I. dio

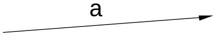
Uvod

1. Orijentirane dužine, djelišni omjer i dvoomjer

Orijentirani pravci i dužine

Pri razmatranju dužina i kutova često je svrhovito uzeti u obzir i njihovu orijentaciju, čime ćemo se i u ovoj knjizi koristiti. Kada budu korištene orijentacije dužina i kutova, to će biti uvijek posebno naglašeno.

Definicija 1.1. Za neki pravac a reći ćemo da je ***orijentiran*** ako od moguća dva smjera gibanja po tom pravcu izaberemo jedan kao pozitivan, što označavamo strelicom (sl. 1.1).



Sl. 1.1. Orijentirani pravac

Dio pravca omeđen dvjema točkama A i B nazivamo dužinom i označavamo s $\overline{AB}$. Mjerenjem dužina pridružujemo svakoj dužini pozitivni realni broj kao njezinu duljinu,

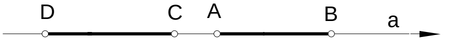
$$|AB| = d(A, B).$$

Pri tome nam je svejedno koja je početna a koja krajnja točka te dužine.

Definicija 1.2. Dužinu kojoj razlikujemo "početnu" i "krajnju" točku, nazivamo ***orijentiranom dužinom.*** Dužinu za koju je početna točka A, a krajnja točka B označavamo sa $\overline{AB}$. (Na prvom je mjestu početna točka.)

Prema ovome, sada moramo razlikovati orijentiranu dužinu $\overline{AB}$ od takve dužine $\overline{BA}$.

Ako orijentirana dužina $\overline{AB}$ leži na orijentiranom pravcu a tako da se smjer od početne točke A prema njenoj krajnjoj točki B podudara s odabranim pozitivnim smjerom pravca a, tada za tu dužinu $\overline{AB}$ kažemo da je pozitivna (sl. 1.2). Dužina $\overline{CD}$ na istom pravcu a (prikazana na istoj slici 1.2) je tada negativna.



Sl. 1.2. Orijentirane dužine

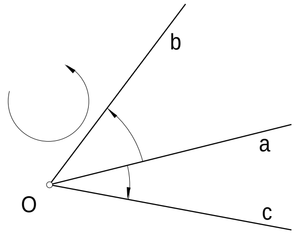
Za orijentirane dužine na orijentiranom pravcu uvodimo ***relativne mjerne brojeve.*** Mjernom broju neke pozitivne dužine dodamo pozitivan predznak, a mjernom broju negativne dužine dodamo negativan predznak. Prema tome je relativni mjerni broj za pozitivne dužine pozitivan a za negativne negativan.

Ako je d relativni mjerni broj dužine $\overline{AB}$, tada je očito $-d$ relativni mjerni broj dužine $\overline{BA}$.

Relativni mjerni broj dužine $\overline{AB}$ označavat ćemo s $[AB]$.

Orijentirani kut

Kut definiramo kao skup od dvije zrake sa zajedničkom početnom točkom. Pri tome je svakom kutu pridružen njegov "mjerni broj kuta". Da definiramo orijentirani kut, izaberimo jedan od dva moguća smjera okretanja u ravnini kao pozitivan (sl. 1.3):



Sl. 1.3. Orijentacija kuta. Kut $\sphericalangle(ab)$ je pozitivan, a $\sphericalangle(ac)$ negativan

Definicija 1.3. Kut što ga čine zrake a i b s oznakom $\sphericalangle(ab)$ jest ***pozitivan*** ako se označeni smjer okretanja "početne" zrake a prema "krajnjoj" zraci b podudara s danim pozitivnim smjerom okretanja u ravnini. U protivnom slučaju je kut ***negativan***.

Tako je na slici 1.3 kut $\sphericalangle(ab)$ pozitivan, a kut $\sphericalangle(ac)$ negativan.

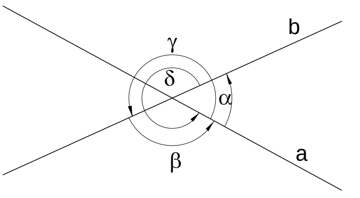
Ako je kut $\sphericalangle(ab)$ pozitivan, onda je kut $\sphericalangle(ba)$ negativan.

I za kutove možemo također uvesti relativni mjerni broj. Pozitivni kut imat će pozitivan mjerni broj, a negativni kut negativan.

Ako je α relativni mjerni broj kuta $\sphericalangle(ab)$, tada je $-\alpha$ relativni mjerni broj kuta $\sphericalangle(ba)$.

Dva pravca koja se sijeku određuju četiri para zraka i četiri moguća orijentirana kuta. Pri tome vrijedi $\beta = \pi - \alpha$, $\gamma = \pi + \alpha$, $\delta = 2\pi - \alpha$.

Definicija 1.4. Kao ***orijentirani kut*** $\sphericalangle(ab)$ ***dvaju pravaca*** a i b uzimamo najmanji po apsolutnoj vrijednosti od kutova što ih čine ta dva pravca.



Sl. 1.4. Kut između dvaju pravaca

Dva međusobno okomita pravca $a \perp b$ zatvaraju pravi kut. U tom je slučaju $\sphericalangle(ab) = +\frac{\pi}{2}$.

Dva su orijentirana kuta jednaka ako se podudaraju u relativnim mjernim brojevima.

Djelišni omjer

Neka su na nekom po volji orijentiranom pravcu p dane tri različite točke A, B i C (sl. 1.5). Uočimo dvije orijentirane dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ definirane tim točkama.

Definicija 1.5. Realni broj μ definiran kao omjer relativnih mjernih brojeva orijentiranih dužina

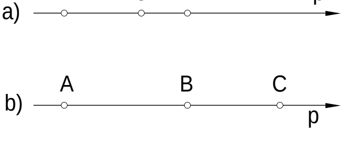
$$\mu = \frac{[AC]}{[BC]}$$

nazivamo ***djelišnim omjerom*** trojke kolinearnih točaka. Djelišni omjer ćemo označavati na način

$$(AB : C) = \frac{[AC]}{[BC]}.$$

Za djelišni omjer $(AB : C)$ kažemo još da je to omjer u kojem točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$.

Ako točka C leži između točaka A i B (sl. 1.5a), tada su relativni mjerni brojevi



Sl. 1.5. Djelišni omjer

dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ suprotnog predznaka (bez obzira na orijentaciju pravca), pa vrijedi

$$(AB : C) < 0.$$

Kada točka C leži izvan dužine $\overline{AB}$ (bez obzira s koje strane) (sl. 1.5b), tada relativni mjerni brojevi dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ imaju — bez obzira na izabranu orijentaciju pravca p — isti predznak (pozitivan ili negativan), pa vrijedi

$$(AB : C) > 0.$$

Približava li se C k točki A, tada relativni mjerni broj dužine $\overline{AC}$ teži k ništici, pa za taj granični slučaj ($A = C$) vrijedi

$$(AB : C) = \frac{[AC]}{[BC]} = 0.$$

Približava li se točka C k točki B, to relativni mjerni broj dužine $\overline{BC}$ teži k ništici, pa slijedi

$$(AB : C) = \frac{[AC]}{[BC]} \to \infty,$$

dakle, djelišni omjer teži sada k neizmjernosti.

Ako je točka C polovište dužine $\overline{AB}$, tada C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u dvije dužine koje imaju isti mjerni broj po apsolutnoj vrijednosti, ali suprotnog predznaka, pa u tom slučaju vrijedi

$$(AB : C) = -1.$$

Ako točka C teži k nepravoj točki pravca p (prema neizmjerno dalekoj točki), tada možemo pisati

$$\frac{[AC]}{[BC]} = \frac{[AB] + [BC]}{[BC]} = \frac{[AB]}{[BC]} + 1.$$

Kada C teži prema neizmjernosti, tada $[BC] \to \infty$ a $\dfrac{[AB]}{[BC]} \to 0$ pa slijedi za taj slučaj

$$(AB : C) \to 1.$$

Zaključujemo: *Uz dane dvije čvrste točke A, B pravca p, svakom položaju točke C na pravcu p odgovara očito točno jedan realan broj kao djelišni omjer.*

No dade se pokazati i obrnuto:

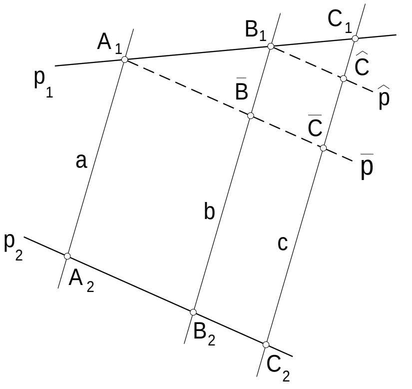
Svakom realnom broju μ ogovara uz dane čvrste točke A, B pravca p točno jedan položaj točke C, tako da je $(AB : C) = \mu$.

⋆⋆⋆

Dokažimo još jedno svojstvo djelišnog omjera

Teorem 1.1. *Neka su a, b, c tri paralelna pravca ravnine. Neka dalje neki pravci p_1 i p_2 sijeku tri spomenuta paralelna pravca u točkama A_1, B_1, C_1 odnosno A_2, B_2, C_2 (sl. 1.6). Tada vrijedi*

$$(A_1B_1 : C_1) = (A_2B_2 : C_2).$$



Sl. 1.6. Jednakost djelišnih omjera

Da to dokažemo, povucimo pravac $\bar{p} \parallel p_2$ točkom A_1 i $\hat{p} \parallel p_2$ točkom B_1 (sl. 1.6). Kako su trokuti $A_1C_1\bar{C}$ i $B_1C_1\hat{C}$ slični, to na temelju poznatih teorema o sličnosti trokuta slijedi odmah tvrdnja teorema.

Dvoomjer

Slično kao za tri kolinearne točke, možemo i četvorki kolinearnih točaka pridružiti realan broj na sljedeći način.

Definicija 1.6. Danoj četvorki različitih kolinearnih točaka A, B, C, D pridružujemo realni broj

$$\lambda = \frac{[AC]}{[BC]} : \frac{[AD]}{[BD]}.$$

Taj broj λ nazivamo ***dvoomjerom četvorke kolinearnih točaka*** i označavamo ga sa

$$(AB : CD) = \lambda.$$

Dužine $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ su ovdje orijentirane dužine na po volji orijentiranom pravcu. Kako vidimo iz definicije, dvoomjer je upravo omjer djelišnih omjera $(AB : C)$ i $(AB : D)$.

⋆⋆⋆

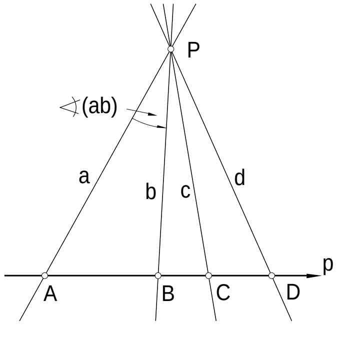
Kako smo ovdje definirali dvoomjer četvorke kolinearnih točaka, tako na sličan način možemo uvesti pojam dvoomjera četvorke konkurentnih pravaca. Promotrimo stoga četiri pravca a, b, c, d koji se sijeku u točki P.

Definicija 1.7. Danoj četvorki različitih konkurentnih pravaca a, b, c, d pridružujemo jedan realan broj

$$(ab : cd) = \frac{\sin \sphericalangle(ac)}{\sin \sphericalangle(bc)} : \frac{\sin \sphericalangle(ad)}{\sin \sphericalangle(bd)} = \nu.$$

Broj ν nazivamo ***dvoomjerom četvorke konkurentnih pravaca***.

Ovdje se podrazumijeva da su u gornjem izrazu kutovi orijentirani.



Sl. 1.7. Jednakost dvoomjera četvorke točaka i četvorke pravaca

Teorem 1.2. *Neka su dana četiri pravca a, b, c, d koji se sijeku u točki P i pravac p koji ne prolazi točkom P. Taj pravac siječe spomenuta četiri konkurentna pravca u točkama A, B, C, D. Dvoomjer te četvorke konkurentnih pravaca jednak je dvoomjeru spomenute četvorke kolinearnih točaka, tj. $(ab : cd) = (AB : CD)$.*

Dokaz. Uočimo li na slici 1.7 trokute PAC, PBC, PAD, PBD, to na temelju poznatog sinusovog poučka o trokutima vrijede ove jednakosti:

$$\frac{[PA]}{\sin \sphericalangle(cp)} = \frac{[AC]}{\sin \sphericalangle(ac)},$$
$$\frac{[PB]}{\sin \sphericalangle(cp)} = \frac{[BC]}{\sin \sphericalangle(bc)},$$
$$\frac{[PA]}{\sin \sphericalangle(dp)} = \frac{[AD]}{\sin \sphericalangle(ad)},$$
$$\frac{[PB]}{\sin \sphericalangle(dp)} = \frac{[BD]}{\sin \sphericalangle(bd)}.$$

Podijelimo li lijeve i desne strane prvih dviju jednakosti, dobijemo

$$\frac{[PA]}{[PB]} = \frac{[AC]}{[BC]} \cdot \frac{\sin \sphericalangle(bc)}{\sin \sphericalangle(ac)}. \qquad (1)$$

Na isti način dobijemo iz ostale dvije jednakosti

$$\frac{[PA]}{[PB]} = \frac{[AD]}{[BD]} \cdot \frac{\sin \sphericalangle(bd)}{\sin \sphericalangle(ad)}. \qquad (2)$$

Izjednačavanjem desnih strana od (1) i (2) dobijemo

$$\frac{[AC]}{[BC]} : \frac{[AD]}{[BD]} = \frac{\sin \sphericalangle(ac)}{\sin \sphericalangle(bc)} : \frac{\sin \sphericalangle(ad)}{\sin \sphericalangle(bd)}$$

ili

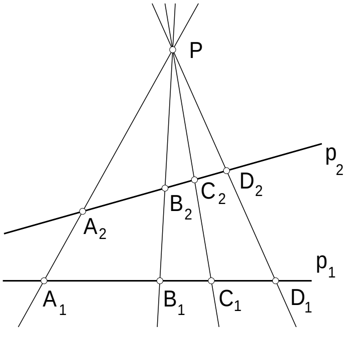
$$(AB : CD) = (ab : cd)$$

što je i trebalo dokazati.

Sljedeći se teorem može smatrati izravnom posljedicom netom dokazanog teorema:

Teorem 1.3. *Neka su* A_1, B_1, C_1, D_1 *sjecišta četiriju konkurentnih pravaca* a, b, c, d *i nekog pravca* p_1 *te* A_2, B_2, C_2, D_2 *sjecišta te četvorke pravaca s nekim drugim pravcem* p_2 *(sl. 1.8). Tada vrijedi*

$$(ab{:}cd) = (A_1B_1{:}C_1D_1) = (A_2B_2{:}C_2D_2).$$



Sl. 1.8. Jednakost dvoomjera četvorki točaka

II. dio

Kružnice

2. Osnovni pojmovi

Kružnica

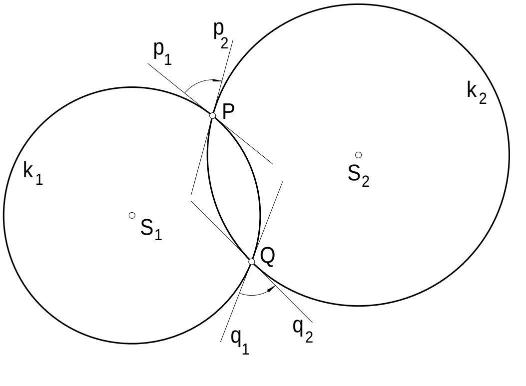
Kružnicu k definiramo kao geometrijsko mjesto točaka elementarne ravnine koje su jednako udaljene od neke čvrste točke S. Tu točku nazivamo ***središtem*** (centrom), a dužinu r koja spaja točku S s bilo kojom točkom P kružnice nazivamo njenim ***polumjerom*** (***radiusom***). Svi su polumjeri neke kružnice dužine iste duljine. Kružnicu k koja je zadana sa svojim središtem S i polumjerom r označavat ćemo sa $k(S, r)$.

Dužinu $\overline{AB}$ koja spaja dvije bilo koje točke A i B kružnice k zvat ćemo ***tetivom*** AB, a tetivu koja prolazi središtem S nazvat ćemo ***promjerom*** (***dijametrom***) kružnice k.

Za ovako definiranu kružnicu očito pretpostavljamo da je njezin polumjer dužina konačne duljine. Međutim, možemo zamisliti slučaj kada duljina polumjera teži k ništici. Tada se kružnica k "stegne" na jednu točku, njeno središte. Za naša razmatranja je katkada vrlo korisno točku smatrati ***kružnicom ništičnog polumjera***. Ipak ako nije drukčije naglašeno, smatrat ćemo uvijek da se radi o kružnici konačnog polumjera.

Neki pravac ravnine ili siječe neku kružnicu k u dvije različite točke ili je dodiruje ili je uopće ne siječe. Pravac koji dodiruje kružnicu k ima s tom kružnicom samo jednu zajedničku točku te ga nazivamo ***tangentom*** te kružnice, a točku u kojoj je dodiruje zovemo ***diralištem***. Tangenta je okomita na polumjer koji spaja diralište te tangente sa središtem.

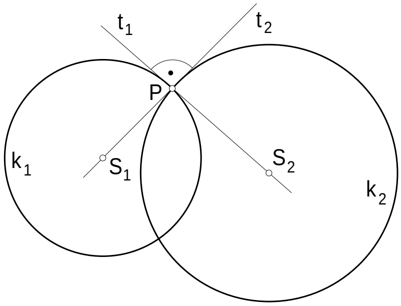
Dvije kružnice se mogu sjeći u dvjema različitim točkama, mogu se dodirivati ili se uopće ne sijeku, što smatramo intuitivno jasnim. Kut što ga čine dvije kružnice $k_1(S_1, r_1)$ i $k_2(S_2, r_2)$, koje se sijeku u dvjema točkama P i Q, definiramo kutom što ga čine tangente p_1 i p_2 odnosno q_1 i q_2 tih kružnica u jednom od sjecišta P odnosno Q (sl. 2.1).



Sl. 2.1. Kut dviju kružnica kut je između njihovih tangenata u točki presjeka

Kut dviju kružnica možemo također smatrati orijentiranim kutom. Kutovi $\measuredangle(p_1, p_2)$ i $\measuredangle(q_1, q_2)$ dviju kružnica k_1 i k_2 u sjecištima P i Q su očito jednaki po iznosu a suprotni po predznaku.

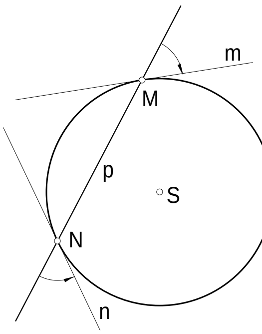
Sijeku li se dvije kružnice $k_1(S_1, r_1)$ i $k_2(S_2, r_2)$ ortogonalno, tada tangenta u svakom od sjecišta jedne kružnice prolazi središtem druge (sl. 2.2).



Sl. 2.2. Okomite kružnice. Tangenta jedne u točki presjeka prolazi središtem druge

Pravac i kružnica

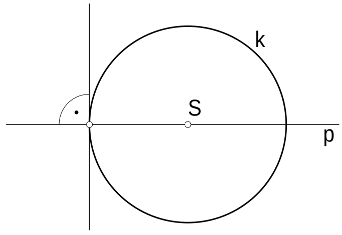
Kut pravca p i kružnice $k(S,r)$ koji se sijeku u točkama M i N, definiramo kao kut tog pravca p i tangente m odnosno n kružnice k s diralištem M odnosno N (sl. 2.3).



Sl. 2.3. Kut pravca i kružnice

I ovdje su orijentirani kutovi $\sphericalangle(p,m)$ i $\sphericalangle(p,n)$ po iznosu jednaki i suprotni po predznaku. Pravac p, naime, možemo smatrati kružnicom neizmjerno velikog polumjera. On je sam sebi tangenta u svakoj svojoj točki.

Pravac p i kružnica k sijeku se ortogonalno točno onda ako taj pravac prolazi središtem kružnice (sl. 2.4).

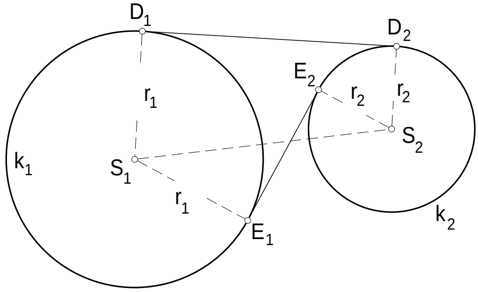


Sl. 2.4. Pravac okomit na kružnicu

Kada se dvije kružnice dodiruju, tada možemo reći da se one sijeku pod kutom čiji je iznos jednak ništici.

Neka su dalje dane dvije kružnice $k_1(S_1,r_1)$ i $k_2(S_2,r_2)$ koje se ne sijeku i leže jedna izvan druge. Pravac koji spaja središta S_1 i S_2 zovemo ***centralom*** tih dviju kružnica. Takve dvije kružnice imaju četiri zajedničke tangente od kojih se dvije sijeku u točki P na centrali i to izvan dužine $\overline{S_1S_2}$, a druge dvije se sijeku na centrali u točki Q koja leži između točaka S_1 i S_2. Tangente koje se sijeku u točki P zovemo ***vanjskim tangentama*** a one koje se sijeku u točki Q zovemo ***unutrašnjim tangentama***.*

Promotrimo jednu vanjsku tangentu takvih dviju kružnica i njena dirališta D_1 i D_2 sa kružnicom k_1 odnosno k_2 i jednu unutrašnju tangentu sa diralištima E_1 i E_2 (sl. 2.5).



Sl. 2.5. Tangente dviju kružnica

* Usporedite ovo sa izlaganjima o paru kružnica u vezi sa homotetijom, teorem 6.5, str. 50.

Definicija 2.1. Duljinu dužine $\overline{D_1D_2}$ zovemo ***vanjskom dirnom (tangencijalnom) udaljenošću***, dok dužine $\overline{E_1, E_2}$ zovemo ***unutrašnjom dirnom (tangencijalnom) udaljenošću*** kružnica k_1 i k_2.

Iz slike 2.5 je odmah vidljivo da je vanjska odnosno unutrašnja dirna udaljenost dana sa

$$|D_1D_2|^2 = |S_1S_2|^2 - (r_1 - r_2)^2$$
$$|E_1E_2|^2 = |S_1S_2|^2 - (r_1 + r_2)^2.$$

Jasno je ovdje da dvije kružnice k_1 i k_2 koje se ne sijeku i leže jedna u drugoj, nemaju zajedničkih tangenata, pa onda nemaju ni dirnih udaljenosti.

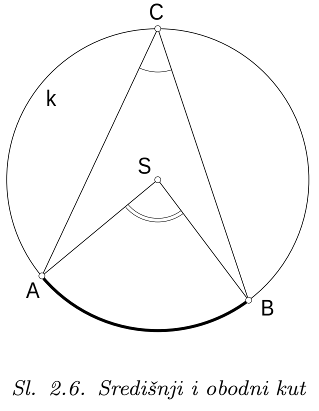
Dvije kružnice koje se sijeku imaju samo dvije i to vanjske tangente, pa time imaju samo vanjsku dirnu udaljenost.

⋆⋆⋆

U daljnjem izlaganju u ovom poglavlju definirat ćemo pojam obodnog kuta kružnice i dokazat neka njegova svojstva, čime ćemo se često koristiti u 3. poglavlju.

Obodni kut

Definicija 2.2. Neka su dane tri različite točke A, B, C na kružnici k. S te tri točke je definiran konveksni kut $\sphericalangle ACB$. Sa $\overset{\frown}{AB}$ označimo onaj luk kružnice k sa krajnjim točkama A, B koji leži unutar kuta $\sphericalangle ACB$ (sl. 2.6)



Sl. 2.6. Središnji i obodni kut

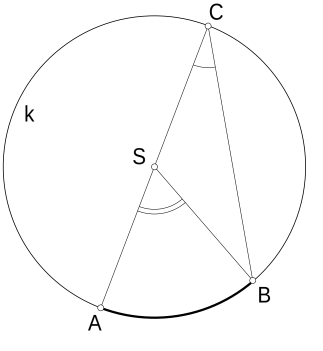
Kut $\sphericalangle ACB$ zovemo tada ***obodnim kutom nad lukom*** $\overset{\frown}{AB}$. Kut $\sphericalangle ASB$ sa vrhom u središtu S kružnice k zovemo tada ***središnjim kutom nad lukom*** $\overset{\frown}{AB}$.

Teorem 2.1. *Središnji kut $\sphericalangle ASB$ je dvostruko veći od obodnog kuta $\sphericalangle ACB$ nad istim lukom $\overset{\frown}{AB}$ kružnice k, tj.*

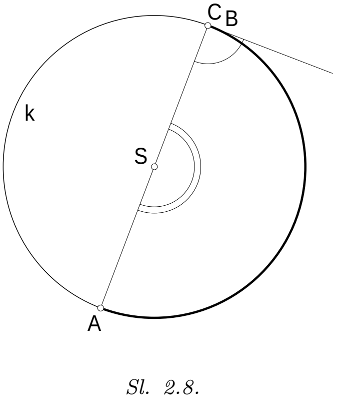
$$\sphericalangle ASB = 2 \cdot \sphericalangle ACB.$$

Dokaz. Ovdje je potrebno razmotriti nekoliko slučajeva:

1. Središte S kružnice k leži na kraku AC obodnog kuta $\sphericalangle ACB$ (sl. 2.7).



Sl. 2.7.



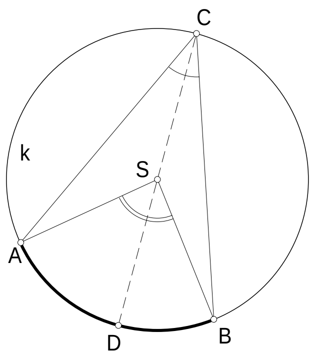
Sl. 2.8.

Kut $\sphericalangle ASB$ je ovdje vanjski kut jednakokračnog trokuta SCB, pa odatle odmah slijedi

$$\sphericalangle ASB = 2 \cdot \sphericalangle ACB.$$

Ovo vrijedi i kad se točka B neizmjerno približi točki C. Tada je BC tangenta kružnice k u točki C (sl. 2.8).

2. Središte S leži unutar obodnog kuta $\sphericalangle ACB$ (sl. 2.9).

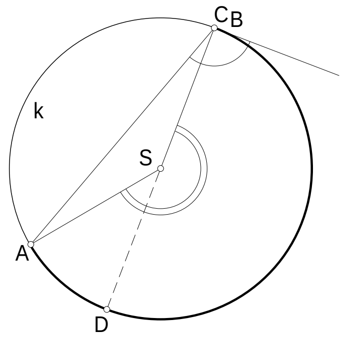


Sl. 2.9.

Odredimo na luku $\widehat{AB}$ točki C dijametralno suprotnu točku D. Primjenimo li prethodni slučaj 1. na obodne kutove $\sphericalangle ACD$ i $\sphericalangle BCD$ imamo

$$\begin{aligned}\sphericalangle ASB &= \sphericalangle ASD + \sphericalangle DSB\\ &= 2 \cdot \sphericalangle ACD + 2 \cdot \sphericalangle DCB\\ &= 2(\sphericalangle ACD + \sphericalangle DCB)\\ &= 2 \cdot \sphericalangle ACB.\end{aligned}$$

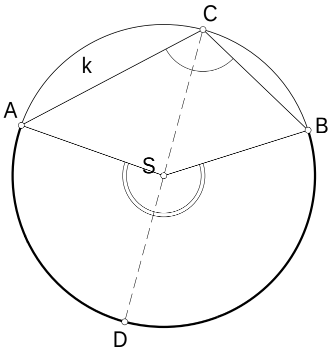
Ovo će vrijediti i ako se točka B neizmjerno približi točki C. Tada tetiva AC postaje tangenta sa diralištem u točki C (sl. 2.10).



Sl. 2.10.

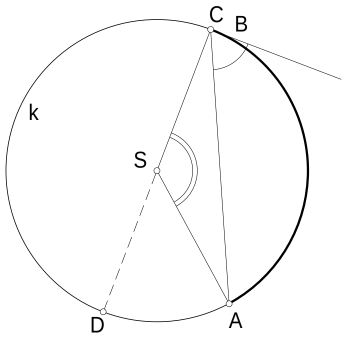
Za konkavni kut $\sphericalangle ASB$ imamo (sl. 2.11)

$$\begin{aligned}\sphericalangle ASB &= \sphericalangle ASD + \sphericalangle DSB\\ &= 2 \cdot \sphericalangle ACD + 2 \cdot \sphericalangle DCB\\ &= 2(\sphericalangle ACD + \sphericalangle DCB)\\ &= 2 \cdot \sphericalangle ACB.\end{aligned}$$



Sl. 2.11.

3. Središte S kružnice k leži izvan obodnog kuta $\sphericalangle ACB$ (sl. 2.12).



Sl. 2.12.

Odredimo točku D dijametralno suprotnu točki C, pa imamo

$$\begin{aligned}\sphericalangle ASB &= \sphericalangle DSB - \sphericalangle DSA\\ &= 2\cdot\sphericalangle DCB - 2\cdot\sphericalangle DCA\\ &= 2(\sphericalangle DCB - \sphericalangle DCA)\\ &= 2\cdot\sphericalangle ACB.\end{aligned}$$

Ako tetiva BC postane tangenta tada prema slici 2.13 imamo

$$\begin{aligned}\sphericalangle ASC &= \sphericalangle DSC - \sphericalangle DSA\\ &= 2\cdot\sphericalangle DCB - 2\cdot\sphericalangle DCA\\ &= 2(\sphericalangle DCB - \sphericalangle DCA)\\ &= 2\cdot\sphericalangle ACB.\end{aligned}$$

Na temelju ovog teorema izravno slijede:

Korolar 1. *Svi obodni kutovi nad jednim lukom su jednaki.*

Tvrdnja vrijedi i onda ako vrh obodnog kuta padne u krajnju točku luka.

Korolar 2. *Obodni kutovi nad jednakim lukovima su jednaki.*

Korolar 3. *Simetrala obodnog kuta prolazi polovištem pripadnog luka.*

Korolar 4. *Nad polukružnim lukom su obodni kutovi pravi.*

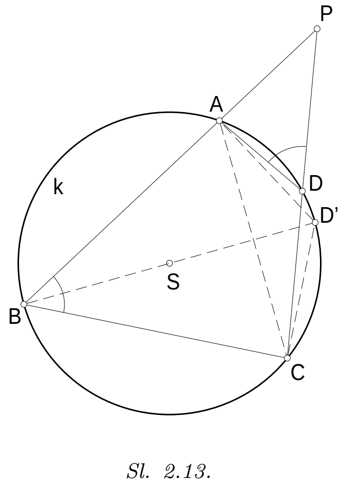
⋆ ⋆ ⋆

Umjesto nad lukom $\widehat{AC}$ mogli bismo lako definirati obodni kut nad tetivom $\overline{AC}$. No sada nad nekom tetivom $\overline{AC}$ dane kružnice k postoje dva različita obodna kuta $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle ADC$ (sl. 2.14). Vrhovi ovih dvaju kutova očito se nalaze uvijek u različitim poluravninama određenim pravcem AC.

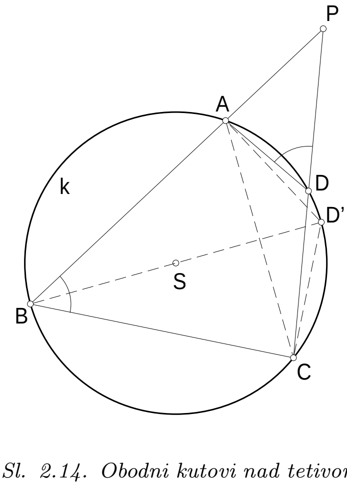
Teorem 2.2. *Obodni kutovi $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle ADC$ nad tetivom $\overline{AC}$ neke kružnice k koji se nalaze u različitim poluravninama s obzirom na pravac AC su suplementni, tj.*

$$\sphericalangle ADC = \pi - \sphericalangle ABC.$$

Dokaz. Neka su dana takva dva obodna kuta u različitim poluravninama od AC (sl. 2.14).



Sl. 2.13.



Sl. 2.14. Obodni kutovi nad tetivom

Odredimo točku D' dijametralno suprotnu točki B. Trokuti $CD'B$ i $AD'B$ su pravokutni pa na temelju svojstava obodnih kutova imamo

$$\begin{aligned}\sphericalangle ADC &= \sphericalangle AD'C = \sphericalangle AD'B + \sphericalangle BD'C \\ &= \frac{\pi}{2} - \sphericalangle ABD' + \frac{\pi}{2} - \sphericalangle CBD' \\ &= \pi - (\sphericalangle ABD' + \sphericalangle CBD') \\ &= \pi - \sphericalangle ABC.\end{aligned}$$

Ovim razmatranjima je dokazan i

Teorem 2.3. *Skup svih vrhova C kutova konstantne veličine čiji kraci prolaze točkama A odnosno B, koji se nalaze u istoj poluravnini s obzirom na pravac AB čine jedan kružni luk.*

Teorem 2.4. *Skup svih vrhova pravih kutova čiji kraci prolaze dvjema čvrstim točkama A i B, čine kružnicu kojoj je AB promjer.*

Na temelju ovih razmatranja možemo također izvesti neka svojstva tetivnog četverokuta.

Definicija 2.3. Četverokut kojemu sva četiri vrha leže na istoj kružnici zovemo ***tetivnim četverokutom.*** .

Na osnovi teorema 2.2 možemo odmah izreći:

Teorem 2.5. *Zbroj suprotnih kutova nekog tetivnog četverokuta $ABCD$ je π, tj.*

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = \pi,$$
$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = \pi$$

(sl. 2.14).

Teorem 2.6. *Produžene suprotne stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ tetivnog četverokuta $ABCD$ neka se sijeku u točki P. Trokuti PAD i PCB su slični.*

Dokaz. Trokuti PAD i PCB imaju zajednički kut u vrhu P, pa je

$$\sphericalangle APD = \sphericalangle CPB.$$

Moramo još samo pokazati da je $\sphericalangle ADP = \sphericalangle CBP$. No prema prethodnom teoremu je

$$\sphericalangle CBP = \pi - \sphericalangle CDA = \sphericalangle ADP,$$

što dokazuje teorem.