1. Elementi linearne algebre

1.1. Matrice

1.1.1. Definicija

1.1. Ispišite nul-matricu formata $(2,2)$, $(3,2)$, $(2,3)$, $(3,1)$, $(1,3)$.

1.2. Dane su sljedeće matrice

$$A=\begin{bmatrix}0 & \pi\\ 2 & -\pi\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -0.5\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}0.3 & \frac{1}{2} & \pi\\ e & -1 & 1995\\ \frac{37}{41} & \sqrt{2} & 0\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix}2-i\\ 2+i\\ \sqrt{3}+i\sqrt{2}\end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix}-1965 & 0.1 & 3 & -0.333\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & -3\\ 0 & -0.2\\ 3 & -5\end{bmatrix}.$$

a) Kojeg su formata navedene matrice?

b) Koji se element matrice F nalazi u drugom retku i prvom stupcu, a koji u trećem retku i drugom stupcu?
c) Ako elemente matrice D označimo s d_{ij}, odredite d_{13} i d_{31}.
d) Koje su od navedenih matrica kvadratne? Kojeg reda?
e) Ispišite sve vektore stupce. Kojeg su formata te matrice?
f) Ispišite sve vektore retke. Kojeg su formata te matrice?
g) Ispišite nul-matricu istog formata kao i D.
h) Ispišite nul-matricu istog formata kao i E.
i) Ispišite jediničnu matricu istog formata kao i A.
j) Ispišite jediničnu matricu istog formata kao i F.
k) Koliko stupaca treba dodati matrici D da bi ona bila kvadratna i kojeg reda? A koliko redaka?

1.3. Ispišite matricu

a) $A = \begin{bmatrix} b & I \\ a & O \end{bmatrix}$ ako je $a = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ i $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} b & I \\ a & O \end{bmatrix}$ ako je $a = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $b = [\,1\,]$.

c) $A = \begin{bmatrix} O & a \\ b & I \end{bmatrix}$ ako je $a = [\,1 \;\; 0\,]$ i $b = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Kojeg su formata matrice A, I i O?

1.4. Ispišite sve elemente matrice A tako da ona bude simetrična, ako je

a) $A = \begin{bmatrix} -3 & \cdot & \\ & 2 & 4 \\ & \cdot & 3 \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 3 & \cdot & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 3 & 0 & \pi \\ 2 & \cdot & 3 & \cdot \\ 2 & \cdot & e & 3 \end{bmatrix}$

1.5. Ispišite sve elemente matrice A tako da ona bude antisimetrična, ako je

a) $A = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 2 \\ -1 & \cdot & -2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} \cdot & e & \cdot & \cos\pi \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$

1.6. Odredite parametre $a, b \in \mathbf{R}$ takve da matrica D bude dijagonalna, ako je

a) $D = \begin{bmatrix} a^3-1 & 0 & 0 \\ 16a^2-1 & 3e^b & a+b \\ 0 & -a-b & 0 \end{bmatrix}$ **b)** $D = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 & b^2-2b \\ 0 & \log(a+1) & 0 \\ b-2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.7. Odredite parametre $a, b \in \mathbf{R}$ takve da matrica S bude skalarna, ako je

a) $S = \begin{bmatrix} a^2 & 2-a \\ a-2 & b \end{bmatrix}$ **b)** $S = \begin{bmatrix} 1 & a^2-4 & b^2-1 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.8. Odredite parametre $a, b \in \mathbf{R}$ takve da matrica A bude gornja trokutasta ako je

a) $A = \begin{bmatrix} a^2 & a^2-b^2 \\ a-b & 0 \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 3a^2 & 4b-1 & 3 \\ a^2-4 & 1 & 0 \\ b-a+1 & 2-a & 0 \end{bmatrix}$

1.9. Odredite parametre $a, b \in \mathbf{R}$ takve da matrica A bude gornja ili donja trokutasta ako je

a) $A = \begin{bmatrix} a^2+b^3 & a-2 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} a^2-3b & a-b & 0 \\ a+b & 0 & a-1 \\ b-2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.10. Usporedite matrice A i B ako su

a) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ **d)** $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

1.11. Odredite parametre $a, b \in \mathbf{R}$ takve da su matrice A i B jednake ako su

a) $A = \begin{bmatrix} a-b & 3a \\ a+b & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2a+b & 2b \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 0 \\ a-b \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a-3 \\ a^2-b^2 \end{bmatrix}$

1.1.2. Operacije s matricama

1.12. Dane su sljedeće matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte:

a) $A + D$ **b)** $A - D$ **c)** $-A + D$ **d)** $B + C$

e) $E + F$ **f)** $-2E$ **g)** $B - 2C$

1.13. Odredite parametre $a, b \in \mathbf{R}$ takve da je

a) $\begin{bmatrix} a & 4a \\ -2a & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3b & b \\ 3b & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} a & 3a \\ -a & -0.5a \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -b & 2b \\ -2b & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

1.14. Zadane su matrice $A = \begin{bmatrix} 3a+1 & b & 0 \\ a-1 & 3b & 2b \\ 0 & 3a & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} b & b & a \\ 0 & a^2 & a-b \\ a+b & -1.5 & b-a \end{bmatrix}$.
Odredite parametre $a, b \in \mathbf{R}$ takve da je $A + 2B$ **a)** gornja, **b)** donja trokutasta matrica.

1.15. Ako je moguće, izračunajte $A \cdot B$ i $B \cdot A$ za matrice

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ **d)** $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.16. Za koje vrijednosti parametara $a, b \in \mathbf{R}$ su matrice A i B komutativne s obzirom na množenje, ako su

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & a \\ -1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -8 \\ -4 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & b & -a \\ 3 & 0 & 0 \\ a & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 4a & 4 \\ 6 & -3 & 3 \\ -9 & a & 0 \end{bmatrix}$

1.17. Za koje vrijednosti parametara $a, b \in \mathbf{R}$ je matrica $A \cdot B$ antisimetrična ako su

a) $A = \begin{bmatrix} a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2-1 & 1 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -b & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ -2 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$

1.18. Za kvadratnu matricu A kažemo da je idempotentna ako je $A^2 = A$. Za koje je vrijednosti parametara $a, b \in \mathbf{R}$ matrica A idempotentna ako je

a) $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ b & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.19. Zadane su matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Izračunajte:

a) $f(A)$ ako je $f(x) = x^2 - 2x + 3$
b) $f(B)$ ako je $f(x) = (x-2)^2$
c) $f(A) + f(B)$ ako je $f(x) = (x-1)^2$
d) $f(A^\top) \cdot f(B)$ ako je $f(x) = x^2 + 1$
e) $[f(A) + f(B)]^\top$ ako je $f(x) = (x-1)(x-2)$

f) $f(A^2)$ ako je $f(x) = x^2 - 1$
g) $[f(B^\top)]^2$ ako je $f(x) = x^3 + 2$
h) $f(A, B)$ ako je $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$

1.20. Zadane su matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Izračunajte:

a) $f(BA)$ ako je $f(x) = x^2 - 2$
b) $f[(BA)^\top]$ ako je $f(x) = x + 1$
c) $f[(BA)^\top] + f(A^\top B^\top)$ ako je $f(x) = (x-1)^2$
d) $f(BA - I)$ ako je $f(x) = x^2$

1.21. Zadane su matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Izračunajte:

a) $A + A^\top - B^4$
b) $3A^3 + (B + B^\top)^3 + 3(A^\top)^3$
c) $-A + (B + B^\top)^4$
d) $3A^2 + 2(A^\top)^2 - B^2$

1.22. Zadane su matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 6 \\ -3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$. Provjerite komutativnost matrica s obzirom na množenje, te izračunajte:

a) $AB - BA$ **b)** $A^\top B^\top - B^\top A^\top$ **c)** $[(AB)^\top]^5 - [(BA)^\top]^5$

1.1.3. Primjena u ekonomiji

1.23. Poduzeće PHONECOM prodaje dva tipa telefona, super i compact, preko dva prodajna mjesta P_1 i P_2. Vrijednosti prodaje u \$, za rujan i listopad, dane su u matricama A i B, redom:

$$\text{Rujan: } \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{super} & \text{compact} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 18\,000 & 35\,000 \\ 25\,000 & 27\,000 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \text{Listopad: } \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{super} & \text{compact} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 20\,000 & 40\,000 \\ 30\,000 & 25\,000 \end{bmatrix} \end{array}$$

a) Kolika je ukupna prodaja poduzeća PHONECOM u ta dva mjeseca po pojedinom prodajnom mjestu i pojedinom tipu telefona?

b) Koliko je povećanje prodaje u listopadu u odnosu na rujan po pojedinom prodajnom mjestu i tipu telefona? Komentirajte.

c) Ako je provizija na prodaju 5%, izračunajte proviziju za svako prodajno mjesto po pojedinom tipu telefona, za mjesec rujan.

d) Ako je porez na prihod u rujnu bio 3%, a u listopadu 3.2%, izračunajte ukupni porez poduzeća po pojedinom prodajnom mjestu i tipu telefona.

1.24. Poduzeće PHONECOM proizvodi tri tipa telefona: super, compact i deluxe, na dva proizvodna mjesta P_1 i P_2. Troškovi (u \$) po jedinici rada i repromaterijala za pojedini tip telefona i proizvodno mjesto, dani su u matricama A i B, redom Prodajno mjesto P_1:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{super} & \text{compact} & \text{deluxe} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{repromaterijal} \\ \text{rad} \end{array} & \begin{bmatrix} 10 & 12 & 15 \\ 20 & 24 & 26 \end{bmatrix} \end{array}$$

Prodajno mjesto P_2:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{super} & \text{compact} & \text{deluxe} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{repromaterijal} \\ \text{rad} \end{array} & \begin{bmatrix} 11 & 12 & 16 \\ 18 & 25 & 25 \end{bmatrix} \end{array}$$

Izračunajte prosječne troškove proizvodnje po jedinici rada i repromaterijala za svaki tip telefona posebno.

1.2. Vektorski prostor

1.2.1. Vektorski prostor $\mathbf{R}^n$

1.25. Izračunajte skalarni produkt vektora $x, y \in \mathbf{R}^3$

a) $x = (2, -1, 1)$, $y = (1, 3, 1)$

b) $x = (3, 0, -0.5)$, $y = (-2, 10, -12)$

Što zaključujete?

1.26. Odredite parametre $a, b \in \mathbf{R}$ tako da vektori x i y budu okomiti, ako su

a) $x = (a, 0, b)$, $y = (-b, a, a)$

b) $x = (b - a, 1, -2)$, $y = (b + a, a^2, 0)$

c) $x = (a, b + 1, 8)$, $y = (b + 1, a - 2, b + 1)$

1.27. Zadani su vektori iz M_{31}:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte:

a) $(x + y)^\top \cdot z$ **b)** $(2x + y)^\top (2z)$ **c)** $-x^\top (2y - z)$

1.28. Odredite vektor $x \in \mathbf{R}^3$ koji je okomit na vektore

a) $a = (3, 3, 0)$, $b = (4, 3, -1)$, $c = (-5, 4, 1)$

b) $a + b$, $2a - b$ i c, gdje su $a = (1, -2, -1)$, $b = (1, 1, 1)$, $c = (4, 1, 2)$

1.29. Odredite vektor $x \in \mathbf{R}^3$ takav da je
a) $\|x\|_2 = \sqrt{5}$, $a \cdot x = -5$, $b \cdot x = -5$ gdje su $a = (1, -1, 2)$ i $b = (3, 2, 1)$,
b) $\|x\|_2 = \sqrt{29}$ i okomit je na vektore $a = (-10, 4, 2)$ i $b = (15, -6, 3)$.

1.30. Odredite parametar $t \in \mathbf{R}$ takav da je
a) $\|x\|_2 = \sqrt{6}$ ako je $x = (t, -t, 2t)$,
b) $\|x\|_2 = \|y\|_2$ ako su $x = (t+1, 2t, 1)$ i $y = (2t, t-1, -1)$,
c) $u \perp v$, ako su $u = x + y$, $v = x - y$, $x = (2, -t, 0)$ i $y = (1, 2t, -t)$.

1.31. **a)** Izračunajte $x \cdot y$ ako su $x = 2a - b$, $y = 3b - a$, a i b jedinični, međusobno okomiti vektori.
b) Izračunajte $y \cdot x$ ako su $x = a - 2b$, $y = 3(a - b)$, te $\|a\|_2 = 1$, $\|b\|_2 = 2$ i $a \perp b$.
c) Izračunajte $y \cdot (x - y)$ ako su $x = 5a - 3b$, $y = a + b$, te $\|a\|_2 = \|b\|_2$.
d) Izračunajte $\|x\|_2$ ako je $x = 4a - 3b$, te a i b ortonormirani vektori.
e) Izračunajte $x \cdot y$ ako su x i y jedinični vektori, a vektori $a = x - y$ i $b = x - 2y$ međusobno okomiti.

1.32. Izračunajte $d_2(x, y)$ ako su
a) $x = (1, 2, -1)$, $y = (-1, 2, 1)$
b) $x = 2a - 3b$, $y = a + 2b$, te a i b međusobno ortonormirani vektori.

1.33. Odredite parametar $t \in \mathbf{R}$ takav da je
a) $d_2(x, y) = \sqrt{21}$ ako su $x = (t, -t, -t)$, $y = (2t, 3, t)$
b) $d_2(x, y) + 3d_2(y, x) = 16$ ako su $x = (t, -3, \sqrt{2})$, $y = (1, t, t\sqrt{2})$
c) $d_\infty(x, y) = 6$ ako su $x = (t, 2, 1)$, $y = (1, 2t, t)$
d) $\|x\|_\infty + d_\infty(x, y) = 4$ ako su $x = (t, 1, -1)$, $y = (t, 2, -2)$
e) $\|y\|_1 + d_1(x, y) = 7$ ako su $x = (2t - 2, 2t - 2, 1)$, $y = (t - 1, 2t - 2, 2)$.

1.2.2. Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

1.34. Prikažite w kao linearnu kombinaciju od x, y, z, ako su

a) $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

b) $w = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

c) $x = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 4 & 1 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$

1.35. Ispitajte linearnu nezavisnost vektora (matrica):

a) $x = (1, -1, 2)$, $y = (4, 2, 0)$, $z = (1, 1, 1)$

b) $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

c) $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $x = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

1.36. Odredite parametar $t \in \mathbf{R}$ takav da sljedeći vektori budu linearno nezavisni

a) $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{bmatrix}$

b) $x = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ -1 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

c) $x = \begin{bmatrix} t \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ -10 \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}$

1.37. Provjerite da li sljedeći vektori tvore bazu od M_{31}, ako su

a) $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

b) $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

c) $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

d) $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

1.38. Odredite parametar $t \in \mathbf{R}$ tako da sljedeći vektori tvore bazu od $\mathbf{R}^3$ ako su

a) $x = (1, 2, 1)$, $y = (2, 5, t)$, $z = (2, 2, t - 1)$

b) $x = (t - 1, 1, 2)$, $y = (1, 1, 2)$, $z = (2, 3, t - 2)$

c) $x = (t, 1, 1)$, $y = (1, t, 1)$, $z = (1, 1, t)$

d) $x = (1, 1, t - 1)$, $y = (1, t - 1, 1)$, $z = (t - 1, 1, 1)$

1.39. Prikažite vektor $x = (2, 4, 8)$ u bazi $\{a, b, c\}$ ako su

a) $a = (1, 1, 1)$, $b = (1, 2, 3)$, $c = (0, 1, 4)$

b) $a = (4, 6, 8)$, $b = (1, 2, -2)$, $c = (1, 0, 2)$

c) $a = (-1, 3, 0)$, $b = (2, -1, 4)$, $c = (-2, 1, -4)$

1.40. Neka je

a) $a = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **b)** $a = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

vektor iz M_{21}. Pokažite da je skup $S = \{x \in M_{21},\ x^\top a = 0\}$ vektorski potprostor od M_{21} i nađite mu jednu bazu.

1.41. Ispitajte je li S potprostor od $\mathbf{R}^3$, (koje dimenzije?) i nađite mu jednu bazu ako je

a) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3,\ x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$

b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x - y = 0\}$

c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ z = 0\}$

d) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3,\ x_1 = 1\}$

1.42. Ispitajte je li V potprostor od M_2 i nađite mu jednu bazu ako je V skup svih

a) gornje trokutastih **b)** donje trokutastih **c)** simetričnih

d) antisimetričnih **e)** dijagonalnih **f)** skalarnih

matrica iz M_2.

1.2.3. Rang matrice

1.43. Odredite rang matrice A

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ **d)** $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ **f)** $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 6 \\ 4 & 5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

g) $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

1.44. Odredite parametar $t \in \mathbf{R}$ takav da je

a) $r(A) = 3$, ako je $A = \begin{bmatrix} t & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $r(A^\top) = 3$, ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ t & -1 & 1-t & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

c) $r(A) = 2$, ako je $A = \begin{bmatrix} t & 3 & 4 \\ 2 & t & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

d) $r(A^\top) = 2$, ako je $A = \begin{bmatrix} -t & 2 & -1 & t \\ 3 & 1 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & t & -1 \end{bmatrix}$

e) $r(A) = 1$, ako je $A = \begin{bmatrix} t & -4 \\ -1 & t \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

1.45. Odredite parametre $a, b \in \mathbf{R}$ takve da je

a) $r(A^\top) = 2$, ako je $A = \begin{bmatrix} a & b & 6 & -2 \\ 2 & 6 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -\frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}$

b) $r(A) = 3$, ako je $A = \begin{bmatrix} a & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & b \end{bmatrix}$

c) $r(A) = 2$, ako je $A = \begin{bmatrix} -a & 2 & 1 \\ b & -5 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ a & -1 & 6 \end{bmatrix}$

1.46. Diskutirajte rang matrice A u ovisnosti o parametru $t \in \mathbf{R}$ ako je

a) $A = \begin{bmatrix} t & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} t & 2 & 1 & t+1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ t & 3 & 1 & 1+t \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & t & 1 \\ 1 & t & 1 & 1 \\ t & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ t & 1 & -2 \\ t & 2 & -1 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & t \\ t & 4 \\ 2 & 2t \end{bmatrix}$

f) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1+t \\ t & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

1.2.4. Primjena u ekonomiji

1.47. Ako je vektor $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$ vektor proizvodnje poduzeća (gdje je q_i količina i-tog proizvoda), $c = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, vektor jediničnih troškova i $p = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}$ vektor prodajnih cijena po jedinici proizvoda, izračunajte i interpretirajte skalarne produkte

a) $q^\top \cdot c$ **b)** $q^\top \cdot p$ **c)** $q^\top \cdot (p - c)$

1.48. Dan je vektor proizvodnje nekog poduzeća $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$, gdje je q_i količina i-tog proizvoda u kg. Izračunajte $q^\top \cdot e$, gdje je $e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i interpretirajte.

1.49. Dan je vektor dnevne proizvodnje nekog poduzeća $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$, koja se ostvaruje na jednom stroju čiji je dnevni kapacitet šesnaest sati. Ako je vektor $c = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.09 \\ 0.25 \end{bmatrix}$ vektor kapaciteta (u satima) po jedinici proizvoda, čemu mora biti jednak skalarni produkt $q^\top c$ (ispišite ga) da bi se dnevni kapacitet stroja u potpunosti iskoristio?

1.3. Sustav linearnih jednadžbi

1.3.1. Rješenje i egzistencija rješenja sustava linearnih jednadžbi

1.50. Provjerite konzistentnost sustava ako je

a)
$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 6 \\ 2x & -y & +2z & = & 6 \\ x & -2y & -z & = & -6 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrrcr} 2x & +y & -z & = & 4 \\ x & -2y & +z & = & 1 \\ x & +3y & -2z & = & 3 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rrrcr} x & -y & +2z & = & 1 \\ -2x & +2y & -4z & = & -2 \\ -x & +y & -2z & = & -1 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 6 \\ -3x_1 & & +3x_3 & = & 9 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 10 \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{rrrrcr} 2x & -y & +3z & -w & = & 1 \\ 3x & +y & -z & & = & 0 \\ -x & -2y & +4z & -w & = & 1 \\ x & -3y & +7z & -2w & = & 5 \end{array}$$

1.51. Odredite parametar $t \in \mathbf{R}$ takav da je sustav konzistentan ako je

a) $\begin{array}{rrrcl} -x & +y & & = & t \\ x & -2y & +2z & = & t-1 \\ & -y & +tz & = & t+1 \end{array}$

b) $\begin{array}{rrrcl} & -y & +z & = & t \\ 2x & +y & -2z & = & t-1 \\ 2tx & & -z & = & t+1 \end{array}$

c) $\begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & +tx_3 & = & 1 \\ x_1 & +tx_2 & +x_3 & = & 1 \\ tx_1 & +tx_2 & +tx_3 & = & 1 \end{array}$

d) $\begin{array}{rrrcl} tx & +t^2y & +t(t+1)z & = & 0 \\ x & +y & +2z & = & 1 \\ 2x & +y & +3z & = & 0 \end{array}$

1.52. Odredite parametar $t \in \mathbf{R}$ takav da je sustav nekonzistentan ako je

a) $\begin{array}{rrrcr} tx & -5y & -z & = & 2 \\ 5x & +ty & -3z & = & 2 \\ x & +3y & +z & = & -1 \end{array}$

b) $\begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & -2 \\ x & -ty & +tz & = & 5 \\ tx & +y & +z & = & 3 \end{array}$

c) $\begin{array}{rrrcl} tx & -y & +tz & = & 2 \\ (1-t)x & +y & +tz & = & 1 \\ x & & +2tz & = & 4 \end{array}$

1.53. Odredite parametar $t \in \mathbf{R}$ takav da sustav ima i netrivijalno rješenje ako je

a) $\begin{array}{rrrcl} -tx & -y & +z & = & 0 \\ -x & +ty & +z & = & 0 \\ (1-t)x & -(1-t)y & & = & 0 \end{array}$

b) $\begin{array}{rrrcl} x & +ty & +3z & = & 0 \\ -tx & +4y & +2z & = & 0 \\ 3x & -5y & -tz & = & 0 \end{array}$

1.3.2. Rješavanje sustava linearnih jednadžbi

1.54. Riješite sustav ako je

a) $\begin{array}{rrrcl} x & -y & +z & = & 2 \\ 2x & +y & -z & = & 1 \\ -x & +3y & +z & = & 8 \end{array}$

b) $\begin{array}{rrrcr} & y & +z & = & 3 \\ x & -y & +2z & = & 5 \\ -3x & & +5z & = & 18 \end{array}$

c) $\begin{array}{rrrrrcl} 2x & -y & & +2w & +2 & = & 0 \\ & 3y & +z & -4w & -3 & = & 0 \\ x & & -3z & +6w & +4 & = & 0 \\ 3x & +y & +z & & & = & 0 \end{array}$

d) $\begin{array}{rrrcl} & y & +z & = & 4 \\ 3x & -y & -z & = & 2 \\ 3x & & & = & 6 \end{array}$

e) $\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & -x_2 & +4x_3 & = & 6 \\ -x_1 & & -2x_3 & = & 4 \\ -x_1 & -x_2 & -2x_3 & = & 18 \end{array}$

f) $\begin{array}{rrrcl} 2x & -3y & +4z & = & 1 \\ 3x & +y & -2z & = & 2 \\ -x & -4y & +6z & = & 5 \end{array}$

g) $\begin{array}{rrrrcl} & y & -z & +w & = & 4 \\ 3x & -2y & +4z & -w & = & 3 \\ -3x & +3y & -5z & +2w & = & 1 \\ -3x & +4y & -6z & +3w & = & 5 \end{array}$

1.55. Riješite sustav linearnih jednadžbi:

a) $\begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 0 \\ 2x & -y & +3z & = & 0 \\ & 2y & +z & = & 0 \end{array}$

b) $\begin{array}{rrrcl} -3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & & -3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +2x_3 & = & 0 \end{array}$

1.56. Riješite sustav linearnih jednadžbi:

a) $\begin{array}{rrrrcl} x & -y & +z & -w & = & 1 \\ 2x & +y & -z & & = & 2 \end{array}$ **b)** $\begin{array}{rrrrcl} x & -y & +2z & +4w & = & 3 \\ 2x & -2y & +4z & +10w & = & 2 \end{array}$

c) $\begin{array}{rrrrcl} 2x & -3y & +4z & -w & = & 2 \\ 2x & -3y & +8z & -w & = & 6 \end{array}$

1.57. Riješite sustav linearnih jednadžbi:

a) $\begin{array}{rrrcl} x & +y & -z & = & 1 \\ 3x & +2y & +z & = & 2 \\ & y & +z & = & 1 \\ 2x & +y & +2z & = & 1 \end{array}$ **b)** $\begin{array}{rrrcl} & x_2 & -x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & & +3x_3 & = & 6 \end{array}$

1.58. Nađite sva bazična rješenja sustava:

a) $\begin{array}{rrrcl} x & +y & -z & = & 1 \\ x & -y & +z & = & 3 \end{array}$ **b)** $\begin{array}{rrrrcl} x & +y & -z & +w & = & 4 \\ & -y & +2z & -w & = & 2 \\ x & & +z & & = & 6 \end{array}$

c) $\begin{array}{rrrrcl} 2x & -y & +3z & -w & = & 1 \\ x & +2y & -z & +2w & = & 2 \end{array}$

1.3.3. Inverzna matrica

1.59. Odredite inverz matrice A ako je

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 10 \\ 4 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ **c)** $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ **e)** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **f)** $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

g) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 7 \\ -2 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

1.60. Odredite parametar $t \in \mathbf{R}$ takav da matrica A bude regularna ako je

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & t \\ 2 & t & 2 \\ t & 2 & 2 \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ t & t & t \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} t+1 & 2 & t-1 \\ 1 & t & 1-t \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **d)** $A = \begin{bmatrix} 1 & t-1 & -1 & t-1 \\ -1 & 2 & t & t+1 \\ 2 & t+1 & -2 & t+1 \\ t & -1 & 0 & t-1 \end{bmatrix}$

1.61. Odredite parametar $t \in \mathbf{R}$ takav da postoji inverz matrice A ako je

a) $A = \begin{bmatrix} t+1 & -1 & 2 \\ 2 & t+1 & -1 \\ -1 & 2 & t+1 \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 1+t & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+t & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+t & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+t \end{bmatrix}$

1.62. Zadane su matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Riješite matrične jednadžbe

a) $AX + B = I$ **b)** $AX - B^{-1} = X$

c) $A^\top X + B^3 = I - 2X$ **d)** $X(A - B^{-1})^\top - I = -X + B$

e) $(AB)^\top X = (AB)^{-1} - X$ **f)** $A^{-1}X - C = ABX$

1.63. Riješite matrične jednadžbe

a) $AX - B = X$ ako su $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

b) $A^{-1}X - 2C = B^\top X$ ako su $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

1.3.4. Primjena u ekonomiji

1.64. Tjedna ponuda (s) i potražnja (d) za proizvodom A u nekoj regiji, dane su jednadžbama

a) $\begin{aligned} d &= 150 - 10p \\ s &= -100 + 40p \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} p &= 35 - 0.025d \\ p &= -40 + 0.05s \end{aligned}$

gdje je p cijena. Izračunajte ravnotežnu cijenu i ravnotežnu količinu proizvoda.

1.65. Poduzeće proizvodi televizore uz \$ 51 000 fiksnih i

a) \$ 1400 **b)** \$ 1150

varijabilnih troškova po jedinici proizvoda. Ako se televizori prodaju po cijeni od \$ 2000 po komadu, izračunajte koliko komada televizora mora poduzeće prodavati da bi pokrilo svoje troškove (tzv. break even).

1.66. Neko poduzeće proizvodi tri tipa štednjaka: super, compact i deluxe. Svaki tip mora proći kroz tri različita postrojenja: P_1 (proizvodnja dijelova), P_2 (sklapanje dijelova) i P_3 (pakiranje). Trajanja tih prolaza (u satima) po jedinici proizvoda, dana su u tabeli.

	super	compact	deluxe
P_1	0.4	0.5	0.5
P_2	0.25	0.3	0.4
P_3	0.2	0.2	0.2

Postrojenja P_1, P_2 i P_3 raspolažu s tjednim kapacitetom od, redom

a) 37, 25, 16 **b)** 40, 27.25, 17

sati. Koliko se štednjaka svakog tipa mora tjedno proizvoditi da bi poduzeće radilo punim kapacitetom?

1.67. Poduzeće plaća godišnji porez od \$ 1 664 000. Državni porez iznosi 25% dohotka koji ostane nakon što se plati porez gradu i županiji. Županijski porez iznosi 10% dohotka koji ostane nakon što se plati porez državi i gradu, te gradski porez iznosi 5% dohotka koji ostane nakon što se plati državni i županijski porez. Izračunajte iznos državnog, županijskog i gradskog poreza koje poduzeće mora platiti.

1.68. Jedan savjetnik za investicije ima na raspolaganju dvije vrste investicija: niskorizične investicije koje godišnje vraćaju 10% i visokorizične koje godišnje vraćaju 20%. Ako klijent ima na raspolaganju \$ 50 000 i želi da mu se vrati

a) 15% **b)** 18%

od toga, kako treba investirati? Komentirajte.

1.4. Determinanta

1.4.1. Svojstva determinante

1.69. Izračunajte $\det A$ za $A \in M_3$ ako je

a) $\det(2A) = 8$ **b)** $16\det(\frac{1}{2}A) = 4$

c) $\det(\frac{1}{2}A) + \sqrt{2}(\det \frac{1}{\sqrt{2}}A) = -5$

1.70. Izračunajte red matrice A ako je $\det A = -1$ i

a) $\det(3A) = -27$ **b)** $-8\det(\frac{1}{2}A) = \frac{1}{2}$

c) $\det A + \det(\frac{1}{2}A) + \det(\frac{1}{4}A) = -\frac{21}{16}$

1.71. Izračunajte skalar $t \in \mathbf{R}$ ako je $A \in M_3$, $\det A = -1$ i

a) $\det(3tA) = 27$ **b)** $-\frac{1}{2}\det(4t^2A) = \frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{8}\det(tA) - \det(\sqrt{t}A) = 0$

1.72. Izračunajte $\det A$ za $A \in M_2$ ako je

a) $\det A^2 - \det A^\top = 0$ **b)** $\det A \cdot A^\top - \det(\sqrt{2}A^\top) + 1 = 0$

c) $\det A^3 - 2\det(-A) = 0$

1.73. Izračunajte

a) $\det A + \det(-A^{\top})$ **b)** $\det A + \det A^2 + \ldots + \det A^{10}$

ako je $A \in M_3$ antisimetrična matrica.

1.4.2. Izračunavanje determinante

1.74. Izračunajte vrijednost sljedećih determinanti:

a) $\begin{vmatrix} 24 & 18 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 99 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 100 \\ 2 & 4 & 6 & 10 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 \\ 8 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 8 & -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

1.75. Izračunajte vrijednost sljedećih determinanti

a) $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} x+1 & x-1 \\ x-1 & x+1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} x & x-y & x \\ y & y-z & y \\ z & z-x & z \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ x^{10} & x^{10} & 0 \\ x^{100} & x^{100} & x^{100} \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ b & 0 & a \\ b & b & 0 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}$ **h)** $\begin{vmatrix} x-a & a & a \\ a & a-x & -a \\ -a & -a & x-a \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & -b & -c & -d \\ a & b & -c & -d \\ a & b & c & -d \end{vmatrix}$ **j)** $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & x \\ x & x+2 & x & x \\ x & x & x+3 & x \\ x & x & x & x+4 \end{vmatrix}$

k) $\begin{vmatrix} t & -2 & 2 & \frac{1}{3} \\ t^2 & -2 & 4 & 1 \\ t^3 & -2 & 8 & 3 \\ t^4 & -2 & 16 & 9 \end{vmatrix}$ **l)** $\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 2x & 4x^2 & 8x^3 & 16x^4 \\ 3x & 9x^2 & 27x^3 & 81x^4 \\ 4x & 16x^2 & 64x^3 & 256x^4 \end{vmatrix}$

1.76. Riješite jednadžbe:

a) $\begin{vmatrix} x-1 & x+1 & x-2 \\ x+3 & x+5 & x \\ x+1 & x+3 & x-1 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} x-4 & -3 & x+2 & 0 \\ x-1 & -1 & x+1 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} x-a & a & a & a \\ a & 2x+a & a & a \\ a & a & x-a & a \\ a & a & a & 2x+a \end{vmatrix} = 0$

1.77. Izračunajte:

a) $\det A + \det A^2$

b) $\det(-A) + \det A^\top + \det(A^\top)^2$

ako je $A = \begin{bmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{bmatrix}$.

1.78. Izračunajte:

a) $\det A + \det A^\top$

b) $\sum\limits_{k=0}^{10} \det A^k$

ako je $A = \begin{bmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{bmatrix}$.

1.4.3. Primjena determinanti

1.79. Provjerite linearnu nezavisnost vektora:

a) $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

b) $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

1.80. Odredite parametar $t \in \mathbf{R}$ takav da su sljedeći vektori linearno zavisni:

a) $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-t \\ 1 \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2-t \end{bmatrix}$

b) $x = \begin{bmatrix} 2t \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 3t^2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

c) $x = \begin{bmatrix} 1-t \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 2+t \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

1.81. Provjerite regularnost matrice A ako je:

a) $A = \begin{bmatrix} a & b & a-b \\ b^2-a^2 & b^2-a^2 & 0 \\ b & a & b-a \end{bmatrix}$, $a \neq b$

b) $A = \begin{bmatrix} m-1 & 2m-1 & -m & 0 \\ 2m+3 & m+2 & m+1 & 0 \\ m+1 & 2m+1 & -m & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

1.82. Odredite parametar $t \in \mathbf{R}$ takav da A^{-1} postoji ako je:

a) $A = \begin{bmatrix} t-1 & 2 & 3 \\ 1 & t-2 & t-3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix}$

1.83. Ako je $\det A = 2$, $A \in M_3$, izračunajte:

a) $4 \det A^{-1} + \det A^\top$ **b)** $8 \det A^{-2} + \det A^{-1} \cdot A^\top$

c) $16 \det(4A)^{-1} + \det(A^{-1})^\top$

1.84. Riješite matrične jednadžbe:

a) $A^*AX - X = (\det A)I$ ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $(XA^{-1})^{-1} + \dfrac{1}{\det X}X^* = A^{-1}$ ako je $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 10 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

c) $AX = (A^*A^\top - X)A$ ako je $A = \operatorname{diag}(1, 2, 3)$

d) $(A^*X^{-1}B^*)^{-1} + B(X - I) = 2B$ ako su $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

e) $(XA^*B^{-1})^{-1} + BA^\top(X^{-1} - 2I) = (XA^{-1}B^{-1})^{-1}$ ako su $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 12 & 13 \end{bmatrix}$.

1.85. Izračunajte:

a) $A^{-1}A^\top AA^* - (A^2A^*)^{-1}$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $(AA^*)^{-1} - \dfrac{1}{\det A}I + A^2A^*$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A(A+I)^*A^{-1} + A^*A$ ako je $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

d) $A^{-1}(A^{-1}A^*)^{-1}(B^{-1}A^\top)^{-1}$ ako su $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -100 & 99 \\ 50 & 30 \end{bmatrix}$

e) $(A^*)^{-1}(A^*BA)^2(BA)^{-1}$ ako su $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

f) $(\det A^\top)A(A^\top)^{-1}A^*A + (\det A)A^\top A^*$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

g) $A^*BA^2B^{-1}A^* + (\det A)I + B^{-1}$ ako su $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ i

$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

1.86. Odredite matricu A ako je:

a) $A^* = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ **b)** $A^* = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

1.87. Izračunajte $\det X$ ako je:

a) $A^*XB = B$, gdje su $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 100 \\ 10 & 98 \end{bmatrix}$

b) $(A^{-1})^5X(B^\top)^2 = B^4$, gdje su $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

1.88. **a)** Neka je $A \in M_n$ regularna matrica. Pokažite da je $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

b) Neka je $T \in M_n$ regularna i $A, B \in M_n$ takve daje $A = T^{-1}BT$. Pokažite da je $\det A = \det B$.

c) Pokažite da je za idempotentnu matricu $A \in M_n$, $\det A = 0$ ili $\det A = 1$.

d) Pokažite da je za ortogonalnu matricu $\det A = 1$ ili $\det A = -1$. (Matrica je ortogonalna ako je $A^\top A = I$).

1.89. Odredite vektor $x \in M_{31}$ tako da je

a) $\|x\|_2 = \sqrt{6}$, $x \perp a$, i skup $\{b, c, x\}$ linearno zavisan skup, gdje su $a = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$;

b) $x \perp a$ i skupovi $\{a, b, x\}$ i $\{a, c, x\}$ linearno zavisni, gdje su $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.