]. Dakle: penjemo se po

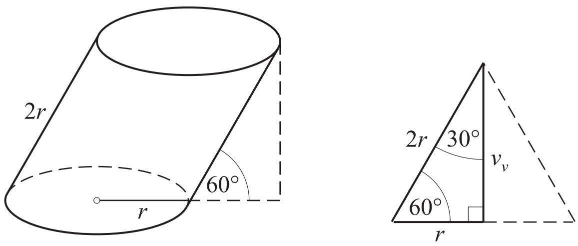


[6] Ne mora se raditi o izvodnici. Kut između pravca i ravnine mjeri se (definira se) kao kut između tog pravca i njegove ortogonalne projekcije na zadanu ravninu.

izvodnici do bilo koje njezine točke, npr. najviše. Iz te točke spustimo okomicu na ravninu baze i označimo probodište (sjecište, zajedničku točku). Spojimo ovo probodište s probodištem izvodnice i ravnine. Dobili smo dužinu koja određuje smjer jednog pravca u ravnini. Kut između ovog dobivenog pravca i izvodnice je kut izvodnice prema ravnini baze.

Zadatak 5. Kosi valjak nagnut je pod kutom od 60° prema ravnini baze. Izvodnica je dugačka kao promjer baze. Ako je r polumjer baze tog kosog valjka, izračunaj polumjer R kugle jednakog volumena.

Rješenje: $V_V = B_V \cdot v_V$ (V_V volumen valjka, B_V površina baze valjka, v_V visina valjka)



$$v_V = \frac{2r \cdot \sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$$
$$V_V = r^2\pi \cdot r\sqrt{3} = r^3\pi\sqrt{3}.$$

Volumen kugle je $V_K = \dfrac{4R^3\pi}{3}$. Ako je $\dfrac{4R^3\pi}{3} = r^3\pi\sqrt{3}$ onda je

$$R^3 = \frac{3\sqrt{3}\,r^3}{4} \quad \text{i} \quad R = \frac{r\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}.$$

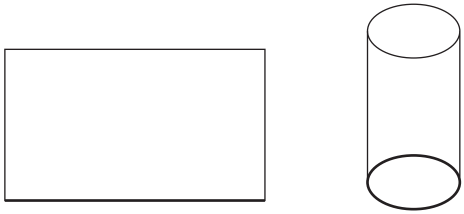
Rezultat se može zapisati i drugačije. Postupak je sličan zadatku 3.

Napomena. Visinu kosog valjka izračunali smo koristeći zapažanje da 60° nagiba izvodnice i 90° okomice koja određuje ortogonalnu projekciju izvodnice na ravninu baze sugeriraju promatranje jednakostraničnog trokuta čija je stranica dugačka $2r$, koliko i izvodnica. Zadatak koji bi umjesto nagiba od 60° imao npr. nagib od 50°, zahtijevao bi poznavanje osnova trigonometrije i upotrebu džepnog računala.

Još jedna napomena odnosi se na relativno dugo i dosadno objašnjenje načina na koji se mjeri kut između pravca i ravnine. Knjiga o matematici bi trebala imati više formula a manje priče? Možda. Ali sve potrebne formule maturantima su dostupne. Prilična je poteškoća ne uspiju li naći trokut na koji bi ih primijenili. Može se dogoditi da kasnije zadaci traže vraćanje baš na taj dosadni dio teksta.

Oplošje tijela predstavlja zbroj površina svih ploha koje čine granicu tog tijela. Stupastim tijelima (prizmama i valjcima) zajedničko je to da im u granične plohe spadaju dvije međusobno sukladne baze (dakle, i jednakih površina) i ostatak granične plohe koja se može razviti u ravninu a zove se **plašt** (ili pobočje). Zapisati $O = 2B + Pl$ je točno i pomalo smiješno. Pametnije je pogledati tijelo ili njegovu skicu, nego ovih nekoliko slova. Kod prizmi se plašt sastoji od poznatih ravninskih likova, pri čemu računanje njihove površine ne predstavlja problem. Samo kod valjka plašt nije dio ravnine, nego se može "ispeglati" i položiti u ravninu. Da bi se to vidjelo, korisno je pravokutni arak papira saviti da mu se dvije paralelne stranice poklope. Moguće ga je saviti u plašt uspravnog valjka.

Ako smo papir dimenzija a, b kao na slici savili i zalijepili zajedno stranice duljine b, pa pritom pazili da stranicu duljine a namjestimo kružno, onda je a opseg dobivene kružnice. Plašt valjka imat će visinu b i polumjer baze takav da je $a = 2r\pi$, tj. $r = \dfrac{a}{2\pi}$.



Obrnuto, ako već imamo uspravni valjak od kartona kojem smo uklonili dno i poklopac, tako da ostane samo plašt, možemo taj plašt razrezati po izvodnici i razmotati ga u ravninu. Ukoliko je valjak imao visinu v i polumjer baze r, razmotani plašt bit će pravokutnik dimenzija v, $2r\pi$. Površina plašta je u tom slučaju $Pl = 2r\pi \cdot v$.

Oplošje uspravnog valjka sastoji se od dvije jednake kružne baze i pravokutnog plašta, tj.

$$O = 2r^2\pi + 2r\pi v.$$

Formula iz tablica zapisana na način da se u ovom izrazu izluči zajednički faktor je sigurno kraća, možda ljepša, ali slabije asocira na dva kruga i pravokutnik što je za razumijevanje prilično bitno.

Naime, oni koji pokušavaju gledanje i razmišljanje zamijeniti formulama, bez greške odgovaraju na pitanja o oplošju valjka, ali ne uvijek o oplošju polovice valjka, čaše ili cijevi. Nikakav niz slova ne može zamijeniti gledanje.

Uspravni valjak je **jednakostraničan**, ako se njime može začepiti kvadratna rupa u ogradi, tj. ako mu je debljina jednaka visini ili, matematički rječnikom, ako je $v = 2r$. Na takav valjak odnosi se idući zadatak.

Zadatak 6. Jednakostraničnom valjku polumjer baze je $10\,\mathrm{cm}$. Izračunaj:

a) volumen i oplošje valjka;

b) volumen i oplošje posude koja se dobiva iz zadanog valjka uklanjanjem gornje baze;

c) volumen i oplošje jednog od dvaju dobivenih tijela nastalih presijecanjem valjka ravninom okomitom na bazu, kroz os simetrije;

d) volumen i oplošje manjeg od dvaju tijela koja se dobiju presijecanjem valjka ravninom okomitom na bazu, na udaljenosti $5\,\mathrm{cm}$ od osi simetrije.

Rješenje: **a)** Uvedimo oznake V_a, O_a za volumen i oplošje koji se traže u zadatku **a)**, te slično i za zadatke **b)**, **c)**, **d)**.

$$V_a = r^2\pi \cdot v = r^2\pi \cdot 2r = 2r^3\pi = 2 \cdot 10^3\pi = 2\,000\pi\ \mathrm{cm}^3;$$

$$O_a = 2r^2\pi + 2r\pi v = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot 2r = 6r^2\pi = 600\pi\ \mathrm{cm}^2.$$

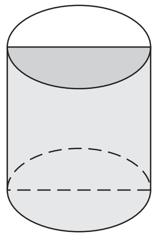
b) Uklanjanje baze nema nikakav utjecaj na volumen. Točno istu zapremninu vode, brašna ili drugoga možemo usipati u posudu i ako postoji poklopac i ako ne postoji.

$$V_b = V_a = 2\,000\pi \text{ cm}^3.$$

Na oplošje ima utjecaj uklanjanje baze. Tu se traži npr. količina laka potrebna da se cijela posuda izvana prelakira jednoličnim slojem. Nema poklopca koji treba lakirati, pa

$$O_b = B + Pl = r^2\pi + 2r\pi v = r^2\pi + 2r\pi \cdot 2r = 5r^2\pi = 500\pi \text{ cm}^2.$$

c) $V_c = \dfrac{r^2\pi}{2} \cdot v = \dfrac{r^2\pi}{2} \cdot 2r = r^3\pi = 1000\pi \text{ cm}^3.$

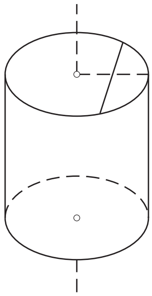


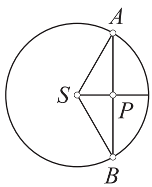
To je točno polovica volumena cijelog valjka, pa je račun suvišan ako smo već prethodno riješili zadatak **a)**.

Oplošje se sastoji od dviju baza oblika polukruga, polovice plašta valjka i presjeka oblika kvadrata. Sve to treba prelakirati želimo li lakiranu posudu.

$$O_c = 2 \cdot \frac{r^2\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2r\pi \cdot v + (2r)^2 = r^2\pi + 2r^2\pi + 4r^2 = r^2(3\pi + 4)$$
$$= 100(3\pi + 4) \text{ cm}^2.$$

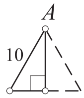
Oplošje polovice valjka nije polovica oplošja cijelog valjka. Postoji još i presječna ploha, koja također ulazi u izračun oplošja.





d) Pogled odozgo na gornju bazu valjka ukazuje na potrebu za računanjem površine kružnog odsječka. Za računanje pripadnog kuta bila bi nužna trigonometrija, no udaljenost presječne ravnine od osi je točno polovica polumjera valjka. Stoga ovaj zadatak podsjeća na zadatak 5 jer sugerira crtanje jednog jednakostraničnog trokuta kojeg u zadatku nema. Tetiva prereza $\overline{AB}$ prolazi kroz P.

P je za 5 cm (tj. za $\dfrac{r}{2}$) udaljen od S. Kut $\sphericalangle SPA = 90°$. Polumjer $|SA| = r = 10$ cm.

Trokut SPA mogao bi se nadopuniti sukladnom i simetričnom dopunom do jednakostraničnog trokuta: 

. Slijedi zaključak da je $\sphericalangle ASB = 120°$.

Površina manjeg od dvaju odsječaka određenih tetivom $\overline{AB}$ dobiva se oduzimanjem površine suvišnog trokuta ASB od površine isječka (trećine kruga). Površina suvišnog trokuta ASB jednaka je površini jednakostraničnog trokuta sa stranicama jednakim polumjeru od 10 cm.

Taj je odsječak baza promatranog tijela, pa je

$$B_d = \frac{r^2\pi}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = 100\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\ \mathrm{cm}^2;$$

$$V_d = B_d \cdot v = r^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot 2r = 2r^3\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 2000\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\ \mathrm{cm}^3.$$

Za računanje oplošja ovog tijela već znamo površinu dviju baza. Još nam treba obli dio koji je trećina plašta prvotnog valjka i pravokutnik presjeka. Ovaj posljednji ima jednu stranicu dugačku $2r$ kao visina valjka, a drugu dugačku kao tetiva $\overline{AB}$.

$\overline{AB}$ je dugačka kao dvije visine prije spomenutog jednakostraničnog trokuta, dakle

$$|AB| = 2 \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}.$$

Pravokutnik presjeka ima površinu

$$r\sqrt{3} \cdot 2r = 2r^2\sqrt{3}.$$

$$O_d = 2 \cdot r^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{1}{3} \cdot 2r\pi \cdot 2r + 2r^2\sqrt{3} = r^2\left(2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= 100\left(2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\ \mathrm{cm}^2.$$

Napomena. Sličan zadatak, ako je udaljenost presjeka od osi $6\,\mathrm{cm}$, zahtijeva trigonometriju i računalo.

Zadatak 7. Izračunaj oplošja svih tijela spomenutih u zadacima 1 – 3.

Napomena. Numeracija zadataka u rješenjima se ponavlja, jer je opis tijela isti kao u prethodnim zadacima, a često i slike. Nov je samo izračun oplošja.

Rješenje:

1-a) Traži se oplošje pravilne šesterostrane prizme kojoj su svi bridovi jednako dugački. Baza je pravilan šesterokut stranice a, prizma je uspravna i visina je također a. U zadatku 1 odredili smo $a = 3\,\mathrm{cm}$.

Svaka baza je pravilan šesterokut površine

$$B = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{2}\ \mathrm{cm}^2.$$

Plašt se sastoji od šest jednakih kvadrata stranice $a = 3\,\mathrm{cm}$:

$$Pl = 6 \cdot a^2 = 54\,\mathrm{cm}^2.$$

$$O = 2B + Pl = 2 \cdot \frac{27\sqrt{3}}{2} + 54 = 27(\sqrt{3} + 2)\,\mathrm{cm}^2.$$

1-b) Polumjer R baze prizmi opisanog valjka, dakle polumjer šesterokutu opisane kružnice je $R = a = 3\,\text{cm}$ (vidi sliku šesterokuta).

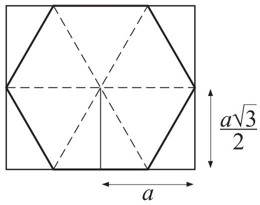
$$O_V = 2R^2\pi + 2R\pi a = 2a^2\pi + 2a^2\pi = 4a^2\pi = 36\pi\,\text{cm}^2.$$

1-c) Polumjer r šesterokutu upisane kružnice je $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$O_u = 2r^2\pi + 2r\pi a = 2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\pi + 2\frac{a\sqrt{3}}{2}\pi a = a^2\pi\left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right) = 9\pi\left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)\,\text{cm}^2.$$

1-d) Baza opisane kutije je pravokutnik stranica:

$$2a, \quad 2v = 2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$



Njegova je površina

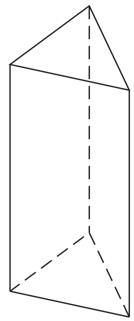
$$B_K = 2a\cdot a\sqrt{3} = 2a^2\sqrt{3}.$$

Plašt se sastoji od dvaju pravokutnika dimenzija $2a$, a i još dvaju pravokutnika dimenzija $a\sqrt{3}$, a. Onda je površina plašta

$$Pl_K = 2\cdot\left(2a^2 + a^2\sqrt{3}\right) = 2a^2(2+\sqrt{3});$$

$$O_K = 2B_K + Pl_K = 2\cdot 2a^2\sqrt{3} + 2a^2(2+\sqrt{3}) = 2a^2(3\sqrt{3}+2) = 18(3\sqrt{3}+2)\,\text{cm}^2.$$

2. Oplošje čine dvije baze oblika jednakostraničnih trokuta i tri sukladna pravokutnika stranica a, $3a$.



$$O = 2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3\cdot a\cdot 3a = a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 9\right).$$

3. Oplošje se sastoji od dvije baze oblika pravilnih šesterokuta stranica a i plašta od šest sukladnih pravokutnika stranica a, $\dfrac{a}{2}$.

$$O = 2\cdot 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6a\cdot\frac{a}{2} = 3a^2(\sqrt{3}+1).$$

U zadatku je stranicu a trebalo prikazati pomoću volumena V tijela, pa je bilo izračunato $a = \dfrac{\sqrt[3]{4V}}{\sqrt{3}}$. Ako i opseg hoćemo izraziti pomoću V, onda je:

$$O = 3\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{4V}}{\sqrt{3}}\right)^2(\sqrt{3}+1) = 2\sqrt[3]{2V^2}(\sqrt{3}+1).$$