1. Brojevi

1.1. Osnovni pojmovi i činjenice o skupovima i funkcijama

Skup

U matematici smo već rabili riječ skup i proučavali neke skupove i neka njihova svojstva. Tako smo proučavali skup prirodnih brojeva $\mathbf{N}$, skup cijelih brojeva $\mathbf{Z}$, skup racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$, skup realnih brojeva $\mathbf{R}$, skup kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$, skup rješenja neke jednadžbe, skup rješenja neke nejednadžbe, skup točaka ravnine koje su jednako udaljene od neke fiksne točke te ravnine (kružnica) i mnoge druge skupove.

Promotrimo skupove i njihova svojstva malo općenitije.

Skup je osnovni matematički pojam, što znači da ga ne definiramo. Svaki skup čine njegovi elementi (članovi). **Element** je također osnovni matematički pojam i ne definiramo ga. Pojedini je skup zadan kada je točno određeno koji ga elementi čine.

Skupove obično označavamo velikim slovima, primjerice A, B, C, ... ili velikim slovima s indeksom, na primjer S_1, S_2, S_3, ..., a njihove elemente malim slovima, primjerice a, b, c, ..., ili malim slovima s indeksom, primjerice a_1, a_2, a_3, ...

Skup možemo zadati na više načina. Jedan je od njih da u vitičastim zagradama napišemo sve njegove elemente. Na primjer, ako su elementi skupa S brojevi 1, 3, 5, 7, 9 i ako su to jedini elementi skupa S, onda pišemo $S = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ i time je skup S potpuno određen. Redoslijed kojim se elementi navode nije bitan pa smo mogli pisati i $S = \{5, 1, 9, 3, 7\}$. Takav je način dobar kad skup nema mnogo elemenata, u protivnom je vrlo nepraktičan. Ipak se uobičajilo da samo neke skupove koji imaju mnogo elemenata pišemo na sličan način. Tako skup $\mathbf{N}$ prirodnih brojeva često pišemo u obliku

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

s tim da podrazumijevamo da točkice označuju sve ostale prirodne brojeve. Drugi način da zadamo neki skup jest da navedemo oznaku za njegov element i da napišemo svojstvo ili svojstva kojima su određeni elementi toga skupa. To znači da elemente toga skupa čine svi objekti koji imaju navedeno svojstvo odnosno sva navedena svojstva. Tako bismo, primjerice, već zadani skup S mogli zapisati ovako:

$$S = \{x \mid x \text{ je neparni broj manji od } 10\}.$$

Pri tome se obično iza oznake elementa piše ili okomita crtica, kako je to ovdje učinjeno, ili $:$, a onda se iza znaka $\mid$ odnosno iza znaka $:$ napiše svojstvo ili svojstva koja određuju elemente toga skupa. Primijetimo da se i kod takva zadavanja skupa rabe vitičaste zagrade. Prema tome skup $\mathbf{N}$ možemo pisati $\mathbf{N} = \{x \mid x$ je prirodni broj $\}$ ili $\mathbf{N} = \{x : x$ je prirodni broj $\}$.

Da je neki objekt element zadanoga skupa, kraće označujemo znakom $\in$. Tako, na primjer, $1 \in \mathbf{N}$ znači da je broj 1 element skupa $\mathbf{N}$ prirodnih brojeva. Činjenicu da neki objekt nije element zadanog skupa označujemo znakom $\notin$. Tako $\frac{1}{2} \notin \mathbf{N}$ znači da broj $\frac{1}{2}$ nije element skupa $\mathbf{N}$ prirodnih brojeva, tj. da $\frac{1}{2}$ nije prirodni broj.

Praktično je uzeti da postoji i skup koji nema niti jedan element. Takav se skup zove **prazan skup** i označuje se s $\emptyset$. Prirodno je da za sve skupove osim praznog skupa kažemo da su neprazni skupovi.

Podskup

Uočimo da su elementi već promatranog skupa $S = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ prirodni brojevi, tj. da iz činjenice da je $x \in S$ slijedi da je $x \in \mathbf{N}$. To pomoću znaka implikacije $\Longrightarrow$ kraće pišemo ovako:

$$x \in S \Longrightarrow x \in \mathbf{N}^*.$$

Kako navedena tvrdnja vrijedi za sve elemente skupa S, koristeći se znakom $\forall$ (čita se: "za sve", "za svaki" ili "za bilo koji") možemo napisati

$$(\forall x) x \in S \Longrightarrow x \in \mathbf{N}$$

i tada kažemo da je skup S podskup skupa $\mathbf{N}$.

Odredimo što je podskup i općenito.

> Za skup A kažemo da je **podskup** skupa B, i to označujemo s $A \subseteq B$, ako je svaki element skupa A također i element skupa B, tj. ako vrijedi
>
> $$(\forall a)\ a \in A \Longrightarrow a \in B.$$

Činjenicu da skup A nije podskup skupa B označujemo s $A \nsubseteq B$. Dovoljno je da postoji barem jedan element skupa A koji nije i element skupa B pa da skup A ne bude podskup skupa B. Koristeći se znakom $\exists$ (čita se: "postoji" ili "egzistira") možemo to kraće zapisati ovako:

$$(\exists x)(x \in A \quad \text{i} \quad x \notin B) \Longrightarrow A \nsubseteq B.$$

---

* Ako iz tvrdnje T_1 slijedi tvrdnja T_2, onda to kraće pišemo $T_1 \Longrightarrow T_2$ i čitamo "iz T_1 slijedi T_2", "T_1 implicira T_2", "T_1 povlači T_2" ili "ako je T_1, onda je T_2".

Primjer 1.1. Je li skup $C = \{1, 2, 3\}$ podskup skupa $P = \{x \mid x$ je prosti broj manji od $10\}$?

$\triangleright$ Kako je prosti broj svaki prirodni broj koji ima točno dva međusobno različita djelitelja, to je $P = \{2, 3, 5, 7\}$, pa iz $1 \in C \quad \text{i} \quad 1 \notin P$ slijedi $C \not\subseteq P$. $\triangleleft$

Promotrimo skupove $D = \{x \mid x$ je rješenje jednadžbe $x^2 - 3x + 2 = 0\}$ i $E = \{1, 2\}$. Je li neki od tih skupova podskup onoga drugog? Provjerite da su rješenja jednadžbe $x^2 - 3x + 2 = 0$ upravo brojevi 1 i 2. Prema tome svaki je element skupa D također i element skupa E, pa je $D \subseteq E$. Ali i svaki element skupa E je element skupa D, pa je i $E \subseteq D$. Kako je svaki element skupa E također i element skupa D, i kako je svaki element skupa D također i element skupa E, prirodno je da kažemo da su ti skupovi jednaki.

> Za bilo koja dva skupa A i B kažemo da su **jednaki**, i to označavamo s $A = B$, ako i samo ako je $A \subseteq B \quad \text{i} \quad B \subseteq A$.

Ako skupovi A i B nisu jednaki, tj. ako nije $A = B$, onda kažemo da su skupovi A i B različiti, i to označavamo s $A \neq B$.

Primjer 1.2. Jesu li skupovi $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{3, 1, 2\}$ jednaki?

$\triangleright$ Jesu, jer je svaki element skupa A element skupa B i obratno, pa je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, i prema tome $A = B$. Uočite da za jednakost skupova nije bitno kojim su redom navedeni njihovi elementi. $\triangleleft$

Primjer 1.3. Jesu li skupovi $C = \{1, 2, 3, 4\}$ i $D = \{1, 2, 3, 4, 4\}$ jednaki?

$\triangleright$ Jesu, jer je svaki element skupa C element skupa D i svaki element skupa D element skupa C, pa je $C \subseteq D$ i $D \subseteq C$, što znači da je $C = D$. To što smo u skupu D dva puta pisali isti element, znači da je $4 \in D$ i ništa više od toga, jer je svaki element skupa samo jedan element toga skupa, bez obzira na to koliko puta ponovimo tu činjenicu. $\triangleleft$

Ako je $A \subseteq B$ a nije $A = B$, onda kažemo da je skup A **pravi podskup** skupa B. Kad to želimo istaknuti, onda umjesto $A \subseteq B$ pišemo $A \subset B$ (čita se: skup a je pravi podskup skupa be).

Primijetimo da je svaki skup S i sam svoj podksup, jer mu pripada svaki njegov element, tj.

$$\boxed{(\forall S)\ S \subseteq S.}$$

Istaknimo još i važnu činjenicu da se u matematici po dogovoru uzima da je prazni skup $\emptyset$ podskup svakog skupa, tj.

$$\boxed{(\forall S)\ \emptyset \subseteq S.}$$

Za bilo koji skup S možemo promatrati i skup svih njegovih podskupova.

> Skup svih podskupova skupa S zove se **partitivni skup** skupa S i označava se s $\mathscr{P}(S)$.

Primjer 1.4. Odredimo skup $\mathscr{P}(S)$ ako je $S = \{1, 2\}$.

▷ Podskupovi skupa $S = \{1, 2\}$ su prazan skup $\emptyset$, jednočlani skupovi $\{1\}$ i $\{2\}$ i sam skup $S = \{1, 2\}$. Prema tome je partitivni skup skupa S skup

$$\mathscr{P}(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}. \quad \triangleleft$$

U pojedinim se dijelovima matematike obično promatraju samo oni skupovi koji su podskupovi jednoga određenog skupa. Tako se, primjerice, u planimetriji proučavaju samo razni skupovi točaka jedne ravnine. Zato je za planimetriju skup točaka ravnine sveopći skup čije dijelove proučavamo.

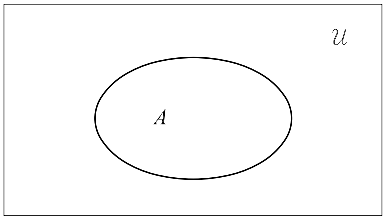
Za skup, podskupove kojega promatramo, kažemo da je univerzalni skup i obično ga označujemo slovom $\mathscr{U}$.

Već smo utvrdili da je svaki skup sam sebi podskup, pa je i univerzalni skup sam svoj podskup.

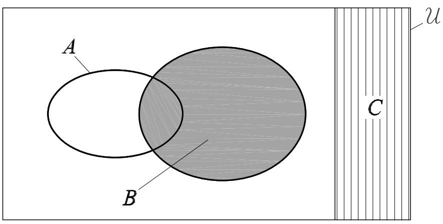
Nadalje, kad god govorimo o nekim skupovima, pretpostavljat ćemo da su oni podskupovi istoga univerzalnog skupa, i to nećemo posebno isticati.

Prikazivanje skupova

Da bismo lakše stvorili predodžbu o odnosima pojedinih skupova koje promatramo, obično ih prikazujemo kao dijelove ravnine. Pri tome univerzalni skup $\mathscr{U}$ prikazujemo pravokutnikom, a njegove podskupove dijelovima toga pravokutnika (sl. 1.1).



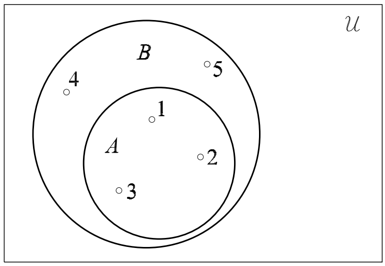
Sl. 1.1.



Sl. 1.2.

Da bismo bolje uočili kojim je dijelom pravokutnika prikazan koji skup, te dijelove ili neke od njih osjenčamo ili šrafiramo (sl. 1.2), pri čemu oznaku skupa nekad pišemo na osjenčanom odnosno šrafiranom dijelu, a nekad i izvan, tako da je strelicom ili crticom povežemo s dijelom ravnine, odnosno s crtom koja omeđuje dio ravnine koji prikazuje dani skup.

Naravno, ako pri takvu prikazivanju skupova želimo prikazati i njihove elemente, onda elemente pojedinog skupa prikazujemo točkama koje pripadaju onom dijelu ravnine kojim je prikazan taj skup. Tako nam slika 1.3 zorno prikazuje da je skup $A = \{1, 2, 3\}$ podskup skupa $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i da je, na primjer, $4 \in B$ i da $4 \notin A$.



Sl. 1.3.

Za navedeni način prikazivanja skupova dijelovima ravnine kažemo da predstavlja prikaz skupova Venn-Eulerovim dijagramima.

Unija skupova

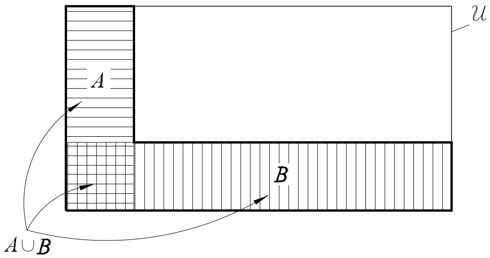
Unija skupova A i B jest skup koji označujemo s $A \cup B$ (čita se: a unija be), i koji čine oni i samo oni elementi koji pripadaju ili skupu A ili skupu B ili i skupu A i skupu B, tj.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \text{ili} \quad x \in B\}.$$

Drugim riječima, unija skupova A i B jest skup svih onih elemenata koji pripadaju barem jednom od ta dva skupa.

Tako je, primjerice, unija skupova $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ skup $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Uniju skupova A i B možemo prikazati Venn-Eulerovim dijagramom kako je to učinjeno na slici 1.4.



Sl. 1.4.

Iz definicije unije $A \cup B$ skupova A i B neposredno slijedi da je za bilo koja dva skupa A i B

$$\boxed{A \cup B = B \cup A}$$

i također da je

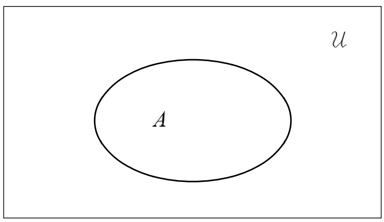
$$\boxed{A \subseteq A \cup B \quad \text{i} \quad B \subseteq A \cup B.}$$

Kako prazan skup $\emptyset$ nema elemenata, uniju praznog skupa $\emptyset$ i bilo kojega skupa A čine samo elementi skupa A, što znači da je

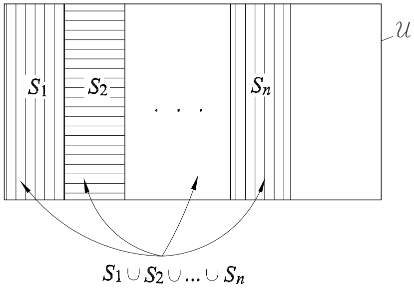
$$\boxed{(\forall A) \quad A \cup \emptyset = A.}$$

Također je očito sa slike 1.5. da je unija bilo kojeg skupa A i univerzalnog skupa $\mathscr{U}$ sam skup $\mathscr{U}$, tj. da je

$$\boxed{(\forall A) \quad A \cup \mathscr{U} = \mathscr{U}.}$$



Sl. 1.5.



Sl. 1.6.

Uniju skupova možemo definirati i za više od dva skupa. Unija skupova $S_1, S_2, \dots, S_n$ (sl. 1.6) jest skup koji čine oni i samo oni elementi koji pripadaju barem jednom od skupova $S_1, S_2, \dots, S_n$.

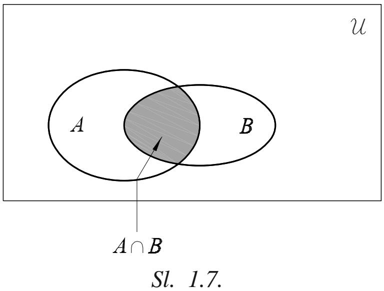
Uniju skupova $S_1, S_2, \dots, S_n$ označujemo sa $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$ ili s $\bigcup_{i=1}^{n} S_i$.

Tako je, na primjer, unija skupova $S_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $S_2=\{3, 4, a, b\}$ i $S_3=\{a, b, c\}$ skup $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{1, 2, 3, 4, a, b, c\}$ ili $\bigcup_{i=1}^{3} S_i = \{1, 2, 3, 4, a, b, c\}$.

Presjek skupova

Presjek skupova A i B jest skup koji označujemo s $A \cap B$ (čita se: a presjek be), i koji čine oni i samo oni elementi koji su i elementi skupa A i elementi skupa B, tj.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \quad \text{i} \quad x \in B\}.$$



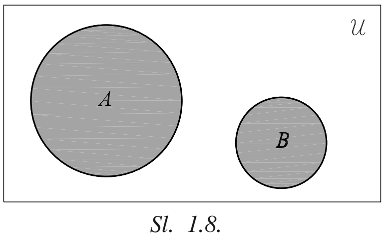
Sl. 1.7.

Drugim riječima, presjek skupova A i B (sl. 1.7.) jest skup zajedničkih elemenata tih skupova.

Ako skupovi A i B nemaju zajedničkih elemenata (sl. 1.8.), onda je njihov presjek skup koji nema niti jedan element, a to znači da je njihov presjek prazan skup, tj. da je

$$A \cap B = \emptyset.$$

Za skupove kojima je presjek prazan skup kažemo da su **disjunktni** skupovi.



Sl. 1.8.

Primjer 1.5. Odredimo presjek skupova $A = \{x \mid x$ je samoglasnik hrvatske abecede$\}$ i $B = \{x \mid x$ je slovo u riječi *skup*$\}$ i ustanovimo jesu li ili nisu skupovi A i B disjunktni.

▷ Kako je $A = \{a, e, i, o, u\}$ i $B = \{s, k, u, p\}$, presjek skupova A i B je skup kojemu je jedini član slovo u, tj.

$$A \cap B = \{u\}.$$

Naravno, jednočlan skup nije prazan skup, pa skupovi A i B nisu disjunktni. ◁

Primjer 1.6. Jesu li skupovi $S = \{a, b, u\}$ i $T = \{1, 2, \{u\}\}$ disjunktni?

▷ Pogledajmo pažljivo elemente tih skupova. Elementi skupa S su slova a, b i u a elementi skupa T su brojevi 1 i 2 i jednočlani skup $\{u\}$. Kako slovo u i jednočlani skup $\{u\}$ nisu isto, jer slovo u nije skup a $\{u\}$ jest skup, skupovi S i T očito nemaju niti jedan zajednički element. Prema tome je $S \cap T = \emptyset$ i skupovi S i T su disjunktni skupovi. ◁

Iz definicije presjeka $A \cap B$ skupova A i B neposredno slijedi da je za bilo koja dva skupa A i B

$$\boxed{A \cap B = B \cap A}$$

i također da je

$$\boxed{A \cap B \subseteq A \quad \text{i} \quad A \cap B \subseteq B.}$$

Kako su svi elementi skupa A elementi univerzalnog skupa $\mathscr{U}$ (sl. 1.9.), očito je da je presjek bilo kojega skupa A i univerzalnog skupa $\mathscr{U}$ upravo skup A, tj.

$$\boxed{(\forall A)\ A \cap \mathscr{U} = A.}$$

Kako prazan skup $\emptyset$ nema niti jedan element, presjek toga skupa i bilo kojega drugog skupa A ne može imati niti jedan element, što znači da je

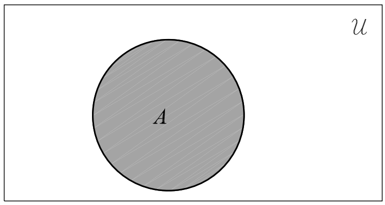
$$\boxed{(\forall A)\ A \cap \emptyset = \emptyset.}$$

Očito je da je

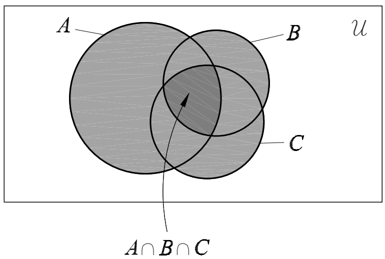
$$\boxed{\mathscr{U} \cap \emptyset = \emptyset}$$

i da je

$$\boxed{(\forall A)\ A \cap A = A.}$$



Sl. 1.9.



Sl. 1.10.

I presjek skupova možemo definirati ne samo za dva nego i za više od dva skupa.

Presjek skupova S_1, S_2, ..., S_n je skup koji čine oni i samo oni elementi koji pripadaju svakom od skupova S_1, S_2, ..., S_n.

Presjek skupova S_1, S_2, ..., S_n, označujemo s $S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n$ ili kraće s $\bigcap\limits_{i=1}^{n} S_i$.

Na slici 1.10. prikazan je presjek triju skupova A, B i C.

Primjer 1.7. Odredimo presjek skupova $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$, $C = \{x \mid x \text{ je prirodni broj manji od } 7\}$ i $D = \{x \mid x \text{ je rješenje jednadžbe } x^2 - 8x + 15 = 0\}$.

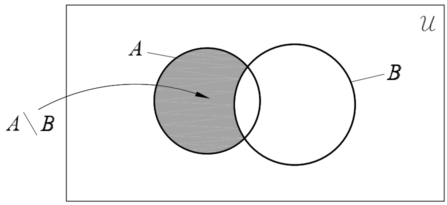
▷ Kako je $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i $D = \{3, 5\}$, to je $A \cap B \cap C \cap D = \{3, 5\}$. ◁

Razlika skupova

Razlika skupova A i B jest skup koji označujemo s $A \setminus B$ (čita se: a razlika be) i koji čine oni i samo oni elementi koji su elementi skupa A i koji nisu elementi skupa B, tj.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \quad \text{i} \quad x \notin B\}.$$

Na slici 1.11. je osjenčana razlika skupova A i B, tj. $A \setminus B$



Sl. 1.11.

Primjer 1.8. Zadani su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \{4, 5, 6, 7\}$. Odredimo razlike $A \setminus B$ i $B \setminus A$ tih skupova.

▷ Razliku $A \setminus B$ čine elementi skupa A koji nisu i elementi skupa B, pa je

$$A \setminus B = \{1, 2, 3\}.$$

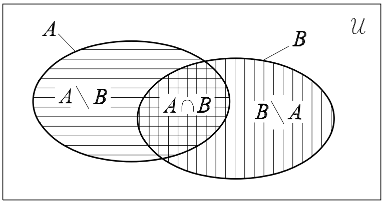
Razliku $B \setminus A$ čine elementi skupa B koji nisu i elementi skupa A, pa je

$$B \setminus A = \{6, 7\}.$$

Uočite da je $A \setminus B \neq B \setminus A$. ◁

Primjer 1.9. Koristeći se Venn-Eulerovim dijagramima uvjerimo se da su skupovi $A \setminus B$, $B \setminus A$ i $A \cap B$ po parovima disjunktni.

▷ Promotrimo skupove $A \setminus B$, $A \cap B$ i $B \setminus A$ na slici 1.12.

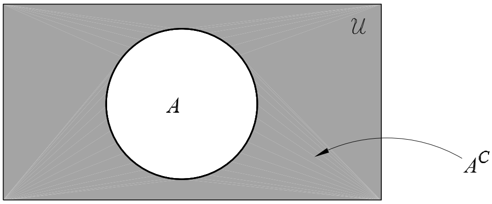


Sl. 1.12.

Očito je da su svaka dva od skupova $A \setminus B$, $A \cap B$ i $B \setminus A$ disjunktni skupovi. ◃

Komplement skupa

U proučavanju skupova i njihovoj primjeni posebno je važna razlika $\mathscr{U} \setminus A$ univerzalnog skupa $\mathscr{U}$ i nekog skupa A (sl. 1.13). Zato ta razlika ima poseban naziv — zove se **komplement** skupa A i označuje se s A^c (čita se: komplement od a) ili s $\overline{A}$ (čita se također: komplement od a).



Sl. 1.13.

Komplement skupa A je skup koji čine oni i samo oni elementi univerzalnog skupa $\mathscr{U}$ koji nisu elementi skupa A, tj.

$$A^C = \{x \mid x \in \mathscr{U} \quad \text{i} \quad x \notin A\}.$$

Očito je da je unija bilo kojega skupa A i njegova komplementa A^C upravo univerzalni skup $\mathscr{U}$, tj.

$$\boxed{(\forall A)\; A \cup A^C = \mathscr{U}.}$$

Jednako je tako očito da je presjek bilo kojega skupa A i njegova komplementa A^C prazan skup, tj.

$$\boxed{(\forall A)\; A \cap A^C = \emptyset.}$$

Neka je A^C komplement skupa A. Zapitajmo se koji je komplement skupa A^C, tj. koji je skup $(A^C)^C$. Kako komplement skupa A^C čine elementi univerzalnog skupa koji ne pripadaju skupu A^C, to su očito elementi skupa A, pa je prema tome za bilo koji skup A

$$\boxed{(A^C)^C = A.}$$

Kako prazan skup $\emptyset$ nema elemenata, očito je da njegov komplement čine svi elementi univerzalnog skupa $\mathscr{U}$, pa je

$$\boxed{\emptyset^C = \mathscr{U}.}$$

Komplement univerzalnog skupa $\mathscr{U}$ čine svi elementi toga skupa koji mu ne pripadaju, a kako takvih elemenata nema to je njegov komplement $\mathscr{U}^C$ skup koji nema elemenata, dakle prazan skup. Prema tome je

$$\boxed{\mathscr{U}^C = \emptyset.}$$

Kartezijev produkt skupova

Prisjetimo se da uređeni par čine dva elementa s određenim redoslijedom. Uređeni par kojemu je prvi element a a drugi element b označujemo s (a, b). Prisjetimo se i toga da su dva uređena para jednaka kad su im međusobno jednaki prvi elementi i međusobno jednaki drugi elementi. Prema tome je $(a, b) = (c, d)$ onda i samo onda kada je $a = c$ i $b = d$.

Kartezijev produkt skupova A i B, koji se označava s $A \times B$ (čita se: a kartezijanski be), jest skup svih uređenih parova (a, b), pri čemu je $a \in A$ i $b \in B$, tj.

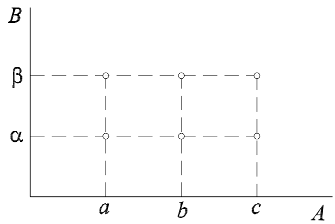
$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \quad \text{i} \quad b \in B\}.$$

Tako je, na primjer, Kartezijev produkt skupova $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{\alpha, \beta\}$ skup

$$A \times B = \{(a, \alpha), (a, \beta), (b, \alpha), (b, \beta), (c, \alpha), (c, \beta)\},$$

i možemo ga prikazati dijagramom kako je to učinjeno na slici 1.14. Na tom su dijagramu kružićima prikazani elementi skupa $A \times B$.

Napišimo za iste skupove $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{\alpha, \beta\}$ Kartezijev produkt $B \times A$. Dobivamo da je $B \times A = \{(\alpha, a), (\alpha, b), (\alpha, c), (\beta, a), (\beta, b), (\beta, c)\}$, pa je očito $A \times B \neq B \times A$.



Sl. 1.14.

Funkcija

U dosadašnjem smo učenju proučavali mnoge funkcije (preslikavanja) i njihova svojstva. Prisjetimo se definicije funkcije i nekih osnovnih pojmova i činjenica povezanih s tom definicijom.

Neka su zadani neprazni skupovi $\mathscr{D}$ i $\mathscr{K}$.

Funkcija sa skupa $\mathscr{D}$ u skupu $\mathscr{K}$ je postupak kojim se *svakom* elementu skupa $\mathscr{D}$ pridružuje *točno jedan* element skupa $\mathscr{K}$.

Skup $\mathscr{D}$ je **domena** ili **područje definicije** funkcije. Elemente domene obično općenito označujemo slovom x i kažemo da je x **argument** ili **nezavisna varijabla** funkcije.

Skup $\mathscr{K}$ je **kodomena** ili **područje vrijednosti** funkcije. Elemente kodomene obično općenito označujemo slovom y i kažemo da je y **zavisna varijabla** funkcije.

Postupak kojim elementima domene $\mathscr{D}$ pridružujemo elemente kodomene $\mathscr{K}$ obično općenito označujemo slovom f (početno slovo riječi funkcija). Tada govorimo o funkciji f sa skupa $\mathscr{D}$ u skup $\mathscr{K}$, i to označujemo s $f\colon\ \mathscr{D} \to \mathscr{K}$ (čita se: ef sa de u ka). Kada općenito promatramo više funkcija istovremeno, onda za njihovo označavanje osim slova f koristimo i druga slova, najčešće slova g, h, u, v ili samo slovo f s indeksima, na primjer $f_1, f_2, \ldots$.

Činjenicu da je $y \in \mathscr{K}$ funkcijom f pridružen nekom $x \in \mathscr{D}$ označujemo s $y = f(x)$ pa obično funkciju f sa skupa $\mathscr{D}$ u skup $\mathscr{K}$ simbolički zapisujemo ovako:

$$f : \mathscr{D} \to \mathscr{K}, y = f(x).$$

Očito je da je neka funkcija određena samo onda kad je, osim postupka f po kojem se elementi kodomene pridružuju elementima domene te funkcije, točno određeno i koji je skup domena i koji je skup kodomena te funkcije.

Za svaki pojedini $x \in \mathscr{D}$ kažemo da je **vrijednost argumenta**, pa možemo reći da je domena $\mathscr{D}$ neke funkcije skup svih vrijednosti argumenta te funkcije. Ako je $x_0 \in \mathscr{D}$ jedna vrijednost argumenta funkcije $f : \mathscr{D} \to \mathscr{K}$, $y = f(x)$, onda element kodomene $\mathscr{K}$ koji je funkcijom f pridružen vrijednosti argumenta x_0 označavamo s $f(x_0)$ ili, kraće, s y_0, i kažemo da je $f(x_0)$ **vrijednost funkcije** f za vrijednost argumenta x_0. **Skup vrijednosti funkcije** f, tj. $\{f(x) \mid x \in \mathscr{D}\}$ zove se i **slika funkcije** f i obično se označuje s $\mathscr{I}$ (prema engl. *image* — slika). Očito je da je uvijek $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{K}$.

Kad se promatra neka određena funkcija f, onda se često njezina domena označuje s $\mathscr{D}_f$, kodomena s $\mathscr{K}_f$, a skup vrijednosti funkcije f s $\mathscr{I}_f$.

Zadavanje funkcije

Promotrimo funkciju $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbf{N}$, $y = 2x$. Postupak kojim se elementima domene $\mathscr{D}_f = \{1, 2, 3, 4\}$ zadane funkcije f pridružuju elementi kodomene $\mathscr{K}_f = \mathbf{N}$ zadane funkcije dan je izrazom $y = 2x$. Taj izraz obično nazivamo formulom i kažemo da je funkcija f zadana **formulom** ili **analitički**. Isti se izraz često piše i u obliku $f(x) = 2x$ čime se više ističe da se funkcijom f svakoj vrijednosti argumenta x pridružuje vrijednost funkcije $f(x)$. Tako dobivamo da je za vrijednost argumenta $x = 1$ vrijednost funkcije $f(1) = 2$, za vrijednost argumenta $x = 2$ vrijednost funkcije $f(2) = 4$, za vrijednost argumenta $x = 3$ vrijednost funkcije $f(3) = 6$ i za vrijednost argumenta $x = 4$ vrijednost funkcije $f(4) = 8$.

Pri izračunavanju vrijednosti funkcije pogodno je vrijednosti argumenta i odgovarajuće im vrijednosti funkcije zapisivati u tablicu. Tako bismo za promatranu funkciju dobili tablicu 1.1.

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	4	6	8

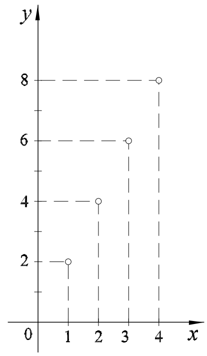
Tablica 1.1.

Iz tablice 1.1. vidi se za svaku vrijednost argumenta toj vrijednosti odgovarajuća vrijednost funkcije f, ali samo tom tablicom funkcija f nije određena, jer nije vidljivo jesu li u nju uvršteni svi elementi domene i što je kodomena funkcije f. Koristeći se tablicom 1.1. mogli bismo promatranu funkciju f odrediti ovako:

$$f : \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbf{N}, \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline f(x) & 2 & 4 & 6 & 8 \\ \hline\end{array}.$$

.

Za takav način zadavanja funkcije kažemo da je **tablični**. Svaka vrijednost argumenta x i njoj pridružena vrijednost funkcije $f(x)$ čine uređeni par $(x, f(x))$. Za promatranu funkciju to su uređeni parovi: $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$ i $(4, 8)$. Skup svih uređenih parova $(x, f(x))$ funkcije f zove se **graf funkcije** f i obično se označuje s Γ_f. Za promatranu je funkciju $\Gamma_f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$. Prikažimo Γ_f u koordinatnom sustavu xOy (sl. 1.15.). Za tako dobivene, kružićima istaknute, četiri točke u koordinatnom sustavu xOy kažemo da su **grafički prikaz** promatrane funkcije f ili, kraće, **graf** te funkcije. Ni samim grafom Γ_f ni grafičkim prikazom u koordinatnoj ravnini xOy promatrana funkcija f nije određena, jer iz toga ne možemo zaključiti što je kodomena te funkcije.



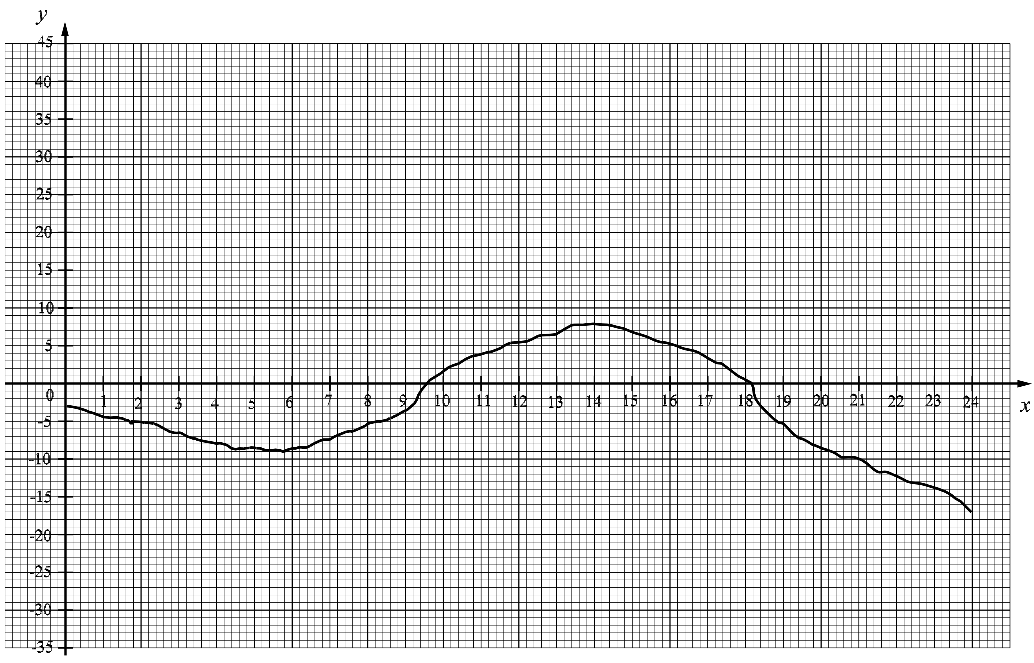
Sl. 1.15.

Koristeći se grafom mogli bismo promatranu funkciju f odrediti ovako:

$$f : \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbf{N}, \quad \Gamma_f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}.$$

Za takav način zadavanja funkcije kažemo da je **grafički**. Tako smo promatranu funkciju f odredili i analitički i tablično i grafički.

Uvjerimo se na primjerima da to nije moguće za svaku funkciju.

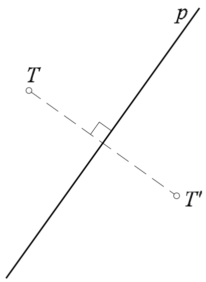


Sl. 1.16.

Termograf je uređaj koji na traci milimetarskog papira grafički prikazuje kako se tijekom dana mijenja temperatura zraka. Očito se radi o funkciji kojoj je nezavisna varijabla vrijeme od 0 do 24 sata, a zavisna varijabla temperatura zraka u $^\circ$ C koja je zadana grafičkim prikazom (sl. 1.16.). Za domenu te funkcije uzimamo interval $[0, 24]$ realnih brojeva koji odgovara vremenu od 0 do 24 sata, a za kodomenu interval $[-35, 45]$, jer se kod nas u termografima rabi papirnata traka koja omogućuje termografu da zabilježi temperature od $-35°$ C do $45°$ C.

Očito je da tu funkciju ne možemo zadati ni tablično ni grafom Γ (jer ima beskonačno mnogo vrijednosti argumenta), a ni analitički.

Promotrimo i primjer jedne funkcije koju smo proučavali u geometriji. Neka je $\mathscr{P}$ skup svih točaka ravnine i neka je p pravac koji pripada toj ravnini. Tada je osna simetrija te ravnine s obzirom na pravac p kao os simetrije funkcija, označimo je slovom s, koja svakoj točki $T \in \mathscr{P}$ pridružuje osnosimetričnu točku T, s obzirom na os simetrije p (sl. 1.17.). Funkciju $s : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ ne možemo zadati ni analitički, ni tablično ni grafički ali možemo ovako: $s : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$, za svaku točku $T \in \mathscr{P}$ koja ne pripada pravcu p je $s(T)$ ona točka ravnine $\mathscr{P}$ za koju je pravac p simetrala dužine $\overline{TT'}$, a za točke koje pripadaju pravcu p je $s(T)$ upravo točka T.



Sl. 1.17.

Jednakost funkcije

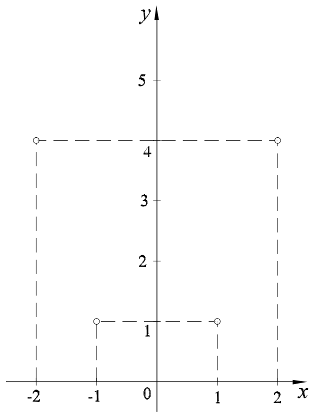
Kako je svaka funkcija određena svojom domenom, svojom kodomenom i postupkom kojim se svakom elementu domene pridružuje točno jedan element kodomene, za dvije zadane funkcije

$$f : \mathscr{D}_f \to \mathscr{K}_f, y = f(x) \quad \text{i} \quad g : \mathscr{D}_g \to \mathscr{K}_g, y = g(x)$$

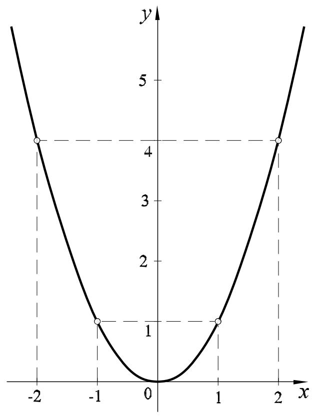
kažemo da su jednake, i to označujemo s $f = g$, kada je $\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_g, \mathscr{K}_f = \mathscr{K}_g$ i $f(x) = g(x)$ za sve x.

Primjer 1.10. Jesu li funkcije $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ i $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x^2$ jednake?

▷



Sl. 1.18.



Sl. 1.19.

Očito je da nisu jednake, jer je $\mathscr{D}_f = \mathbf{Z}$, $\mathscr{D}_g = \mathbf{R}$, a skupovi $\mathbf{R}$ i $\mathbf{Z}$ su različiti. Nejednakost se zadanih funkcija vidi i iz grafičkih prikaza tih funkcija — funkcije f na slici 1.18. i funkcije g na slici 1.19.

Graf funkcije g čine sve točke parabole $y = x^2$, a graf funkcije f je skup samo onih točaka te parabole kojima je apscisa cijeli broj. $\triangleleft$

Primjer 1.11. Jesu li funkcije $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = x^2$ i $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_0^+, h(x) = x^2$ jednake?

$\triangleright$ Zadane funkcije g i h imaju jednaku domenu (i jednoj i drugoj je domena skup $\mathbf{R}$ realnih brojeva) i vrijedi $(\forall x \in \mathbf{R})$ $g(x) = h(x)$, ali kodomene tih funkcija nisu jednake, jer skup $\mathbf{R}_0^+$ svih nenegativnih realnih brojeva nije jednak skupu svih realnih brojeva $\mathbf{R}$. Prema tome funkcije g i h su različite, tj. $g \neq h$. $\triangleleft$

Uočimo da je parabola $y = x^2$ na slici 1.19 grafički prikaz i funkcije g i funkcije h iz primjera 1.11., i ustanovimo da samo na temelju grafičkih prikaza ne možemo uvijek zaključiti jesu li dvije funkcije jednake ili različite.

Surjekcija

Primijetimo da je za funkciju g iz primjera 1.11. skup svih vrijednosti funkcije $\mathscr{I}_g = \mathbf{R}_0^+$ različit od kodomene $\mathscr{K}_g = \mathbf{R}$ te funkcije, a da je za funkciju h iz istog primjera i skup vrijednosti funkcije $\mathscr{I}_h$ i kodomena te funkcije $\mathscr{K}_h$ isti skup $\mathbf{R}_0^+$, tj. da je $\mathscr{I}_h = \mathscr{K}_h$.

> Za bilo koju funkciju $f : \mathscr{D} \to \mathscr{K}$, $y = f(x)$, kojoj je skup vrijednosti funkcije jednak kodomeni, tj. $\mathscr{I} = \mathscr{K}$, kažemo da je **surjekcija** ili da je **surjektivno preslikavanje** (prema franc. *sur* — na i lat. *jacere* — bacati) ili da je **preslikavanje na**.

Primjer 1.12. Je li funkcija $f : \mathbf{R}\backslash\{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ surjekcija?

$\triangleright$ Kako je za svaku funkciju $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{K}$, dovoljno je da ustanovimo je li ili nije svaki element kodomene $\mathscr{K}_f = \mathbf{R}$ zadane funkcije f vrijednost funkcije za neku vrijednost argumenta te funkcije. Označimo s $\overline{y}$ element kodomene $\mathscr{K}_f = \mathbf{R}$ funkcije f i pokušajmo za svaki $\overline{y} \in \mathbf{R}$ odrediti onu vrijednost argumenta x iz domene $\mathbf{R}\backslash\{1\}$ za koju je $\overline{y}$ vrijednost funkcije. Iz $\overline{y} = \dfrac{1}{x-1}$, odakle slijedi da je $x\overline{y} - \overline{y} = 1$, tj. $x\overline{y} = 1 + \overline{y}$, dobivamo da je $x = \dfrac{1+\overline{y}}{\overline{y}}$ ona vrijednost argumenta x kojoj je pridružena vrijednost funkcije $\overline{y}$. Iz $x = \dfrac{1+\overline{y}}{\overline{y}}$ očito je da ne postoji niti jedna vrijednost argumenta x za koju bi vrijednost funkcije bio broj $\overline{y} = 0 \in \mathbf{R}$, jer dijeljenje brojem 0 nije definirano. Dakle, broj 0 pripada kodomeni $\mathscr{K}_f = \mathbf{R}$ zadane funkcije f a ne pripada skupu vrijednosti $\mathscr{I}_f$ te funkcije. Prema tome je $\mathscr{I}_f \neq \mathscr{K}_f$, što znači da zadana funkcija nije surjekcija. Primijetimo da smo i na drugi, kraći, način mogli za zadanu funkciju f ustanoviti da nije surjekcija. Naime, iz $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ možemo neposredno zaključiti da $f(x)$ ne može imati vrijednost 0 ni za jednu vrijednost argumenta x, jer razlomak može imati vrijednost 0 samo kad mu je brojnik jednak nuli, pa razlomak $\dfrac{1}{x-1}$ ne može imati vrijednost 0 ni za koji x. ◁

1

Injekcija

Po definiciji funkcije svakoj je vrijednosti argumenta pridružena točno jedna vrijednost funkcije i pri tome različitim vrijednostima argumenta mogu, ali ne moraju, biti pridružene različite vrijednosti funkcije.

Za bilo koju funkciju $f : \mathscr{D} \to \mathscr{K}$, $y = f(x)$ kažemo da je **injekcija** ili **injektivno preslikavanje** (prema lat. *injicere* — umetnuti) kada ta funkcija svakim dvjema različitim vrijednostima argumenta pridružuje različite vrijednosti funkcije, tj.

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathscr{D})\ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

Promotrimo upravo iskazano svojstvo funkcije na drugi način, tako da pretpostavimo da za vrijednosti argumenta x_1 i x_2 funkcije f vrijedi $f(x_1) = f(x_2)$. Tada bi u slučaju da je $x_1 \neq x_2$, dvjema različitim vrijednostima argumenta bila pridružena ista vrijednost funkcije, jer je $f(x_1) = f(x_2)$, pa funkcija f ne bi bila injekcija, a u slučaju da je $x_1 = x_2$, funkcija f bi mogla biti injekcija. Na osnovi toga možemo injekciju definirati i na drugi način, pogodan za ispitivanje je li neka funkcija injekcija ili nije.

Funkcija $f : \mathscr{D} \to \mathscr{K}$, $y = f(x)$ jest injekcija ako i samo ako

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathscr{D})\ f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Primjer 1.13. Ispitajmo je li funkcija $f : \mathbf{R}\backslash\{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ iz primjera 1.12. injekcija.

▷ Za zadanu funkciju f je $f(x_1) = \dfrac{1}{x_1 - 1}$ i $f(x_2) = \dfrac{1}{x_2 - 1}$, pa

$$f(x_1) = f(x_2) \implies \frac{1}{x_1 - 1} = \frac{1}{x_2 - 1} \implies x_2 - 1 = x_1 - 1 \implies x_1 = x_2,$$

što znači da je ta funkcija injekcija. ◁

Bijekcija

Istaknimo da funkcija $f : \mathbf{R}\backslash\{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ koju smo promatrali u prethodna dva primjera jest injekcija, ali nije surjekcija. U sljedećem ćemo primjeru vidjeti da neke funkcije mogu biti i injekcije i surjekcije.

Primjer 1.14. Ispitajmo je li funkcija $f : \mathbf{R}\backslash\{0\} \to \mathbf{R}\backslash\{1\}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ injekcija i surjekcija.

$$\triangleright \ f(x_1) = f(x_2) \implies \frac{x_1+1}{x_1} = \frac{x_2+1}{x_2} \implies x_1x_2 + x_2 = x_1x_2 + x_1 \implies x_1 = x_2,$$

pa je zadana funkcija f injekcija.

Označimo s $\overline{y}$ element kodomene $\mathscr{K}_f = \mathbf{R}\backslash\{1\}$ zadane funkcije i pokušajmo za svaki $\overline{y}$ odrediti onu vrijednost argumenta x za koju je $\overline{y}$ vrijednost funkcije. Tada iz

$$\overline{y} = \frac{x+1}{x} \implies x\overline{y} - x = 1 \implies x(\overline{y} - 1) = 1 \implies x = \frac{1}{\overline{y} - 1}$$

vidimo da odgovarajuća vrijednost argumenta x postoji za svaki realni broj $\overline{y}$ izuzevši $\overline{y} = 1$, pa je skup vrijednosti funkcije $\mathscr{I}_f = \mathbf{R}\backslash\{1\} = \mathscr{K}_f$, tj. zadana funkcija f je i surjekcija. $\triangleleft$

Kako u matematici funkcije koje su i injekcije i surjekcije imaju mnogo veću ulogu nego one koje su samo surjekcije ili samo injekcije, za njih se uvodi i poseban naziv.

> Za funkciju $f : \mathscr{D} \to \mathscr{K}$, $y = f(x)$ kažemo da je **bijekcija** ili **bijektivno preslikavanje** (prema lat. *bi* — dvaput, *jacere* — bacati) kada je ta funkcija i injekcija i surjekcija.

Zadaci

1.1. Neka je $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Jesu li istinite sljedeće tvrdnje:

a) $2 \in A$; **b)** $2 \in B$; **c)** $6 \in A$; **d)** $6 \in B$; **e)** $0 \in A$?

1.2. Neka je $X = \{1, 2, 3, 4\}$ i $Y = \{2, 4, 6, 8\}$. Jesu li istinite sljedeće tvrdnje:

a) $1 \notin X$; **b)** $1 \notin Y$; **c)** $2 \notin X$; **d)** $2 \notin Y$; **e)** $3 \notin X$?

1.3. Zapišite navođenjem svih elemenata skupa:

a) skup djelitelja broja 24;

b) skup višekratnika broja 3 manjih od 20;

c) skup parnih brojeva većih od 10 i manjih od 25;

d) skup neparnih brojeva koji nisu manji od 11 i koji nisu veći od 25;

e) skup svih prostih brojeva koji nisu veći od 19.

1.4. Zapišite navođenjem svih elemenata skupa:

a) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 3 < x \leqslant 10\}$; **b)** $B = \{x \in \mathbf{N} \mid 5 \leqslant x \leqslant 12\}$;

c) $C = \{x \in \mathbf{N} \mid (x-4)(x-2) = 0\}$; **d)** $D = \{x \in \mathbf{N} \mid (x+3)(x-3)(x+2) = 0\}$;

e) $E = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2(x-2)^2(x+4=0\}$; **f)** $F = \{x \in \mathbf{Q} \mid x = \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbf{N}\ \text{i}\ 5 < x < 10\}$.

1.5. Neka je $S = \{x \mid x$ je djelitelj broja $6\}$. Koliko elemenata ima taj skup? Jesu li istinite sljedeće tvrdnje:

a) $1 \in S$; **b)** $2 \notin S$; **c)** $3 \in S$; **d)** $4 \notin S$; **e)** $5 \in S$?

1.6. Neka je $A = \{y \mid y$ je cijeli broj manji od $0\}$, $B = \{y \mid y$ je prirodan broj manji od $0\}$, $C = \{y \mid y$ je cijeli broj manji od $10\}$ i $D = \{y \mid y$ je prirodan broj manji od $10\}$. Koji je od tih skupova prazan skup?

1.7. Zadan je skup $S = \{-5, -2.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 3, 3.5, 5\}$. Odredite podskup skupa S kojeg su elementi:

a) prirodni brojevi; **b)** cijeli brojevi; **c)** racionalni brojevi.

1.8. Neka je $S = \{5, 6, 9, 10\}$. Jesu li istinite sljedeće tvrdnje:

a) $\{5\} \subseteq S$; **b)** $\emptyset \subseteq S$;

c) $\{4, 5, 6\} \subseteq S$; **d)** $S \subseteq \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$?

1.9. Neka je $A = \{x \mid x$ je paran broj $\}$. Jesu li istinite sljedeće tvrdnje:

a) $\emptyset \subseteq A$; **b)** $A \subseteq \emptyset$;

c) $\{2, 4, 12, 32\} \subseteq A$; **d)** $A \subseteq \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$?

1.10. Neka je $A = \{2, 3, 5, 7\}$. Odredite sve podskupove skupa A . Koliko elemenata ima skup kojega su elementi svi podskupovi skupa A ?

1.11. Jesu li jednaki skupovi:

a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{4, 3, 2, 1, 0\}$; **b)** $S = \{a, b, c, d, e\}$ i $T = \{a, b, c, d\}$;

c) $X = \{0, 2, 4, 6\}$ i $Y = \{0, 2, 0, 4, 0, 6, 0\}$?

1.12. Odredite partitivni skup $\mathscr{P}(S)$ ako je $S = \{1, 2, 3\}$.

1.13. Odredite uniju skupova A i B ako je:

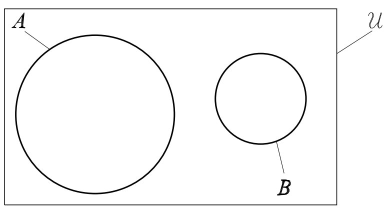
a) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ i $B = \{3, 6, 9\}$;

b) $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$ i $B = \{x \mid x$ je višekratnik broja 3 manji od $20\}$;

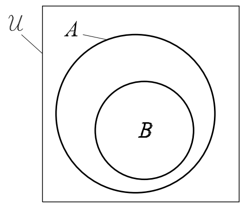
c) $A = \{1\}$ i $B = \emptyset$.

1.14. Na sljedećim Venn-Eulerovim dijagramima osjenčajte $A \cup B$:

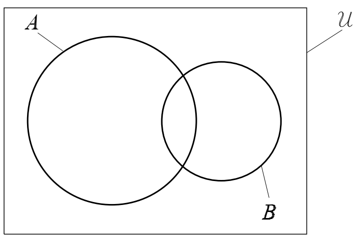
a)



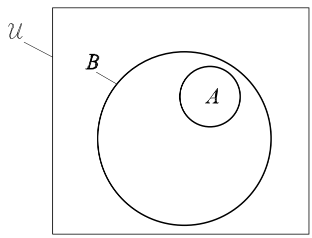
b)



c)



d)



1.15. Odredite presjek skupova A i B ako je:

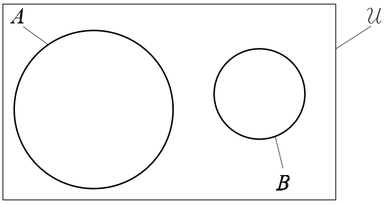
a) $A = \{5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ i $B = \{5, 7, 9\}$;

b) $A = \{x \mid x$ je paran broj manji od $40\}$ i $B = \{x \mid x$ je paran broj $\}$;

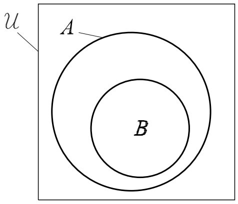
c) $A = \emptyset$ i $B = \{x \mid x$ je planina u Hrvatskoj $\}$.

1.16. Na sljedećim Venn-Eulerovim dijagramima osjenčajte $A \cap B$:

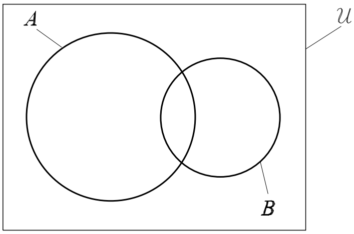
a)



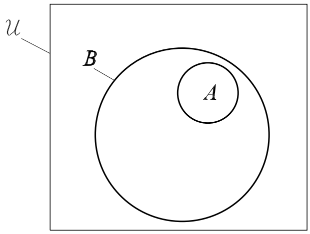
b)



c)



d)



1.17. Neka je $A = \{x \mid x$ je višekratnik broja 4 manji od $25\}$, $B = \{x \mid x$ je djelitelj broja $10\}$, $C = \{x \mid x$ je paran broj $\}$ i $D = \{x \mid x$ je višekratnik broja $8\}$. Koji su od tih skupova po parovima disjunktni?

1.18. Neka je $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $C = \{1, 2, 4, 8\}$. Odredite:

a) $(A \cup B) \cap C$; **b)** $(A \cap B) \cup C$; **c)** $A \cap (B \cup C)$.

1.19. Odredite $A \backslash B$ ako je:

a) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ i $B = \{4, 8, 12, 16\}$;

b) $A = \{5, 8, 13, 21\}$ i $B = \{5, 10, 15, 20\}$;

c) $A = \{x \mid x$ je višekratnik broja 7 manji od $30\}$ i $B = \{15, 18, 21, 24\}$.

1.20. Odredite $B \backslash A$ ako je:

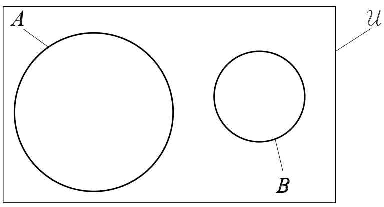
a) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ i $B = \{4, 8, 12, 16\}$;

b) $A = \{5, 8, 13, 21\}$ i $B = \{5, 10, 15, 20\}$;

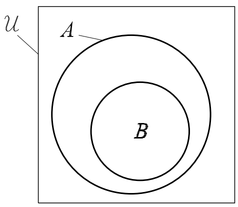
c) $A = \{x \mid x$ je višekratnik broja 7 manji od $30\}$ i $B = \{15, 18, 21, 24\}$.

1.21. Na sljedećim Venn-Eulerovim dijagramima osjenčajte $A \backslash B$:

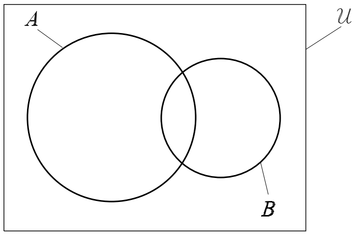
a)



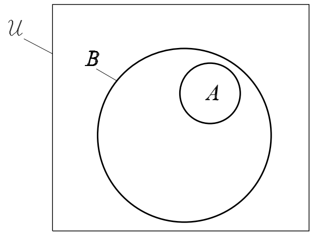
b)



c)



d)



1.22. Neka je $A = \{x \mid x$ je djelitelj broja $36\}$, $B = \{x \mid x$ je kvadrat prirodnog broja $\}$ i $C = \{x \mid x$ je višekratnik broja 4 manji od $40\}$. Odredite:

a) $(A \cap B) \backslash C$; **b)** $(A \backslash B) \cap C$; **c)** $(A \backslash B) \cup C$.

1.23. Neka je $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ univerzalni skup. Odredite A^C ako je:

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; **b)** $A = \{2, 4, 6, 8\}$; **c)** $A = \{1, 4, 7, 8, 9\}$.

1.24. Neka je $\mathscr{U} = \{x \mid x$ je prirodan broj manji od $50\}$ univerzalni skup. Odredite $A^C \cup B$ ako je:

a) $A = \{x \mid x$ je prirodan broj manji od $40\}$ i $B = \{x \mid x$ je višekratnik broja 5 manji od $50\}$;

b) $A = \mathscr{U}$ i $B = \{2, 8\}$.

1.25. Odredite Kartezijev produkt $X \times Y$ skupova:

a) $X = \{1, 2, 3, 4\}$ i $Y = \{a, b\}$;

b) $X = \{x, y, z\}$ i $Y = \{a, b, c\}$;

c) $X = \{\alpha, \beta\}$ i $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1.26. Odredite Kartezijev produkt $Y \times X$ skupova iz zadatka 1.25.

1.27. Provjerite je li f funkcija:

a) $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbf{N}$,

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	4	6	8	10

;

b) $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbf{N}$,

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	4	2	8	10

;

c) $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbf{N}$,

x	1	2	2	3	4	5
$f(x)$	2	4	6	8	8	10

;

d) $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbf{N}$,

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	0	5	7	8

;

e) $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbf{N}$,

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	5	5	5	5	5

;

f) $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbf{N}$,

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	2	3	4	5

.

1.28. Je li zadano pridruživanje funkcija:

a) $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(x) = x + 1$; **b)** $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(x) = x - 1$;

c) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(x) = x - 1$; **d)** $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(x) = \dfrac{x}{2}$?

1.29. Jesu li funkcije $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(x) = 3x$ i $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $g(x) = x + 3$ jednake?

1.30. Jesu li funkcije $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(x) = 2x$ i $g : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$, $g(x) = 2x$ jednake?

1.31. Jesu li funkcije $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$ i $g : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$, $g(x) = x^3$ jednake?

1.32. Odredite tablicama sve funkcije $f : \{1, 2\} \to \{1, 2\}$.

1.33. Zadani su skupovi $A = \{a, b, c, d\}$ i $B = \{1, 2, 3\}$, i funkcija $f : A \to B$ tablicom

x	a	b	c	d
$f(x)$	1	2	3	2

a) Je li funkcija f surjekcija?
b) Je li funkcija f injekcija?
c) Je li funkcija f bijekcija?

1.34. Zadani su skupovi $A = \{a, b, c, d\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4\}$, i funkcija $f : A \to B$ tablicom

x	a	b	c	d
$f(x)$	4	3	2	4

a) Je li funkcija f surjekcija?
b) Je li funkcija f injekcija?
c) Je li funkcija f bijekcija?

1.35. Zadani su skupovi $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{4, 5, 6\}$, i funkcija $f : A \to B$ tablicom

x	1	2	3
$f(x)$	6	4	5

a) Je li funkcija f surjekcija?
b) Je li funkcija f injekcija?
c) Je li funkcija f bijekcija?

1.36. Je li funkcija $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(x) = x - 2$:
a) surjekcija; **b)** injekcija; **c)** bijekcija?

1.37. Je li funkcija $f : \mathbf{Q}\backslash\{1\} \to \mathbf{Q}$, $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$:
a) surjekcija; **b)** injekcija; **c)** bijekcija?

1.38. Je li funkcija $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $g(x) = x + 1$:
a) surjekcija; **b)** injekcija; **c)** bijekcija?

1.39. Je li funkcija $g : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$, $g(x) = -x$:
a) surjekcija; **b)** injekcija; **c)** bijekcija?

1.40. Je li funkcija $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(x) = -x$:
a) surjekcija; **b)** injekcija; **c)** surjekcija?

1.41. Je li funkcija $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}^+$, $g(x) = 2x^2$:
a) surjekcija; **b)** injekcija; **c)** bijekcija?

1.42. Je li funkcija $h : \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$, $h(x) = \dfrac{1}{2x+1}$:
a) surjekcija; **b)** injekcija; **c)** bijekcija?