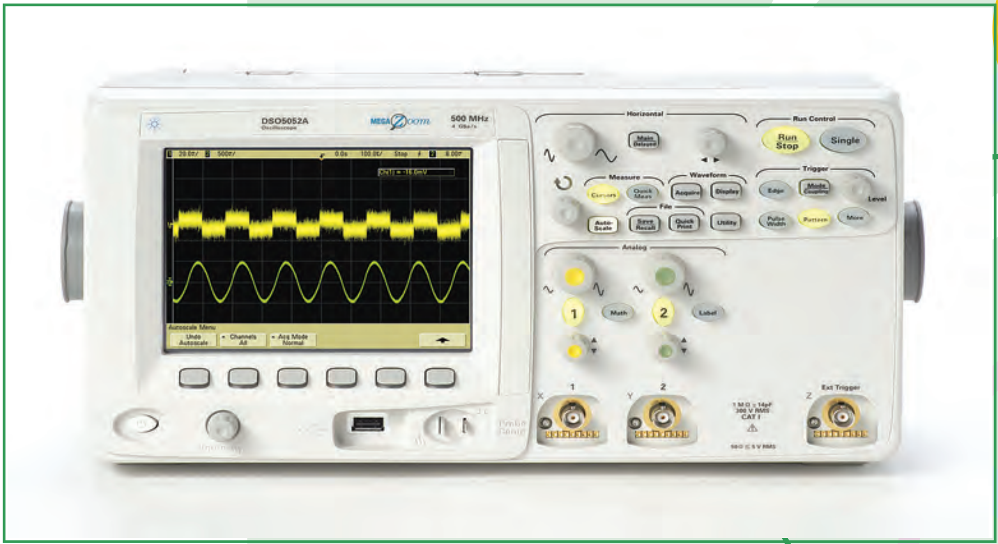
1

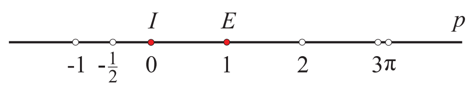
# Trigonometrijske funkcije realnog broja



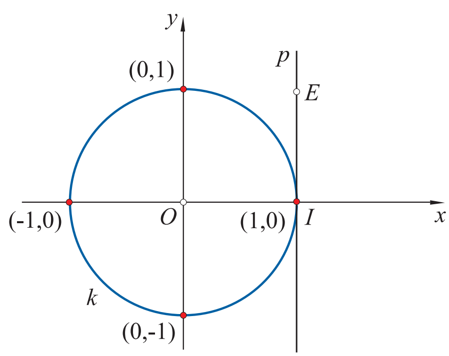


# 1.1. Brojevna kružnica

Na pravcu $p$ istaknimo dvije različite točke $I$ i $E$. Točki $I$ pridružimo broj 0, a točki $E$ broj 1. Svakoj točki pravca možemo pridružiti jedan broj i obratno. Pravac $p$ s tim pridruživanjem nazivamo **brojevni pravac**, točku $I$ nazivamo **ishodištem**, a točku $E$ **jediničnom točkom**.



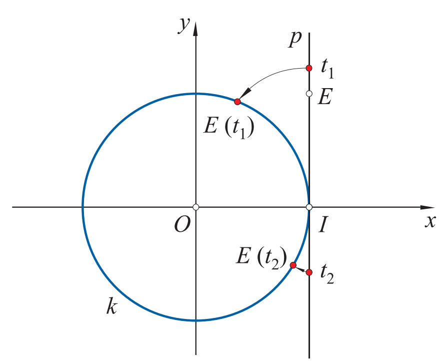

*Brojevni pravac.*




*Brojevni pravac $p$ dira kružnicu $k$,*
$d(O,I) = d(I,E) = 1$.

Neka je $k$ kružnica polumjera 1 sa središtem u ishodištu $O$ koordinatnog sustava u ravnini. Slovom $I$ označimo točku $(1,0)$ na $x$-osi. Njome postavimo brojevni pravac $p$ okomito na $x$-os tako da pozitivni brojevi na pravcu budu u prvom kvadrantu.

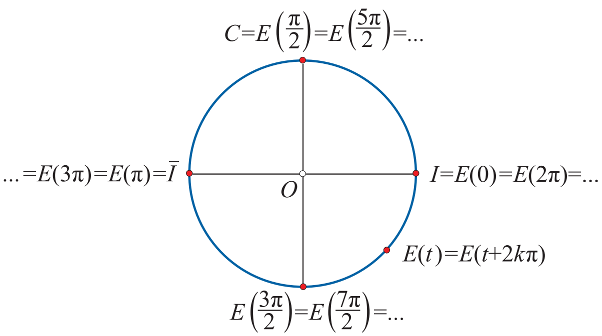
Pravac $p$ namotajmo bez klizanja i rastezanja na kružnicu $k$ tako da polupravac s pozitivnim brojevima namatamo u pozitivnom smjeru, a polupravac s negativnim brojevima u negativnom smjeru. Ovim namatanjem smo svakom realnom broju $t$ pridružili jednu točku $E(t)$ kružnice. Ovo pridruživanje zovemo **eksponencijalno preslikavanje** pravca na kružnicu i označavamo s $E$.




*Namatanje pravca na kružnicu.*

Kružnicu $k$ zajedno s eksponencijalnim preslikavanjem $E : \mathbf{R} \to k$ nazivamo **brojevna** ili **trigonometrijska kružnica**.

Broj 0 preslikava se u točku $I$. Kako je duljina jedinične kružnice jednaka $2\pi$, slijedi da se i brojevi $2\pi$, $4\pi$, $6\pi, \ldots$ preslikavaju isto u točku $I$.




Duljina jedinične polukružnice je $\pi$, pa se broj $\pi$ preslikava u točku $\bar{I}$ koja je dijametralno suprotna točki $I$. Ali isto tako, i brojevi $3\pi = \pi + 2\pi$, $5\pi = \pi + 2 \cdot 2\pi, \ldots$ se također preslikavaju u $\bar{I}$.

Četvrtina kružnice ima duljinu $\frac{\pi}{2}$, pa znači da se u točku $C$ preslikava broj $\frac{\pi}{2}$, ali i brojevi $\frac{\pi}{2} + 2\pi$, $\frac{\pi}{2} + 4\pi, \ldots$.

Općenito možemo zaključiti da se svake dvije točke koje su na pravcu udaljene za višekratnik broja $2\pi$ namatanjem stope u jednu točku kružnice, tj. vrijedi

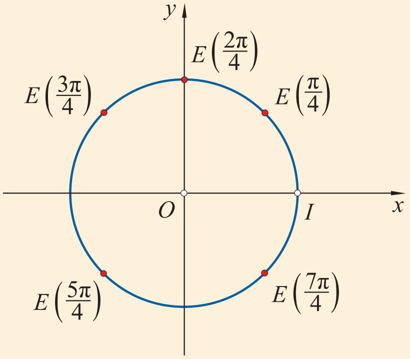
$$E(t + 2k\pi) = E(t) \text{ za svaki } t \in \mathbf{R} \text{ i } k \in \mathbf{Z}.$$

**Primjer 1.**

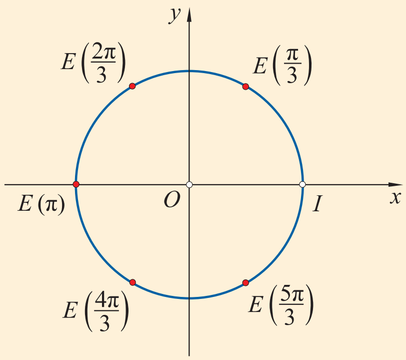
Nacrtajmo $E(t)$, ako je $t$ jednako:

**a)** $\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$; **b)** $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$; **c)** $\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

▶ **a)** Četvrtina polukružnice ima duljinu $\frac{\pi}{4}$. Točke $E\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $E\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $E\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, $E\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ dijele četvrtine kružnice na jednake dijelove.

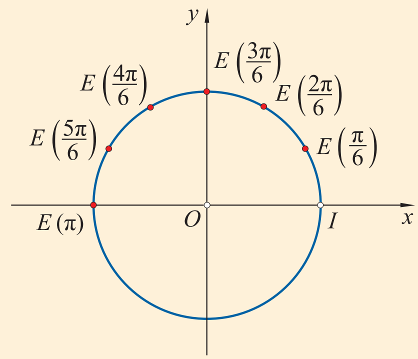


**b)**




*Trećina polukružnice ima duljinu* $\frac{\pi}{3}$.
*Točke* $E\left(\frac{\pi}{3}\right)$ *i* $E\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ *dijele gornju polukružnicu na tri jednaka dijela.*

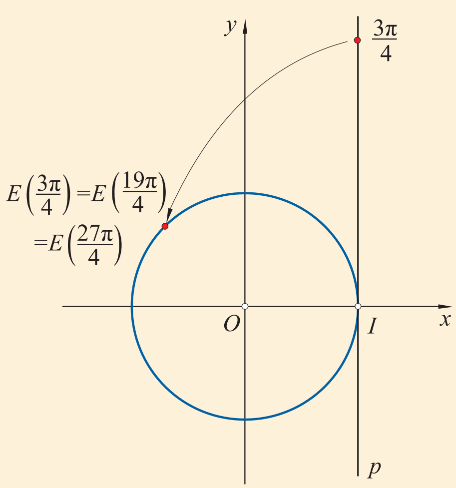
**c)**




*Točke* $E\left(\frac{\pi}{6}\right),\ldots,E\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ *dijele gornju polukružnicu na šest jednakih dijelova.*

## Primjer 2.

Za realni broj $t=\frac{19\pi}{4}$ nađimo brojeve $t_1 \in [0,2\pi\rangle$, $t_2 \in [6\pi,8\pi\rangle$, takve da vrijedi $E(t)=E(t_1)=E(t_2)$.




*Brojevi* $\frac{19\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{27\pi}{4}$ *preslikavaju se u istu točku trigonometrijske kružnice.*

Kako je $\frac{19\pi}{4}=4\pi+\frac{3\pi}{4}$ i $\frac{3\pi}{4}\in[0,2\pi\rangle$ to je $t_1=\frac{3\pi}{4}$.

Broj $t_2$ računamo ovako:

$$\begin{aligned}\frac{19\pi}{4}&=\left(4\pi+\frac{3\pi}{4}\right)-6\pi+6\pi\\&=(4\pi-6\pi)+\left(6\pi+\frac{3\pi}{4}\right)\\&=-2\pi+\frac{27\pi}{4},\end{aligned}$$

pa je $t_2=\frac{27\pi}{4}\in[6\pi,8\pi\rangle$.

# Zadaci 1.1.

**1.** Na brojevnoj kružnici odredi točke $E(t)$ ako je $t$:

**a)** $\pi$; **b)** $3\pi$; **c)** $2\,005\pi$; **d)** $-\pi$; **e)** $-5\pi$;
**f)** $-2\,003\pi$; **g)** $2\pi$; **h)** $8\pi$; **i)** $1\,626\pi$; **j)** $-2\pi$;
**k)** $-6\pi$; **l)** $-238\pi$; **k)** $\dfrac{\pi}{2}$; **l)** $\dfrac{9\pi}{2}$; **m)** $\dfrac{2\,005\pi}{2}$;
**n)** $-\dfrac{\pi}{2}$; **o)** $-\dfrac{9\pi}{2}$; **p)** $-\dfrac{2\,001\pi}{2}$.

**2.** Na brojevnoj kružnici odredi točke $E(t)$ ako je $t$:

**a)** $\dfrac{\pi}{3}$; **b)** $\dfrac{2\pi}{3}$; **c)** $\dfrac{\pi}{5}$; **d)** $\dfrac{21}{4}\pi$; **e)** $-\dfrac{3\pi}{4}$;
**f)** $-\dfrac{171}{5}\pi$; **g)** $-\dfrac{1\,998}{7}\pi$; **h)** $-\dfrac{289}{3}\pi$; **i)** $\dfrac{1\,999}{3}\pi$.

**3.** Na brojevnoj kružnici skiciraj položaj točke $E(t)$ ako je $t$:

**a)** $1$; **b)** $12.65$; **c)** $16.785$; **d)** $1\,988$; **e)** $-1$;
**f)** $-0.23$; **g)** $-1\,103$; **h)** $-30.28$; **i)** $6.72$;
pri čemu uzmi da je $\pi \approx 3.14159$.

**4.** Odredi $t \in [0, 2\pi\rangle$ takav da je $E(t) = E(x)$ ako je zadan $x$:

**a)** $132\pi$; **b)** $213\pi$; **c)** $-11\pi$; **d)** $-42\pi$; **e)** $\dfrac{19\pi}{2}$; **f)** $\dfrac{1\,999\pi}{2}$.

**5.** Odredi $t \in [0, 2\pi\rangle$ takav da je $E(t) = E(x)$ ako je zadan $x$:

**a)** $\dfrac{121\pi}{3}$; **b)** $\dfrac{1\,432\pi}{3}$; **c)** $\dfrac{127\pi}{6}$; **d)** $\dfrac{1\,546\pi}{5}$; **e)** $-\dfrac{237\pi}{4}$; **f)** $-\dfrac{37\pi}{10}$.

**6.** Odredi $t \in [0, 2\pi\rangle$ takav da je $E(t) = E(x)$ ako je zadan $x$:

**a)** $16.28$; **b)** $32.14$; **c)** $-10.31$; **d)** $-8$; **e)** $101$; **f)** $-7.51$,
pri čemu uzmi da je $\pi \approx 3.14$.

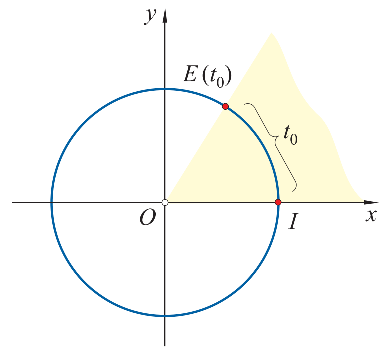
**7.** Odredi $t \in [-2\pi, 0\rangle$ takav da je $E(t) = E(x)$ ako je zadan $x$:

**a)** $13\pi$; **b)** $-1\,434\pi$; **c)** $\dfrac{25\pi}{4}$; **d)** $-\dfrac{1\,235\pi}{6}$; **e)** $\dfrac{132\pi}{17}$; **f)** $-\dfrac{218\pi}{25}$.

**8.** Odredi $t \in [10\pi, 12\pi\rangle$ takav da je $E(t) = E(x)$ ako je zadan $x$:

**a)** $\dfrac{\pi}{4}$; **b)** $\dfrac{3\pi}{4}$; **c)** $-\dfrac{\pi}{2}$; **d)** $\dfrac{32\pi}{3}$; **e)** $\dfrac{25\pi}{6}$; **f)** $-\dfrac{35\pi}{3}$.

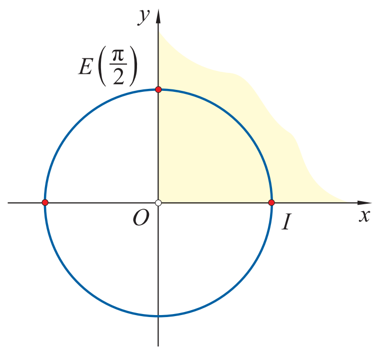
## 1.2. Kutovi i radijani

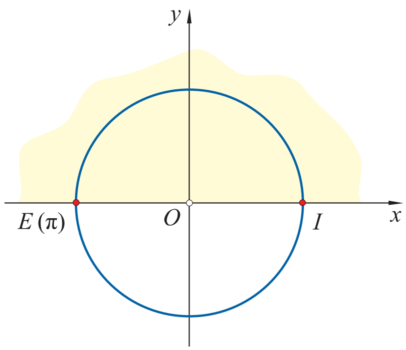



Neka je $t_0$ broj između 0 i $2\pi$. Namatanjem pravca na kružnicu taj se broj preslikava u točku $E(t_0)$.

Točkom $E(t_0)$ povucimo polupravac $OE(t_0)$ koji zajedno s pozitivnim dijelom $x$-osi određuje kut $\sphericalangle IOE(t_0)$. Duljina luka kružnice koji se nalazi u tom kutu jednaka je $t_0$. Taj se broj $t_0$ naziva **glavna** radijanska **mjera** kuta. Ako je $t_1$ neki drugi broj van intervala $[0, 2\pi\rangle$, ali čija se točka $E(t_1)$ podudara s točkom $E(t_0)$, tada broj $t_1$ zovemo radijanska **mjera** kuta. Glavna mjera i svaka druga mjera istog kuta razlikuju se za višekratnik broja $2\pi$, tj.

$$t_1 = t_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad t_0 = [0, 2\pi\rangle .$$




Na primjer, pravi kut (slika lijevo) ima glavnu mjeru $\frac{\pi}{2}$ radijana, što kraće pišemo $\frac{\pi}{2}$ rad, a neke druge mjere su mu $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{9\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{2}$ itd. Ispruženi kut (slika desno) ima glavnu mjeru $\pi$ rad, a neke druge mjere su mu $3\pi$, $5\pi$, $7\pi$, $-\pi$, $-3\pi$ itd.

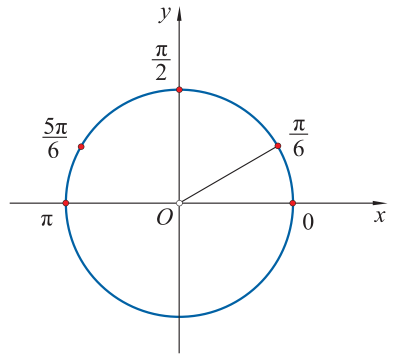
Povijesno gledano, stariji način mjerenja kutova jest mjerenje u stupnjevima. U tom slučaju je glavna mjera ispruženog kuta jednaka 180 stupnjeva, što kraće zapisujemo $180°$, a kut s mjerom od $t$ radijana ima

$$s = \frac{180}{\pi} \cdot t$$

stupnjeva. Pri toj pretvorbi obično koristimo i manje dijelove stupnja: minute ($1' = \frac{1}{60}$ stupnja) i sekunde ($1'' = \frac{1}{60}$ minute).

U sljedećoj tablici navedene su mjere nekih kutova u stupnjevima i u radijanima:

| mjera u stupnjevima | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $75°$ | $80°$ | $90°$ | $270°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| mjera u radijanima | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{12}$ | $\frac{4\pi}{9}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{2}$ |




Dakle, kad kažemo "kut od $30°$", "kut od $\frac{\pi}{6}$ rad" ili "kut od $390°$", "kut od $-\frac{11\pi}{6}$" radi se o istom kutu, ali s različitim mjerama: $30°$, $\frac{\pi}{6}$ rad, $390°$, $-\frac{11\pi}{6}$ rad. Ukoliko u mjeri kuta ne piše kratica "rad", podrazumijeva se da se radi o radijanskoj mjeri.

Uvest ćemo još jednu skraćenicu. Na brojevnoj ćemo kružnici ponekad umjesto oznake $E(t)$ pisati slovo $t$, uz tu točku ili unutar kuta.

**Primjer 1.**

Kutovima od

**a)** $328\pi$; **b)** $\frac{431}{3}\pi$; **c)** $1\,081°$; **d)** $-213°$

nađimo glavne mjere u radijanima.

**a)** Kako je $328\pi = 0 + 164 \cdot 2\pi$, to je glavna mjera tog kuta jednaka $0$ radijana.

**b)** Iz $\frac{431}{3}\pi = \frac{71 \cdot 6 + 5}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi + 71 \cdot 2\pi$ slijedi da je glavna mjera jednaka $\frac{5}{3}\pi$ radijana.

**c)** $1\,081° = 3 \cdot 360° + 1°$, pa je glavna mjera jednaka $1°$, tj. $\frac{\pi}{180}$ rad.

**d)** $-213° = -360° + 147°$, te je glavna mjera jednaka $147°$, tj. $\frac{147\pi}{180}$ rad.

**Primjer 2.**

Danu radijansku mjeru kuta napišimo u stupnjevima:

**a)** 1 rad; **b)** 34 rad; **c)** $-28.2$ rad.

**a)** Koristeći formulu imamo $s = \frac{180}{\pi}t = \frac{180}{t} = 57.295779°$. Također, mogli smo koristiti i džepno računalo tako da u stanju RAD upišemo dani broj u radijanima, tj. 1, te korištenjem tipki SHIFT DRG dok se ne dođe do stanja DEG dobivamo broj u stupnjevima. Uobičajeno je ovaj broj zapisati i pomoću minuta i sekunda. Broj minuta dobivamo tako da oduzmemo cjelobrojni dio i razliku pomnožimo sa $60$: $0.295779^\circ \cdot 60 = 17.74674'$. Oduzmemo li od ovog broja cjelobrojni dio i ostatak pomnožimo sa 60, dobit ćemo sekunde: $0.74674' \cdot 60 = 44.80''$. Dakle, mjera u stupnjevima kuta od 1 radijana iznosi $57^\circ 17' 45''$. Ovaj postupak pretvaranja stupnjeva u minute i sekunde je na većini džepnih računala također automatiziran (tipka $\rightarrow {}^\circ\,'\,''$).

**b)** $34\ \text{rad} = 1\,948.056503^\circ = 1\,948^\circ 3' 23''$. **c)** $-28.2\ \text{rad} = -1\,615.740982^\circ = -1\,615^\circ 44' 28''$.

### Primjer 3.

Napišimo $35^\circ 2' 14''$ u radijanima.

Prvo je potrebno dani broj pretvoriti u stupnjeve: $s = 35^\circ 2' 14'' = 35 + \dfrac{2}{60} + \dfrac{14}{3600} = 35.037222^\circ$, a zatim $t = \dfrac{s\pi}{180} = 0.611515$ rad. I ova pretvorba iz oblika "stupnjevi-minute-sekunde" u stupnjeve, te u radijane može se vršiti pomoću džepnog računala. Naime, računalo postavimo u stanje DEG te unesemo podatak u obliku $35.0214$. Pritiskom na tipku ${}^\circ\,'\,'' \rightarrow$ dobivamo $35.037222$, a zatim prelaskom u stanje RAD ( SHIFT DRG ) taj broj se pretvara u radijane. Tvoje računalo možda ima tipke DRG i ${}^\circ\,'\,'' \rightarrow$ drugačije označene. Zato se svatko mora pobliže upoznati s radom svog džepnog računala.

## Zadaci 1.2.

**1.** Pretvori u stupnjeve, minute i sekunde:

**a)** $1.8$ rad; **b)** $21.35$ rad; **c)** $-4.2$ rad.

**2.** Pretvori u radijane:

**a)** $10^\circ 21' 43''$; **b)** $31^\circ 2' 59''$; **c)** $121^\circ 1''$.

**3.** Napiši još bar 4 mjere kuta u radijanima čija je jedna mjera zadana, te pretvori sve te mjere iz radijana u stupnjeve:

**a)** $\dfrac{\pi}{2}$; **b)** $\dfrac{8}{3}\pi$; **c)** $\dfrac{19\pi}{4}$; **d)** $-\dfrac{141}{4}\pi$; **e)** $-\dfrac{1\,999}{3}\pi$; **f)** $-\dfrac{147}{5}\pi$.

**4.** Napiši još bar 4 mjere u stupnjevima kuta čija je jedna mjera zadana, te pretvori sve te mjere iz stupnjeva u radijane:

**a)** $330^\circ$; **b)** $-60^\circ$; **c)** $80^\circ$; **d)** $1\,440^\circ$; **e)** $-1\,998^\circ$; **f)** $-1^\circ$.

**5.** Odredi glavnu mjeru u radijanima kutova kojima su dane mjere:

**a)** $\dfrac{13\pi}{2}$; **b)** $\dfrac{148}{5}\pi$; **c)** $\dfrac{872}{3}\pi$; **d)** $-144\pi$; **e)** $-\dfrac{287}{4}\pi$; **f)** $-\dfrac{117}{10}\pi$.

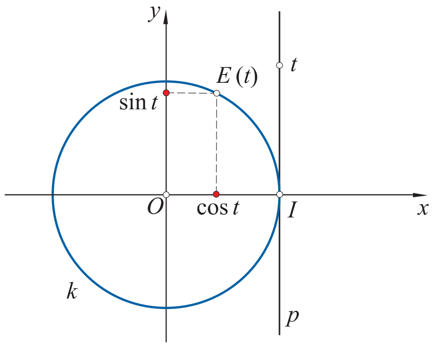
**6.** Odredi glavnu mjeru u stupnjevima kutova kojima su dane mjere:

**a)** $1\,080^\circ$; **b)** $456^\circ$; **c)** $12\,345^\circ$; **d)** $-345^\circ$; **e)** $-5^\circ$; **f)** $-1\,457^\circ$.

# 1.3. Definicija trigonometrijskih funkcija

## Funkcije sinus i kosinus

Namatanjem brojevnog pravca $p$ na kružnicu $k$, svaki se realni broj $t$ preslika u jednu točku $E(t)$ kružnice. Ta točka $E(t)$ ima dvije koordinate. Prvu nazivamo **kosinus broja** $t$, a drugu **sinus broja** $t$.




**Kosinus** realnog broja $t$ je apscisa one točke trigonometrijske kružnice koja je pridružena broju $t$.
**Sinus** realnog broja $t$ je ordinata one točke trigonometrijske kružnice koja je pridružena broju $t$.

Funkcija koja broju $t$ pridružuje broj $\cos t$ naziva se **kosinus** i označava se sa $\cos$, a funkcija koja broju $t$ pridružuje broj $\sin t$ naziva se **sinus** i označava se sa $\sin$. Funkcije kosinus i sinus definirane su na skupu $\mathbf{R}$, a kodomena im je $[-1,1]$ jer su koordinate točke $E(t)$ brojevi koji po apsolutnoj vrijednosti nisu veći od 1.

**Funkcije sinus i kosinus**

$$\cos : \mathbf{R} \to [-1,1] \qquad\qquad \sin : \mathbf{R} \to [-1,1]$$
$$t \mapsto \cos t \qquad\qquad t \mapsto \sin t$$

### Primjer 1.

Nacrtajmo točku $E(t)$ i izračunajmo sinus i kosinus od $t$, ako je $t$:

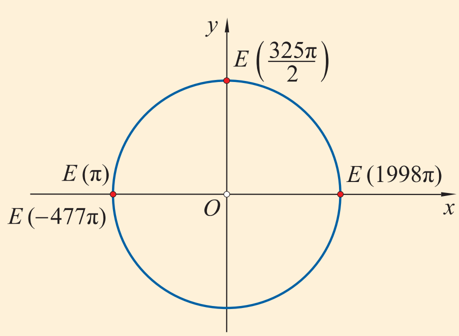
**a)** $\pi$; **b)** $1\,998\pi$; **c)** $-477\pi$; **d)** $\frac{325}{2}\pi$.

$\sin\pi = 0$, $\cos\pi = -1$;

$\sin 1\,998\pi = 0$, $\cos 1\,998\pi = 1$;

$\sin(-477\pi) = 0$, $\cos(-477\pi) = -1$;

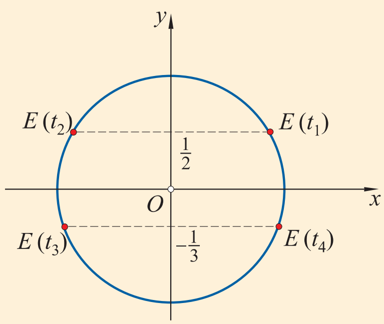
$\sin\frac{325}{2}\pi = 1$, $\cos\frac{325}{2}\pi = 0$.



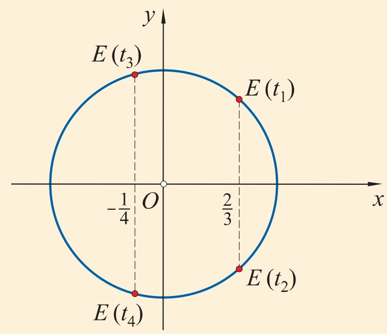
### Primjer 2.

Nacrtajmo točke $E(t)$ za koje vrijedi:

**a)** $\sin t = \dfrac{1}{2}$; **b)** $\sin t = -\dfrac{1}{3}$; **c)** $\cos t = \dfrac{2}{3}$; **d)** $\cos t = -\dfrac{1}{4}$.



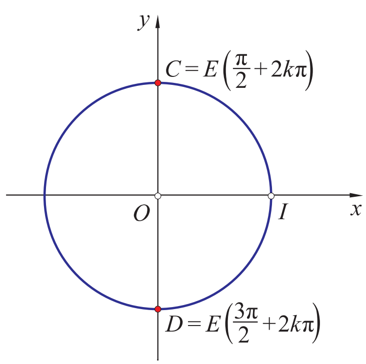

*Za točke* $E(t_1)$ *i* $E(t_2)$ *vrijedi* $\sin t_1 = \sin t_2 = \frac{1}{2}$. *Za točke* $E(t_3)$ *i* $E(t_4)$ *vrijedi* $\sin t_3 = \sin t_4 = -\frac{1}{3}$.




*Za točke* $E(t_1)$ *i* $E(t_2)$ *vrijedi* $\cos t_1 = \cos t_2 = \frac{2}{3}$. *Za točke* $E(t_3)$ *i* $E(t_4)$ *vrijedi* $\cos t_3 = \cos t_4 = -\frac{1}{4}$.

## Funkcija tangens

Funkcija **tangens**, u oznaci tg, definira se pomoću funkcija sinus i kosinus ovako:




*C i D su točke trigonometrijske kružnice s apscisom 0.*

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cos t \neq 0.$$

Za koje brojeve $t$ vrijedi $\cos t \neq 0$?

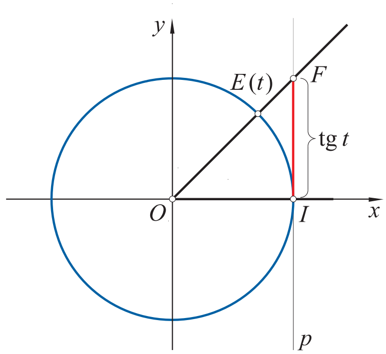
Jedine točke na brojevnoj kružnici s apscisom 0 su točke $C(0,1)$ i $D(0,-1)$. Brojevi koji se namatanjem preslikavaju u točku $C$ su brojevi $\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}, \dfrac{9\pi}{2}, \ldots, \dfrac{-3\pi}{2}, \dfrac{-7\pi}{2}, \ldots$, tj. $C = E\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. Za točku $D$ vrijedi $D = E\left(\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Dakle, tangens je definiran za sve realne brojeve $t$ različite od $\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

**Funkcija tangens**

$$\operatorname{tg} : \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\} \to \mathbf{R}$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$$




*Geometrijska interpretacija broja* $\operatorname{tg} t$.

Na slici se tangens broja očitava ovako. Točkom $E(t)$ povučemo polupravac s početkom u ishodištu. Taj polupravac siječe pravac $p$ u točki $F$. Tangens broja $t$ je ordinata točke $F$. Pravac $p$ nazivamo **tangensna os**.

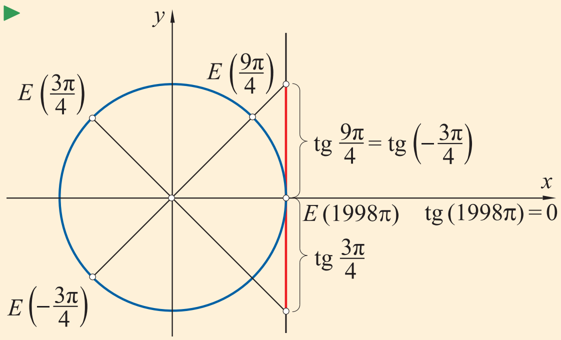
**Primjer 3.**

Nacrtajmo $E(t)$ na trigonometrijskoj kružnici i $\operatorname{tg} t$ na tangensnoj osi ako je $t$:

**a)** $\frac{9\pi}{4}$; **b)** $\frac{3\pi}{4}$;

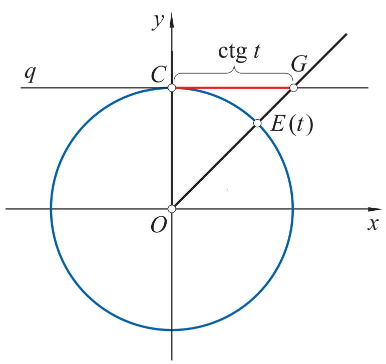
**c)** $1\,998\pi$; **d)** $-\frac{3\pi}{4}$.

▶




## Funkcija kotangens

Funkcija **kotangens**, u oznaci ctg, definira se ovako
$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}, \quad \sin t \neq 0.$$
Brojevi za koje je $\sin t = 0$ su oblika $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, pa je dakle kotangens definiran za $t \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.




*Geometrijska interpretacija kotangensa broja* $t$.

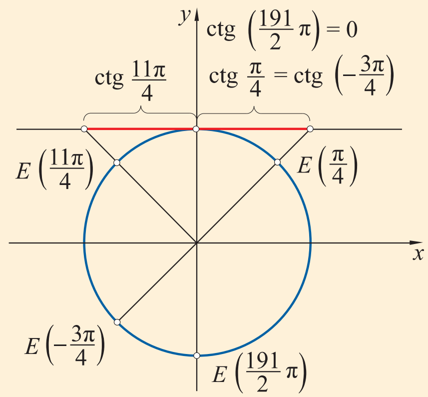
Na slici se kotangens očitava ovako. U točki $C(0,1)$ povučemo pravac $q$ paralelan s $x$-osi. Polupravac $OE(t)$ siječe pravac $q$ u točki $G$. Kotangens broja $t$ je apscisa točke $G$. Pravac $q$ nazivamo **kotangensna os**.

**Primjer 4.**

Nacrtajmo $E(t)$ na trigonometrijskoj kružnici i $\operatorname{ctg} t$ na kotangensnoj osi ako je $t$:

**a)** $\frac{\pi}{4}$; **b)** $\frac{11\pi}{4}$;

**c)** $\frac{191}{2}\pi$; **d)** $-\frac{3\pi}{4}$.




# Zadaci 1.3.

**1.** Nacrtaj $E(t)$ i istakni sinus i kosinus od $t$, ako je $t$ jednako:

**a)** $32\pi$; **b)** $-14\pi$: **c)** $-197\pi$: **d)** $\frac{321\pi}{2}$; **e)** $-\frac{141\pi}{2}$; **f)** $\frac{33\pi}{4}$.

**2.** Nađi $\sin t$, $\cos t$ ako je $t$:

**a)** $27\pi$; **b)** $-18\pi$; **c)** $384\pi$; **d)** $\frac{21}{2}\pi$; **e)** $-\frac{43}{2}\pi$; **f)** $-\frac{1\,997}{2}\pi$.

**3.** Nacrtaj na trigonometrijskoj kružnici točke $E(t)$ za koje vrijedi:

**a)** $\sin t=\frac{3}{4}$; **b)** $\sin t=\frac{1}{6}$; **c)** $\sin t=-\frac{1}{4}$; **d)** $\cos t=\frac{1}{3}$; **e)** $\cos t=-\frac{1}{2}$; **f)** $\cos t=-\frac{2}{3}$.

**4.** Nacrtaj $E(t)$ i istakni tangens i kotangens od $t$ (ukoliko postoje), ako je $t$ jednako:

**a)** $36\pi$; **b)** $-43\pi$; **c)** $\frac{19}{2}\pi$; **d)** $\frac{-123\pi}{2}$; **e)** $\frac{145\pi}{4}$; **f)** $-\frac{237\pi}{4}$.

**5.** Istakni na trigonometrijskoj kružnici točke $E(t)$ za koje vrijedi:

**a)** $\operatorname{tg} t=1$; **b)** $\operatorname{tg} t=2$; **c)** $\operatorname{tg} t=-\frac{5}{4}$; **d)** $\operatorname{ctg} t=1.5$; **e)** $\operatorname{ctg} t=-1.8$; **f)** $\operatorname{ctg} t=2$.

**6.** Izračunaj:

**a)** $\cos\pi-\cos 4\pi+\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos(-\pi)$;

**b)** $\sin\frac{3\pi}{2}-\cos\pi+\sin\pi$;

**c)** $\sin 1996\pi-\cos 1997\pi+\operatorname{tg} 1998\pi$;

**d)** $\dfrac{\operatorname{tg} 14\pi+\sin\left(-\frac{17}{2}\pi\right)}{\sin 27\pi-\cos 27\pi}$;

**e)** $\dfrac{\sin\frac{19\pi}{2}+\cos^2\left(-\frac{5\pi}{2}\right)}{\sin^2\left(-\frac{19\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)}$;

**f)** $\dfrac{\cos^2 7\pi-2\sin^2 7\pi}{\cos^2\frac{17\pi}{2}+2\sin^2\frac{17\pi}{2}}$.

# 1.4. Određivanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija


U 2. razredu odredili smo vrijednosti trigonometrijskih funkcija nekih posebnih šiljastih kutova. To su kutovi od $30°$, $45°$, $60°$. Pri računanju s njima i njihovim višekratnicima uobičajeno je da se vrijednosti trigonometrijskih funkcija zapisuju u obliku razlomka, a ne decimalnog broja. Navedimo ovdje tablicu za te brojeve.

| $t(°)$ | $t\,(\text{rad})$ | $\sin t$ | $\cos t$ | $\operatorname{tg} t$ | $\operatorname{ctg} t$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $30°$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ |
| $45°$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $1$ | $1$ |
| $60°$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

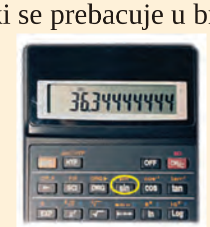
Za računanje s ostalim realnim brojevima koristimo računalo. Prvo, računalo treba biti u odgovarajućem stanju (modu): DEG ako unosimo mjeru u stupnjevima ili RAD ako unosimo mjeru u radijanima. Zatim se unese broj, te pritisne tipka odgovarajuće trigonometrijske funkcije. Na zaslonu se pojavljuje vrijednost trigonometrijske funkcije upisanog broja.

Napomenimo da na računalu ne postoji tipka za funkciju kotangens. U slučaju kad želimo izračunati kotangens broja $x$, prvo izračunamo njegov tangens, a zatim recipročnu vrijednost upotrebom tipke $1/x$ ili $x^{-1}$.

**Primjer 1.**

Izračunajmo broj $\sin 36°20'40''$.

▶ Postavimo računalo u stanje DEG i upišimo 36.2040. Pritiskom na tipku $\circ\,'\,'' \rightarrow$ broj izražen u stupnjevima, minutama i sekundama automatski se prebacuje u broj izražen samo u stupnjevima.




Ako računalo nema tipku $\circ\,'\,'' \rightarrow$, tada se broj $36°20'40''$ pretvara u broj u stupnjevima ovako:

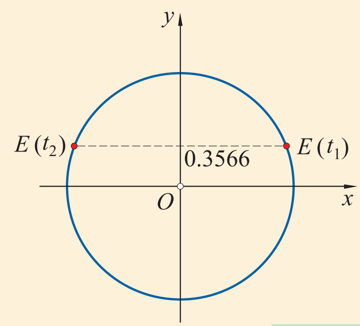
$$36°20'40'' = \left(36 + \frac{20}{60} + \frac{40}{3\,600}\right)^{\circ} = 36.34444444°.$$

Nakon što se na zaslonu pojavio broj 36.34444444 pritiskom na tipku sin dobivamo sinus zadanog broja koji iznosi 0.59263816. Ovdje je opisan rad s jednim modelom računala.

### Primjer 2.

Odredimo sve realne brojeve $t$ za koje vrijedi $\sin t = 0.3566$. Rezultat iskažimo i u stupnjevima.

▶ Računalo postavimo u stanje RAD, upišimo broj 0.3566 i pritisnemo tipke SHIFT sin. Time smo aktivirali funkciju $\sin^{-1}$ koja zadanom sinusu kuta određuje kut u intervalu od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$. Na zaslonu se pojavio broj 0.364626099. Dakle, $t_1 = 0.3646$ rad (u ovoj knjizi zaokruživat ćemo četvrtu decimalu). U stupnjeve prelazimo upotrebom tipki SHIFT DRG dok ne dođemo u stanje DEG. Na zaslonu se pojavljuje broj 20.89153659. To je broj $t_1$ izražen u stupnjevima. Ukoliko želimo rezultat izraziti u stupnjevima, minutama i sekundama upotrijebimo SHIFT $\circ\,'\,'' \rightarrow$ i dobivamo $t_1 = 20°53'30''$.

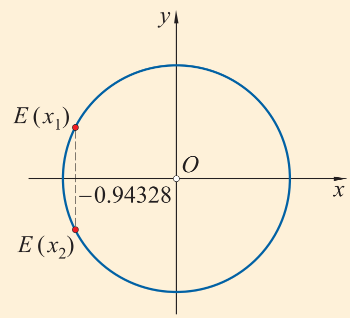



Proučimo sliku. Brojevi $t_1$ i $t_2 = \pi - t_1 = 2.777$ rad $= 159°6'30''$ imaju isti sinus. I konačno, budući da se brojevi $t$ i $t+2k\pi$ preslikavaju u istu točku kružnice, dobivamo da su traženi brojevi $0.3646 + 2k\pi$ i $2.777 + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, odnosno zapisani u stupnjevima: $20°53'30'' + 360°k$ i $159°6'30'' + 360°k$, $k \in \mathbf{Z}$.

### Primjer 3.

Odredimo sve realne brojeve $x$ za koje vrijedi $\cos x = -0.94328$.

▶ Pomoću računala dobivamo rezultat iz intervala $[0, \pi]$: $x_1 = 2.8032$ rad $= 160°36'36''$. Brojevi $x$ i $-x$ imaju isti kosinus, pa i broj $x_2 = -x_1$ ima kosinus $-0.94328$. I konačno, budući da se brojevi $x$ i $x + 2k\pi$ preslikavaju u istu točku kružnice, traženi brojevi su: $\pm 2.8032 + 2k\pi$, odnosno, u stupnjevima $\pm 160°36'36'' + 360°k$, $k \in \mathbf{Z}$.




### Primjer 4.

Odredimo sve realne brojeve $x$ za koje vrijedi: **a)** $\operatorname{tg} x = 2$; **b)** $\operatorname{ctg} x = -1.8$.

▶ **a)** Pomoću računala dobivamo rezultat iz intervala $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$: $x = 1.1071$ rad $= 63°26'6''$. Ali i svi brojevi oblika $1.1071 + k\pi = 63°26'6'' + 180° \cdot k$ imaju tangens 2.

**b)** Prvo izračunajmo tangens: $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} x} = -0.5556$, pa ponovimo postupak iz prvog dijela primjera. Svi brojevi kojima je kotangens jednak $-1.8$ su $-0.5071 + k\pi$ ili, u stupnjevima $-29°3'17'' + 180°k$, $k \in \mathbf{Z}$.

# Zadaci 1.4.

**1.** Popuni tablicu:

| $x$ | $36°20'$ | $48°10'$ | $322°20'$ | $485°40'$ | $-821°50'$ | $1998°10'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | | | | | | |
| $\cos x$ | | | | | | |
| $\operatorname{tg} x$ | | | | | | |
| $\operatorname{ctg} x$ | | | | | | |

Rezultate zaokruži na četvrtu decimalu.

**2.** Izračunaj:

**a)** $\sin 36°20' + \cos 39°10'$;
**b)** $\operatorname{tg} 32°50' - \operatorname{ctg} 30°20'$;
**c)** $\sin^2 25°50' - \cos^2 52°10'$;
**d)** $\dfrac{\sin^2 63°30' - \cos 30°20'}{\operatorname{tg}^2 80° \cdot \operatorname{ctg}^2 50°20'}$.

**3.** Izračunaj:

**a)** $\cos 42°13' - \sin 32°18'$;
**b)** $\cos^2 30°15' + \sin^2 60°45'$;
**c)** $\operatorname{tg} 21°1' - \operatorname{ctg} 89°39'$;
**d)** $\sqrt{\cos 72°44' \cdot \sin 81°22'}$.

**4.** Popuni tablicu

| $t$ | $25°35'$ | $80°14'$ | $10°11'$ | $37°49'$ | $28°40'10''$ | $30°15'24''$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin t$ | | | | | | |
| $\cos t$ | | | | | | |
| $\operatorname{tg} t$ | | | | | | |
| $\operatorname{ctg} t$ | | | | | | |

**5.** Odredi $t \in [0, 360°\rangle$ ako je zadano:

**a)** $\sin t = 0.3284$;
**b)** $\sin t = -0.3423$;
**c)** $\sin t = 0.7071$;
**d)** $\cos t = 0.7821$;
**e)** $\cos t = -0.4567$;
**f)** $\cos t = 0.31313$.

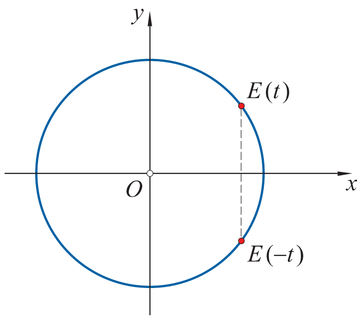
**6.** Odredi $t \in [0, 180°\rangle$ ako je zadano:

**a)** $\operatorname{tg} t = 2$;
**b)** $\operatorname{tg} t = -4.375$;
**c)** $\operatorname{tg} t = 0.7178$;
**d)** $\operatorname{ctg} t = 1.18$;
**e)** $\operatorname{ctg} t = -2.3$;
**f)** $\operatorname{ctg} t = 0.9763$.

**7.** Odredi sve realne brojeve $t$ za koje vrijedi:

**a)** $\sin t = 0.1234$;
**b)** $\sin t = -0.432$;
**c)** $\cos t = 0.717$;
**d)** $\cos t = -0.932$;
**e)** $\operatorname{tg} t = 3$;
**f)** $\operatorname{ctg} t = 0.5$.

# 1.5. Parnost i neparnost trigonometrijskih funkcija




Promotrimo sada točke na brojevnoj kružnici kojima su pridruženi brojevi $t$ i $-t$.

Točke $E(t)$ i $E(-t)$ simetrične su obzirom na $x$-os, te stoga imaju jednake apscise i suprotne ordinate. Dakle, vrijede sljedeće tvrdnje.

Za svaki realni broj $t$ vrijedi $\cos(-t) = \cos t$, tj. kosinus je parna funkcija.
Za svaki realni broj $t$ vrijedi $\sin(-t) = -\sin t$, tj. sinus je neparna funkcija.

Općenito, za funkciju $f : D_f \to \mathbf{R}$ reći ćemo da je **parna** funkcija ako za svaki $x \in D_f$ vrijedi $f(-x) = f(x)$.

Za funkciju $f : D_f \to \mathbf{R}$ reći ćemo da je **neparna** funkcija ako za svaki $x \in D_f$ vrijedi $f(-x) = -f(x)$.

**Primjer 1.**

Ispitajmo parnost funkcija

**a)** $f_1(x) = \sin 2x$; **b)** $f_2(x) = \sin^4 8x - \cos x$.

**a)** $f_1(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f_1(x)$, te je $f_1$ neparna.

**b)** $f_2(-x) = \sin^4(-8x) - \cos(-x) = (-\sin 8x)^4 - \cos x = \sin^4 8x - \cos x = f_2(x)$, pa je $f_2$ parna funkcija.

Koristeći definiciju tangensa, parnost kosinusa i neparnost sinusa imamo

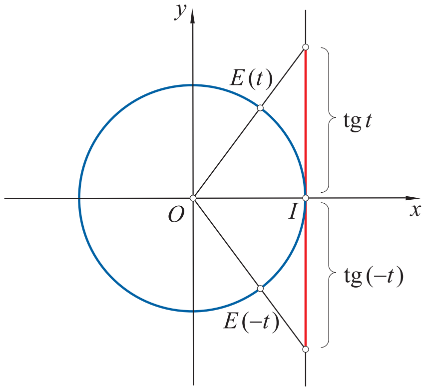
$$\operatorname{tg}(-t) = \frac{\sin(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t.$$

Dakle, tangens je neparna funkcija.

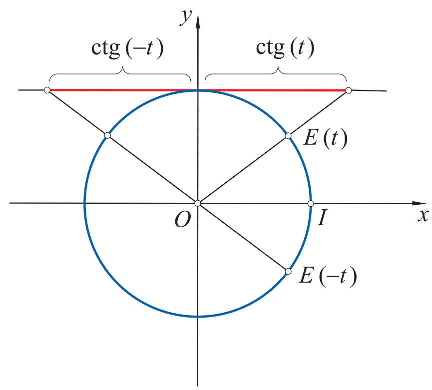
Na isti način dobivamo da je kotangens također neparna funkcija.

Funkcije tangens i kotangens su neparne funkcije, tj. vrijedi

$$\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t, \qquad \operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t.$$




*Tangensi brojeva t i −t su suprotni brojevi.*




*Kotangensi brojeva t i −t su suprotni brojevi.*

# Zadaci 1.5.

**1.** Primjenjujući parnost i neparnost trigonometrijskih funkcija izračunaj:

**a)** $\cos(-35^\circ)$ ako je $\cos 35^\circ = 0.8192$; **b)** $\sin(-453^\circ)$ ako je $\sin 453^\circ = 0.9986$;
**c)** $\operatorname{tg}(-1\,855^\circ)$ ako je $\operatorname{tg} 1\,855^\circ = 1.4281$; **d)** $\operatorname{ctg}(-872.5^\circ)$ ako je $\operatorname{ctg} 872.5^\circ = -1.921$;
**e)** $\cos\left(-\frac{18\pi}{7}\right)$ ako je $\cos\frac{18\pi}{7} = -0.2225$.

**2.** Pojednostavni izraze:

**a)** $\sin x\cos(-y) + \sin(-x)\cos(-y)$; **b)** $\sin t\cos u - \sin t\cos(-u)$;
**c)** $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}(-\beta) - \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}(-\beta)$; **d)** $\operatorname{tg} x\sin y - \operatorname{ctg}(-x)\sin(-y)$.

**3.** Provjeri jesu li sljedeće funkcije parne:

**a)** $f(x) = x^6 + 8x^4 - 2$; **b)** $f(x) = 11x^4 - 23$; **c)** $f(x) = \cos 5x$;
**d)** $f(x) = 3\cos x$; **e)** $f(x) = 7\cos 11x$; **f)** $f(x) = \sin^2 x$.

**4.** Dokaži da su sljedeće funkcije parne:

**a)** $f(x) = |x| + 2x^2$; **b)** $f(x) = 2\cos x + 13\cos^3 x$; **c)** $f(x) = \sin^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$;
**d)** $f(x) = \sin^4 2x$; **e)** $f(x) = \frac{\cos 2x}{x^4}$; **f)** $f(x) = \frac{\cos x - \operatorname{ctg}^2 x}{1 + \cos x}$.

**5.** Provjeri jesu li sljedeće funkcije neparne:

**a)** $f(x) = x^7 - 3x^5 + 4x$; **b)** $f(x) = 8x^{11} + 12x^3$; **c)** $f(x) = \sin 7x$;
**d)** $f(x) = 4\sin 2x$; **e)** $f(x) = \sin^3 x$; **f)** $f(x) = \sin x\cos x$.

**6.** Dokaži da su sljedeće funkcije neparne:

**a)** $f(x) = \sqrt[3]{x} - x$; **b)** $f(x) = \operatorname{tg} x + \sin x$; **c)** $f(x) = 3\operatorname{tg} x - 4\operatorname{ctg} x$;
**d)** $f(x) = 2\operatorname{tg} x - \sin x\cos x$; **e)** $f(x) = \frac{1 - \cos^4 x}{\sin x}$; **f)** $f(x) = \frac{x + \operatorname{tg} x}{\sin x}$.