

1.

Omjeri, razmjeri i razmjernost veličina



Omjer je kvocijent dviju istovrsnih veličina

$$a : b = k \quad \text{ili} \quad \frac{a}{b} = k, \quad (1)$$

gdje je:

a — prvi član omjera,

b — drugi član omjera,

k — vrijednost (kvocijent) omjera.

Svojstva omjera:

Vrijednost omjera se ne mijenja ako se članovi omjera pomnože (proširivanje omjera) ili podijele (skraćivanje omjera) s nekim realnim brojem različitim od nule.

$$(a \cdot c) : (b \cdot c) = k. \quad (2)$$

$$(a : d) : (b : d) = k. \quad (3)$$

Dva omjera su jednaka ako imaju jednake kvocijente. Ako je

$$a : b = k \quad c : d = k,$$

tada je

$$a : b = c : d. \quad (4)$$

Složeni omjer je umnožak n jednostavnih omjera.

Ako postoji n jednostavnih omjera:

$$\begin{aligned} a_1 : b_1 &= k_1 \\ a_2 : b_2 &= k_2 \\ &\dots \\ a_n : b_n &= k_n, \end{aligned} \quad (5)$$

složeni omjer je

$$\boxed{(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n) : (b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n) = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n}. \quad (6)$$

Produženi omjer je skraćeni način pisanja n jednostavnih omjera.

Ako postoji n jednostavnih omjera, takvih da je

$$\begin{aligned} a_1 : a_2 &= k_1 \\ a_2 : a_3 &= k_2 \\ &\dots \\ a_{n-1} : a_n &= k_{n-1}, \end{aligned} \quad (7)$$

produženi omjer je:

$$\boxed{a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_n}. \quad (8)$$

Primjer 1. U jednom hotelu prošle godine prosječan broj noćenja iznosio je 200, a ove godine 300 osoba u jednom danu. Koliko je puta broj noćenja ove godine veći?

▷ $300 : 200 = \frac{300}{200} = \frac{3}{2} = 1.5$. Broj noćenja ove godine u tom hotelu je 1.5 puta veći. ◁

Primjer 2. Zadane omjere napiši u obliku omjera prirodnih brojeva:

a) $1.5 : 5$; b) $3\frac{1}{2} : 1\frac{4}{3}$.

▷ a) Proširimo omjer s 2: $1.5 : 5 = (1.5 \cdot 2) : (5 \cdot 2) = 3 : 10$.

b) Zadani omjer najprije proširimo sa 6, a zatim skratimo sa 7: $3\frac{1}{2} : 1\frac{4}{3} = \frac{7}{2} : \frac{7}{3} = \left(\frac{7}{2} \cdot 6\right) : \left(\frac{7}{3} \cdot 6\right) = 21 : 14 = (21 : 7) : (14 : 7) = 3 : 2$. ◁

Primjer 3. Napišite složeni omjer iz ovih jednostavnih omjera:

$$10 : 2 = 5, \quad \frac{1}{6} : \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

▷ Složeni omjer je:

$$\begin{aligned} \left(10 \cdot \frac{1}{6}\right) : \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) &= 5 \cdot \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} : 1 &= \frac{5}{3}. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Primjer 4. Zadani su jednostavni omjeri:

$$6 : 2 = 3$$

$$14 : 7 = 2$$

$$\frac{1}{6} : \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

Napišite produženi omjer.

▷ Jednostavne omjere napišimo tako da drugi član prvog omjera bude jednak prvom članu drugog omjera, drugi član drugog omjera da bude jednak prvom članu trećeg omjera. Proširimo prvi omjer sa 7, a treći s 42:

$$(6 \cdot 7) : (2 \cdot 7) = 3$$

$$14 : 7 = 2$$

$$\left(\frac{1}{6} \cdot 42\right) : \left(\frac{1}{2} \cdot 42\right) = \frac{1}{3}$$

Dakle,

$$42 : 14 = 3$$

$$14 : 7 = 2$$

$$7 : 21 = \frac{1}{3}$$

Produženi omjer je $42 : 14 : 7 : 21$. ◁

Zadaci za vježbu



1.1. Da li su jednaki sljedeći parovi omjera:

a) $30 : 12$ i $35 : 14$;

b) $18 : 45$ i $12 : 20$?

1.2. Izračunaj vrijednost omjera:

a) $3\frac{1}{3} : 2$; b) $1.75 : 0.5$; c) $2\frac{1}{2} : 3\frac{2}{3}$; d) $\frac{3}{4} : \frac{12}{18}$.

1.3. Zadane omjere napiši u obliku omjera prirodnih brojeva:

a) $3\frac{1}{3} : 2$; b) $1.75 : 0.5$; c) $2\frac{1}{2} : 3\frac{2}{3}$; d) $\frac{3}{4} : \frac{12}{18}$.

1.4. Zadane omjere napiši u obliku omjera tako da prvi član bude 1:

a) $0.2 : 3$; b) $10 : 36$; c) $\frac{5}{6} : \frac{2}{3}$; d) $2\frac{3}{5} : 0.6$.

1.5. Sljedeće omjere napiši u obliku omjera tako da drugi član bude 30:

a) $2 : 5$; b) $0.4 : 3$; c) $\frac{1}{2} : \frac{3}{5}$; d) $4\frac{1}{3} : \frac{2}{7}$.

1.6. Odredi nepoznati član omjera $a : b = k$ ako je:

- a) $a = 3, k = 7$; b) $a = 3\frac{1}{6}, k = 2\frac{3}{8}$;
 c) $b = 0.75, k = 3$; d) $b = 3, k = 0.4$.

1.7. Sljedeće jednostavne omjere napiši u obliku složenog omjera:

- a) $4 : 2 = 2$ $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
 b) $8 : 3 = \frac{8}{3}$ $12 : 6 = 2$
 $10 : 2 = 5$; $4 : 1\frac{1}{2} = \frac{8}{3}$.

1.8. Napiši produženi omjer iz sljedećih omjera:

- a) $\frac{3}{6} : \frac{4}{7}$ b) $\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} : \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}}$ c) $\frac{\frac{1}{3}}{6} : \frac{\frac{1}{4}}{8}$
 $2\frac{1}{4} : 2$; $0.8 : 3$.

1.9. Što je veće:

- a) $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ ili $3 : 2$; b) $\sqrt{2} : \sqrt[3]{5}$ ili $\sqrt[3]{2} : \sqrt{5}$?

1.10. Izračunaj vrijednost omjera ako je zadano:

- a) $\frac{3}{4}$ km : $\frac{1350}{3}$ m; b) $\frac{5}{3}$ kg : $\frac{45}{6}$ dag; c) $\frac{3}{4}$ h : $\frac{15}{18}$ min.

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad \text{i} \quad c : d = k,$$

tada je *razmjer ili proporcija*;

$$\boxed{a : b = c : d}, \quad (9)$$

gdje su:

- a, b, c, d — članovi razmjera, i to:
 a — prvi član (vanjski član),
 b — drugi član (unutarnji član),
 c — treći član (unutarnji član),
 d — četvrti član (vanjski član),
 a, b — prednji članovi,
 c, d — zadnji članovi.



Svojstva razmjera:

Umnožak vanjskih članova razmjera jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera:

$$\begin{array}{l} a : b = c : d \\ a \cdot d = b \cdot c. \end{array} \quad (10)$$

Ovo svojstvo koristimo kada treba provjeriti valjanost razmjera.

Razmjer ostaje valjan ako dva unutarnja ili dva vanjska člana međusobno zamijene mjesta, tj.

$$\begin{array}{l} a : b = c : d \\ a : c = b : d \\ d : b = c : a. \end{array} \quad (11)$$

Razmjer ostaje valjan ako se pomnoži (podijeli) jedan unutarnji i jedan vanjski član istim brojem r različitim od nule, tj.

$$\begin{array}{l} a : b = c : d \\ (a \cdot r) : b = (c \cdot r) : d \\ (a \cdot r) : (b \cdot r) = c : d \\ a : (b \cdot r) = c : (d \cdot r) \\ a : b = (c \cdot r) : (d \cdot r). \end{array} \quad (12)$$

Za razmjer $a : b = c : d$ vrijede i ova svojstva:

$$\begin{array}{l} (a + b) : (c + d) = a : c \\ (a + b) : (c + d) = b : d \\ (a - b) : (c - d) = a : c \\ (a - b) : (c - d) = b : d \end{array} \quad (13)$$

uz uvjet da nijedan član razmjera nije jednak nuli.

Ako postoji n jednostavnih razmjera:

$$\begin{array}{l} a_1 : b_1 = c_1 : d_1 \\ a_2 : b_2 = c_2 : d_2 \\ \dots \\ a_n : b_n = c_n : d_n, \end{array} \quad (14)$$

složeni razmjer je:

$$(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n) : (b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n) = (c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n) : (d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n) \quad (15)$$

Ako postoji n jednakih omjera:

$$\begin{array}{l} a_1 : b_1 = k \\ a_2 : b_2 = k \\ \dots \\ a_n : b_n = k, \end{array} \quad (16)$$

produženi razmjer je:

$$\boxed{a_1 : a_2 : \dots : a_n = b_1 : b_2 : \dots : b_n} . \quad (17)$$

Produženi razmjer (17) ima ova svojstva ($r \neq 0$):

$$\boxed{\begin{aligned} (a_1 \cdot r) : (a_2 \cdot r) : \dots : (a_n \cdot r) &= b_1 : b_2 : \dots : b_n \\ a_1 : a_2 : \dots : a_n &= (b_1 \cdot r) : (b_2 \cdot r) : \dots : (b_n \cdot r) \\ (a_1 : r) : (a_2 : r) : \dots : (a_n : r) &= b_1 : b_2 : \dots : b_n \\ a_1 : a_2 : \dots : a_n &= (b_1 : r) : (b_2 : r) : \dots : (b_n : r) \end{aligned}} \quad (18)$$

$$\boxed{\begin{aligned} (a_1 \pm \dots \pm a_n) : (b_1 \pm \dots \pm b_n) &= a_1 : b_1 \\ (a_1 \pm \dots \pm a_n) : (b_1 \pm \dots \pm b_n) &= a_2 : b_2 \\ &\dots \\ (a_1 \pm \dots \pm a_n) : (b_1 \pm \dots \pm b_n) &= a_n : b_n \end{aligned}} \quad (19)$$

Primjer 5. Napišite razmjer iz ovih jednostavnih omjera:

$$5 : 2 = 2.5 \quad \frac{1}{4} : \frac{1}{10} = 2.5.$$

▷ Razmjer je: $5 : 2 = \frac{1}{4} : \frac{1}{10}$. ◁

Primjer 6. Primijenimo svojstva razmjera na razmjeru:

$$5 : 4 = 20 : 16.$$

▷ Tada je:
prema svojstvu (10)

$$5 \cdot 16 = 4 \cdot 20$$

prema (11)

$$5 : 20 = 4 : 16$$

$$16 : 4 = 20 : 5$$

prema (12)

$$(5 \cdot 2) : 4 = (20 \cdot 2) : 16$$

$$(5 : 5) : 4 = (20 : 5) : 16$$

$$5 : (4 \cdot 2) = 20 : (16 \cdot 2)$$

$$5 : 4 = (20 \cdot 2) : (16 \cdot 2)$$

$$5 : 4 = (20 : 2) : (16 : 2)$$

prema (13)

$$(5 + 4) : (20 + 16) = 5 : 20$$

$$(5 + 4) : (20 + 16) = 4 : 16$$

$$(5 - 4) : (20 - 16) = 5 : 20$$

$$(5 - 4) : (20 - 16) = 4 : 16 \quad \triangleleft$$

Primjer 7. Napišite složeni razmjer od jednostavnih razmjera:

$$3 : 1 = 12 : 4$$

$$1 : 5 = 2 : 10$$

$$2 : 3 = \frac{1}{3} : \frac{1}{2}$$

▷ Složeni razmjer je:

$$(3 \cdot 1 \cdot 2) : (1 \cdot 5 \cdot 3) = \left(12 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3}\right) : \left(4 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}\right)$$

ili

$$6 : 15 = 8 : 20. \quad \triangleleft$$

Primjer 8. Napišite produženi razmjer od ova tri jednaka omjera:

$$3 : 1 = 3$$

$$6 : 2 = 3$$

$$1.5 : 0.5 = 3.$$

▷ Produženi razmjer jednak je: $3 : 6 : 1.5 = 1 : 2 : 0.5. \quad \triangleleft$

Primjer 9. Napišite produženi razmjer od zadanih razmjera:

$$x : y = 3 : 8$$

$$y : z = 1 : 2$$

$$z : v = 4 : 5$$

▷ Primijenimo svojstva razmjera (pomnožimo desne strane razmjera tako da drugi član omjera bude jednak prvom članu sljedećeg omjera).

$$x : y = 3 : 8$$

$$y : z = 1 : 2 \quad / \cdot 8$$

$$z : v = 4 : 5$$

$$x : y = 3 : 8$$

$$y : z = 8 : 16$$

$$z : v = 4 : 5 \quad / \cdot 4$$

$$\begin{aligned}x : y &= 3 : 8 \\y : z &= 8 : 16 \\z : v &= 16 : 20\end{aligned}$$

Produženi razmjernik jednak je:

$$x : y : z : v = 3 : 8 : 16 : 20. \triangleleft$$

Primjer 10. Ako je $a + b + c = 45$, treba izračunati a , b , c iz razmjera $a : b : c = 6 : 5 : 4$ (uz pomoć svojstava razmjera (19)).

$$\begin{aligned}\triangleright \quad (a + b + c) : (6 + 5 + 4) &= a : 6 \\45 : 15 &= a : 6 \\15a &= 270 \\a &= 270 : 15 \\a &= 18 \\(a + b + c) : (6 + 5 + 4) &= b : 5 \\45 : 15 &= b : 5 \\15b &= 225 \\b &= 225 : 15 \\b &= 15 \\(a + b + c) : (6 + 5 + 4) &= c : 4 \\45 : 15 &= c : 4 \\15c &= 180 \\c &= 180 : 15 \\c &= 12. \triangleleft\end{aligned}$$

Zadaci za vježbu



- 1.11.** Provjeri valjanost razmjera:
a) $240 : 81 = 11.5 : 3$; **b)** $0.15 : 4.2 = 0.8 : 22.4$.
- 1.12.** Sljedeće jednakosti napiši u obliku razmjera:
a) $2 \cdot 9 = 6 \cdot 3$; **b)** $4 \cdot 5 = 2 \cdot 10$.
- 1.13.** Odredi nepoznati član x razmjera:
a) $2 : 5 = 3 : x$; **b)** $140 : x = 120 : 18$;
c) $3.2 : 4 = x : 1.4$; **d)** $x : 7 = 3.5 : 0.2$.

- 1.14.** Odredi x iz razmjera:
 a) $3 : 4 = 2 : (2 + x)$; b) $(1 + x) : 3 = (1 - x) : 2$;
 c) $x : 5 = (x - 3) : 4$; d) $(x + 3) : 4 = (x - 2) : 3$.
- 1.15.** Odredi x iz razmjera:
 a) $1 : x = (x - 3) : 4$; b) $(x + 3) : (2x + 5) = 2 : (x + 4)$;
 c) $1 : (x - 2) = (x + 2) : (7x - 10)$; d) $(x - 2) : 1 = (7 - 6x) : (x - 2)$.
- 1.16.** Koristeći svojstva razmjera (13), odredi nepoznate veličine:
 a) $x_1 + x_2 = 28$ b) $a - b = 5$
 $x_1 : x_2 = 2 : 5$; $a : b = 4 : 3$.
- 1.17.** Napiši produženi razmjer iz razmjera:
 $a : b = 1 : 2$ $a : b = 3 : 4$
 a) $b : c = 3 : 5$ b) $b : c = 4 : 9$
 $c : d = 4 : 6$; $c : d = 2 : 1$.
- 1.18.** Odredi produženi razmjer iz razmjera:
 $a : b = 3 : 2$ $a : b = \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$
 a) $b : c = 3 : 4$ b) $c : b = \frac{1}{2} : 4$
 $c : d = 4 : 5$ $c : d = 3 : 2$
 $d : e = 4 : 6$;
- 1.19.** Kutovi trokuta odnose se kao $4 : 6 : 8$. Odredi kutove tog trokuta.
- 1.20.** U leguri mase 320 g odnos čistog zlata prema količini bakra odnosi se kao $7 : 1$. Kolika je masa čistog zlata u leguri?
- 1.21.** Tri radnika obavila su neki posao. Ako je radnik A radio 12 sati, radnik B 16 sati, a radnik C 20 sati, kako će podijeliti zaradu od 2400 kn? (Pretpostavlja se da su jednako radili.)

1.3.1. Upravo razmjerne veličine

Za dvije promjenjive međusobno zavisne veličine x i y kažemo da su *upravo razmjerne* ili *direktno proporcionalne* s koeficijentom razmjernosti (proporcionalnosti) k , $k \neq 0$, ako je

$$\boxed{\frac{y}{x} = k \quad \text{ili} \quad y = k \cdot x} \quad (20)$$

Svako povećanje (smanjenje) jedne veličine dovodi jednako toliko puta do povećanja (smanjenja) druge veličine.

Dvije zavisne veličine su upravo razmjerne ako je omjer vrijednosti jedne veličine jednak omjeru vrijednosti druge veličine.

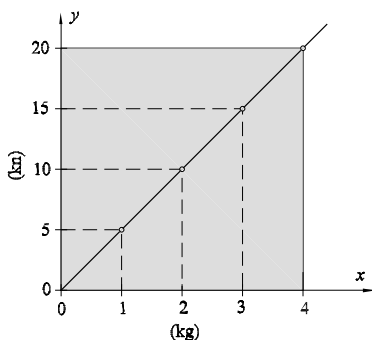
$$\boxed{y_1 : y_2 = x_1 : x_2}. \quad (21)$$

Primjer 1. Za kilogram jabuka potrebno je platiti 5 kn, za 2 kg 10 kn, itd. Ako s x označimo količinu jabuka (kg), s y cijenu (kn), tada odnos zavisnih veličina x i y možemo prikazati tablicom:

x	1	2	3	4
y	5	10	15	20

Kakve su veličine x i y ?

▷ Grafički prikaz:



Promotrimo omjere $\frac{y}{x}$:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{5}{1} = 5, \quad \frac{y_2}{x_2} = \frac{10}{2} = 5, \quad \frac{y_3}{x_3} = \frac{15}{3} = 5, \quad \frac{y_4}{x_4} = \frac{20}{4} = 5.$$

Veličine su upravo razmjerne (proporcionalne), a koeficijent razmjernosti $k = 5$.

Dakle, $y = 5x$, pa je:

$$\begin{aligned} y_1 &= 5 \cdot x_1 = 5 \cdot 1 = 5 \\ y_2 &= 5 \cdot x_2 = 5 \cdot 2 = 10 \\ y_3 &= 5 \cdot x_3 = 5 \cdot 3 = 15 \\ y_4 &= 5 \cdot x_4 = 5 \cdot 4 = 20. \end{aligned}$$

Ako želimo kupiti *više* (manje) kg jabuka, potrebno je imati *više* (manje) novca (kn). ◁

1.3.2. Obrnuto razmjerne veličine

Za dvije promjenjive međusobno zavisne veličine x i y kažemo da su *obrnuto razmjerne* ili *indirektno proporcionalne* s koeficijentom obrnute razmjernosti k , $k \neq 0$, ako je

$$\boxed{y = \frac{k}{x} \quad \text{ili} \quad x \cdot y = k} . \quad (22)$$

Svako povećanje (smanjenje) jedne veličine dovodi jednako toliko puta do smanjenja (povećanja) druge veličine.

Dvije zavisne veličine su obrnuto razmjerne ako je omjer vrijednosti jedne veličine jednak obrnutom (recipročnom) omjeru vrijednosti druge veličine.

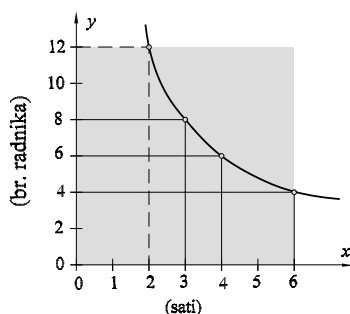
$$\boxed{y_1 : y_2 = x_2 : x_1} . \quad (23)$$

Primjer 1. 6 radnika mogu završiti određeni posao za 4 sata. 3 radnika bi taj isti posao završila za 8 sati. (Pretpostavljamo da svi radnici jednako obavljaju isti posao.) Ako s x označimo vrijeme (broj sati) da se obavi taj posao, a s y broj radnika, tada odnos zavisnih veličina x i y možemo prikazati tablicom:

x	2	3	4	6
y	12	8	6	4

Kakve su veličine x i y ?

▷ Grafički prikaz:



Zavisne veličine su obrnuto razmjerne:

$$x_1 \cdot y_1 = 2 \cdot 12 = 24, \quad x_2 \cdot y_2 = 3 \cdot 8 = 24, \quad x_3 \cdot y_3 = 4 \cdot 6 = 24, \quad k = 24.$$

Ako želimo za *manje* (više) sati obaviti taj posao, potrebno nam je *više* (manje) radnika. ◁

Zadaci za vježbu



1.22. Dvije zavisne veličine x i y imaju ove vrijednosti:

a) $\frac{x}{y} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 5 & 13 & 15 & \\ \hline 6 & 10 & 26 & 30 & \\ \hline \end{array};$

b) $\frac{x}{y} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 8 & 12 & 13 & \\ \hline 4 & 32 & 44 & 26 & \\ \hline \end{array};$

c) $\frac{x}{y} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 9 & 6 & 18 & \\ \hline 6 & 2 & 3 & 1 & \\ \hline \end{array};$

d) $\frac{x}{y} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 6 & 12 & 18 & 27 & \\ \hline 2 & 4 & 6 & 9 & \\ \hline \end{array}.$

Odredi tip razmjernosti tih veličina.

1.23. Za 52 kg krumpira plaćeno je 156 kn.

a) Koliko će se platiti za 6 kg krumpira?

b) Koliko krumpira možemo kupiti za 37.5 kn?

1.24. Za haljinu je potrebno 2.70 m tkanine širine 140 cm. Koliko je potrebno tkanine za istu haljinu širine 90 cm?

1.25. Za koliko će sati pješak prijeći 4.5 km ako 2 km prijeđe za 25 min?

1.26. Da bi se ispeklo 100 kg kruha, potrebno je 72.5 kg brašna. Koliko brašna treba da se dobije 550 kg kruha?

1.27. Iz 0.6 tona svježih jabuka dobije se 114 kg sušenih. Koliko se sušenih jabuka dobije od 80 kg svježih?

1.28. Dva radnika iskopaju 6 m^3 zemlje za 8 sati rada.

a) Za koje bi vrijeme taj posao uradilo 12 radnika?

b) Koliko bi bilo potrebno radnika da se posao obavi za 16 sati?

1.29. Ako 6 kamiona nosivosti 3.5 tona mogu prevesti neki teret, koliko kamiona nosivosti 3 tone može prevesti taj isti teret?

1.30. Automobil vozeći prosječnom brzinom 80 km/h stigne iz mjesta A u mjesto B za 1 h 20 min. Za koje bi vrijeme prešao taj put ako vozi prosječnom brzinom 100 km/h?