1.

Skupovi brojeva

1.1. Pojam skupa i odnosa među skupovima

Osnovu matematike kao nauke čine pojmovi od kojih se neki definiraju, tj. objašnjavaju pomoću već poznatih pojmova, a neke pak nije moguće pojasniti s jednostavnijim i već znanim pojmovima. Nazovimo takve pojmove **osnovnim pojmovima**. Jedan od tih osnovnih pojmova je i pojam **skupa**. To onda znači da se i taj pojam ne definira, a smisao mu se najbolje objašnjava pomoću niza konkretnih primjera iz kojih se onda vidi što sve možemo staviti pod taj pojam.

Primjer 1.

a) Skup studenata u predavaonici.
b) Skup brojeva $1, 3, 5, 7, 9$.
c) Skup rješenja jednadžbe $x^2 - 3x + 2 = 0$.
d) Skup pravaca ravnine koji prolaze ishodištem.
e) Skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od jedne čvrste točke te ravnine.
f) Skup kolegija prve godine studija.

Skup je, kao što se iz danih primjera vidi, sagrađen od objekata koji su svi neposredno istaknuti ili zadovoljavaju neki zahtjev. Te objekte zovemo **elementima** ili **članovima** skupa. Iz primjera se također vidi da priroda elemenata može biti različita. Tako su u primjeru 1a) elementi pojedini studenti, u primjeru 1b) pojedini napisani neparni brojevi, u primjeru 1c) rješenja dane jednadžbe, u primjeru 1d) element je pojedini pravac koji prolazi ishodištem, u primjeru 1e) pojedina točka kružnice, a u primjeru 1f) jedan od elemenata je i "matematika".

U izvjesnim situacijama upotrebljavaju se i neki drugi nazivi, sinonimi za skup, kao sto su: oblast, područje, familija itd., a i poznati srednjoškolski termin "geometrijsko mjesto točaka" spada u tu kategoriju.

Skupovi se obično, da bi istakli činjenicu da oni predstavljaju određenu cjelinu formiranu po nekom svojstvu, označavaju jedinstvenim simbolom i obično su to velika slova: A, N, X,.... Elemente tih skupova označavamo malim slovima: a, n, x,....

Ako x kao objekt pripada nekom skupu X, tada ćemo to, tj. činjenicu " x je element skupa X", označiti sa: $x \in X$. Negaciju prethodnog, tj. da " x nije element skupa X" pišemo: $x \notin X$.

Kao što se iz prethodnog primjera vidi, skup je zadan ako za svaki objekt možemo utvrditi pripada li ili ne pripada skupu. U skladu s tim skup se može zadati ili nabrajanjem svih njegovih elemenata koje onda stavljamo u vitičaste zagrade, npr. skup iz primjera 1b)

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\},$$

ili iskazom karakterističnog svojstva koje njegovi elementi moraju zadovoljavati, npr. skup iz primjera 1c)

$$B = \{x : x^2 - 3x + 2 = 0\}$$

što se čita "B je skup brojeva x **takvih** da zadovoljavaju jednadžbu $x^2 - 3x + 2 = 0$". Istaknimo da su elementi tako zadanog skupa jedini objekti koji to svojstvo zadovoljavaju. Jasno, uvjet koji zadovoljavaju elementi skupa može biti različitog karaktera, što ovisi i o prirodi elemenata zadanog skupa. Napomenimo da se često umjesto oznake ":" koristi i "|".

Skup koji nema niti jedan element zove se **prazni skup** i označava simbolom $\emptyset$ (ili ν). Takav je npr. skup

$$\mathbf{C} = \{x : x \text{ su ljudi čija je visina veća od } 10\,\text{m}\},$$

što neposredno slijedi iz poznatih statističkih podataka.

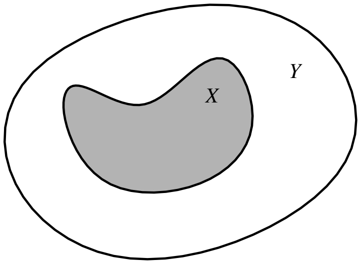
Definicija 1. Neka su X i Y dva skupa. Ako je svaki element skupa X ujedno i element skupa Y, tada kažemo da je skup X podskup skupa Y ili da je X dio od Y.

Sadržaj te definicije simbolički pišemo: $X \subset Y$, što čitamo "X je podskup od Y" ili "X je sadržan u Y". Istaknimo da se u takvom slučaju za Y kaže da je i nadskup od X. Naglasimo još jednom da tvrdnja $X \subset Y$ znači isto što i činjenica da iz toga što je $x \in X$ slijedi da je i $x \in Y$. Označimo to sa:

$$(X \subset Y) \iff (\forall x \in X \implies x \in Y).$$

Simbol $\forall$ čitaj "za svaki", a $\implies$ "implicira". $\iff$ je znak ekvivalencije, tj. on nam ukazuje na to da sadržaji lijevo i desno od te oznake znače jedno te isto.

Za ilustraciju raznih svojstava skupova često koristimo skupove čiji su elementi točke ravnine omeđene zatvorenim krivuljama. Tada činjenicu $X \subset Y$ grafički prikazujemo kao na sl. 1.1.



Sl. 1.1.

Ako X nije podskup od Y to označavamo sa $x \not\subset$. To onda znači da postoji bar jedan element skupa X koji nije element od Y. Simbolički to pišemo:

$$(X \not\subset Y) \iff (\exists x \in X \text{ takav da } x \notin Y).$$

Napomenimo i to da se prazan skup smatra podskupom svakog skupa.

Primjer 2. Neka je $X = \{1, 2\}$ i $Y = \{x : x(x-1)(x-2) = 0\}$. Tada je $X \subset Y$.

Primjer 3. Ako je $X = \{1, 2\}$ i $Y = \{2, 3\}$ tada je i $X \not\subset Y$.

Definicija 2. Skupovi X i Y su jednaki, što pišemo $X = Y$, ako sadrže iste elemente.

Prethodna definicija kazuje da je $X = Y$ tada kada je svaki element skupa X ujedno i element skupa Y, ali i to da je tada svaki element iz Y ujedno i u X. Dakle

$$(X = Y) \iff (X \subset Y \text{ i } Y \subset X).$$

Primjer 4. Neka su dani skupovi $X = \{0, 1, 2\}$ i $Y = \{x : x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$. Tada je $X = Y$.

Iz dosad rečenog vidi se da definicija zapravo znači objašnjenje pomoću kojeg se uvodi neki novi pojam, koristeći za to već poznate činjenice. U matematici osim definicije postoje i iskazi koji nešto tvrde uz neke dane pretpostavke (hipoteze). Takve iskaze zovemo teoremima, a naglasimo da tvrdnje teorema zahtijevaju dokaz koristeći pretpostavke koje su u teoremu dane.

Teorem 1. *Ako je X podskup od Y i Y podskup od Z, tada je i X podskup od Z.*

Teorem, dakle, kaže da iz $X \subset Y$ i $Y \subset Z \implies X \subset Z$. Napomenimo da je u ovom slučaju $X \subset Y$ i $Y \subset Z$ pretpostavka, a $X \subset Z$ tvrdnja teorema.

Dokaz. Trebamo pokazati da za svaki $x \in X$ uz dane pretpostavke slijedi da je i $x \in Z$. Neka je $x \in X$ proizvoljni element. Budući da je $X \subset Y$, iz prethodnog slijedi da je i $x \in Y$, a to zajedno s pretpostavkom $Y \subset Z$ povlači da je i $x \in Z$. To onda znači da je $X \subset Z$.

1.2. Operacije sa skupovima

U aritmetici se na određeni način svakom paru brojeva x i y pridružuje npr. broj $x+y$ ili $x \cdot y$. Ova pridruživanja zovemo operacijama zbrajanja odnosno množenja. Sada ćemo napraviti nešto slično i za skupove, tj. na određeni način pridružit ćemo npr. svakom paru skupova X i Y neke nove skupove. Po analogiji s prethodnim to zapravo znači da među skupovima uvodimo operacije.

Definicija 1. Dana su dva skupa X i Y. **Unija** skupova X i Y je skup svih elemenata koji su ili u X ili u Y ili u njihovom zajedničkom dijelu. Unija skupova X i Y označava se sa $X \cup Y$, i to se čita "X unija Y".

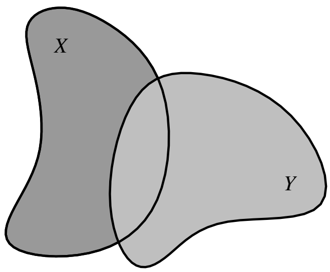
Primjer 1. Neka je $X = \{1, 2, 3\}$ i $Y = \{2, 3, 4\}$. Tada je $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4\}$.

Prethodna definicija pokazuje da vrijedi: ako je x element od X ili element od Y ili element od oba ta skupa tada je $x \in X \cup Y$, ali i obratno: ako je $x \in X \cup Y$ tada je x element od X ili od Y ili od oba skupa.

To simbolički označavamo sa

$$\forall x; x \in X \vee x \in Y \iff x \in X \cup Y.$$

Tu smo upotrijebili novu oznaku $\vee$ koja znači: ili vrijedi prvo ili drugo ili oba. Grafički uniju prikazujemo kao na sl. 2, gdje je $X \cup Y$ "iscrtkano" područje.



Sl. 1.2.

Napomena 1. Analogno se definira i unija za konačan broj skupova. Osim toga iz definicije unije slijedi da je

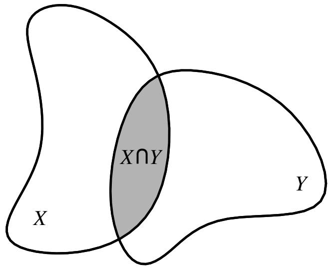
$$X \subset X \cup Y \quad \text{i} \quad Y \subset X \cup Y.$$

Definicija 2. Dana su dva skupa X i Y. **Presjek** skupova X i Y je skup svih elemenata koji su zajednički skupovima X i Y.

Presjek skupova X i Y označava se sa $X \cap Y$, što se čita "X presjek Y".

Primjer 2. Neka je $X = \{1, 2, 3\}$ i $Y = \{2, 3, 4\}$. Tada je $X \cap Y = \{2, 3\}$.

Presjek skupova X i Y grafički se prikazuje kao na sl. 3, gdje je $X \cap Y$ "iscrtkano" područje.



Sl. 1.3.

Napomena 2. Analogno se definira i presjek od bilo kojeg konačnog broja skupova. Osim toga, iz dane definicije slijedi da je $X \cap Y$ podskup i od X i od Y, tj. da vrijedi:

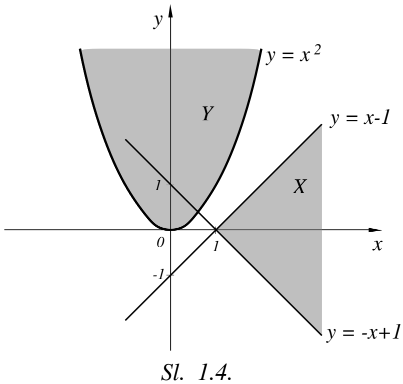
$$X \cap Y \subset X \quad \text{i} \quad X \cap Y \subset Y.$$

Definicija 3. Za dva skupa X i Y kaže se sa du **disjunktni** ako nemaju zajedničkih elemenata, tj. ako je $X \cap Y = \emptyset$.

Primjer 3. Neka je

$$X = \{(x, y) : -x + 1 \leqslant y \leqslant x - 1\}$$
$$Y = \{(x, y) : y \geqslant x^2\}.$$

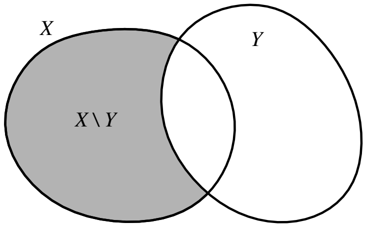
Prikažemo li te skupove u ravnini odmah se vidi da je $X \cap Y = \emptyset$. To je dano slikom 4.



Sl. 1.4.

Definicija 4. Dana su dva skupa X i Y. **Diferencija** skupova X i Y, u oznaci $X \setminus Y$, je skup svih onih elemenata iz X koji ne pripadaju skupu Y.

Diferenciju skupova X i Y grafički prikazujemo kao na slici 5.



Sl. 1.5.

Primjer 4. Neka je $X = \{a, b, c, e\}$ i $Y = \{a, c, d\}$. Tada je $X \setminus Y = \{b, e\}$.

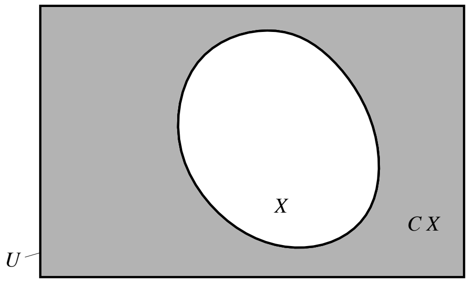
Napomena 3. Iz definicije diferencije skupova X i Y slijedi da je $X \setminus Y \subset X$.

Promatrajmo sada skupove X i U takve da je $X \subset U$.

Definicija 5. Komplement skupa X, u oznaci CX ili X^C, je skup elemenata koji ne pripadaju skupu X.

Od posebnog je interesa za neke važne pojmove, koji će se razmatrati kasnije, tzv. **direktni** ili **Kartezijev** produkt skupova.

Za skup $\{x, y\}$ kažemo da je uređen ako znamo koji je od tih elemenata na prvom, a koji na drugom mjestu. Takav skup zovemo **uređenim parom** i označavamo sa (x, y). Analogno se uvodi i pojam uređene n-torke.



Sl. 1.6.

Definicija 6. Neka su X i Y dva neprazna skupa. **Direktni produkt** skupova X i Y, u oznaci $X \times Y$, je skup svih uređenih parova, takvih da je prvi element iz X, a drugi iz Y. Dakle

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Primjer 5. Neka je $X = \{1, 2\}$ i $Y = \{a, b, c\}$. Tada je

$$X \times Y = \{(1, a); (1, b); (1, c); (2, a); (2, b); (2, c)\}.$$

Ako je $Y = X$ produkt $X \times X$ zovemo Kartezijevim kvadratom skupa X i označavamo sa X^2.

U posebnom slučaju kada imamo $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, gdje je $\mathbf{R}$ skup realnih brojeva, $\mathbf{R}^2$ je skup svih uređenih parova realnih brojeva.

$$\mathbf{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbf{R} \quad \text{i} \quad y \in \mathbf{R}\}.$$

Analogno za $\mathbf{R}^3, \ldots, \mathbf{R}^n$.

Istaknimo neke pojmove o kojima je bilo govora još u osnovnoj školi. Jedan od njih je pojam relacije.

Definicija 7. Neka su X i Y neprazni skupovi. **Relacijom** R iz X u Y zovemo podskup od $X \times Y$.

Primjer 6. Neka je $X = \{1, 2, 3\}$ i $Y = \{a, b, c\}$. Tada je $R = \{(1, a); (3, b)\} \subset X \times Y$ jedna od relacija iz X u Y. Tu je npr. elementu $1 \in X$ pridružen element $a \in Y$.

Svakoj relaciji R iz X u Y odgovara inverzna relacija, u oznaci R^{-1}, iz Y u X kojoj su elementi uređeni parovi dobiveni zamjenom mjesta od x i y u svim parovima relacije R, tj. $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in \mathbf{R}\}$.

Primjer 7. Za relaciju R iz prethodnog primjera inverzna relacija je

$$R^{-1} = \{(a, 1);\ (b, 3)\}.$$

Promatrajmo sada takvu relaciju R iz X u Y da se kao prvi element uređenog para te relacije pojavljuje svaki element iz X i to samo jednom. Ako i inverzna relacija R^{-1} ima to isto svojstvo, tj. da se i svaki element iz Y pojavljuje kao prvi element uređenih parova iz R^{-1}, i to samo jednom, onda kažemo da je između elemenata skupa X i elemenata skupa Y uspostavljeno obostrano jednoznačno pridruživanje.

Primjer 8. Za skupove $X=\{1, 2, 3\}$ i $Y=\{a, b, c\}$ neka je $R=\{(1, a); (2, c); (3, b)\}$. Tu je $R^{-1} = \{(a, 1); (c, 2); (b, 3)\}$.

Dva skupa X i Y između kojih možemo uspostaviti obostrano jednoznačno pridruživanje nazivamo **ekvivalentnim**, što označavamo sa $X \sim Y$. Iz prethodnog primjera slijedi da su skupovi X i Y ekvivalentni.

Za skup X kažemo da je **konačan** ako je $X = \emptyset$ ili ako postoji prirodan broj n takav da je $X \sim \{1, 2, \ldots, n\}$.

Za skup koji nije konačan kažemo da je beskonačan. Ako je $\mathbf{N}$ skup prirodnih brojeva i ako je $X \sim \mathbf{N}$ za X kažemo da je **prebrojiv**. Za beskonačan skup koji nije prebrojiv kažemo da je neprebrojiv.

1.3. Realni brojevi

Upoznavanje s određenim pojmovima analize, o kojima će biti govora kasnije (konvergencija, neprekidnost...) kao predznanje pretpostavlja usvojen pojam, kao i razna svojstva skupa realnih brojeva $\mathbf{R}$. Stoga izgradnja tog pojma zahtijevala bi mnogo prostora i vremena, a budući da se tokom srednjoškolskog obrazovanja na različitim nivoima o tome dosta detaljno govorilo, mi ćemo pretpostaviti da ta potrebna svojstva skupa realnih brojeva $\mathbf{R}$ znamo i samo ćemo informativno dati pregled raznih skupova brojeva kao i uzroke koji su zahtijevali proširenje tih skupova. Uz to ćemo istaknuti i neka njihova svojstva.

1.3.1. Prirodni i cijeli brojevi

Prvi pojam broja, koji se pojavio u povijesti zbog elementarne potrebe čovjeka da na određeni način zna izraziti količinu elemenata određenog skupa, bio je pojam prirodnog broja. Skup prirodnih brojeva uzimamo kao osnovni skup, a označavamo ga sa N. Imamo dakle

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

U tom skupu definirane su neke nama poznate operacije.

Općenito ćemo, ako su nam zadani skupovi X, Y i Z, operacijom (binarnom operacijom) smatrati zakon po kojem je svakom uređenom paru iz $X \times Y$ pridružen jedan i samo jedan element skupa $\mathbf{Z}$. Ako je $X = Y = Z$ dobivamo poseban slučaj tog pojma, tzv. unutarnju operaciju po kojoj svakom uređenom paru elemenata iz X pridružujemo jednoznačno određen element tog istog skupa. Ovaj poseban slučaj iskazujemo i tako da istaknemo da je to operacija na tom skupu, ali i tako da je ta opracija na tom skupu izvodljiva.

Sada je jasno da je zbrajanje i množenje u skupu N uvijek izvodljivo. To znači da za svaki m, $n \in \mathbf{N}$ slijedi da je $m + n \in \mathbf{N}$ i $m \cdot n \in \mathbf{N}$. Te operacije podvrgavaju se poznatim zakonima komutacije i asocijacije, tj. vrijedi

$$m + n = n + m \quad \text{i} \quad m \cdot n = n \cdot m$$

$$(m + n) + r = m + (n + r) \quad \text{i} \quad (m \cdot n) \cdot r = m \cdot (n \cdot r).$$

Osim toga one su međusobno povezane zakonom distribucije, koji govori da se produkt sa sumom distribuira na svaki sumand iz te sume, tj. vrijedi

$$m \cdot (n + r) = m \cdot n + m \cdot r.$$

Razmotrimo sada jednadžbu $m + x = n$, gdje su m i n proizvoljni elementi iz $\mathbf{N}$. Ako postoji $x \in \mathbf{N}$ tako da ta jednadžba vrijedi, onda to pišemo kao $x = n - m$. Time je definirano oduzimanje.

U vezi s prethodnim naglasimo: ako jednadžba $m + x = n$ ima rješenje u skupu $\mathbf{N}$ onda kažemo da je "m manji od n" što označavamo sa $m < n$. Tu istu činjenicu možemo iskazati i s "n je veći od m" uz oznaku $n > m$. Analogno znamo što znači $n < m$. Ako nije ni $m < n$ ni $n < m$ kažemo da je $m = n$. Na taj način smo u skup $\mathbf{N}$ uveli uređaj, odnosno skup prirodnih brojeva $\mathbf{N}$ postaje uređen skup. To dakle znači, da za svaki m, $n \in \mathbf{N}$ imamo da je $m < n$ ili $m > n$ ili $m = n$.

Iz prethodnog je jasno da jednadžba $m + x = n$ ima rješenje u $\mathbf{N}$ samo u slučaju $m < n$. Da bi ta jednadžba uvijek imala rješenje potrebno je izvršiti proširenje skupa $\mathbf{N}$. Da bismo uklonili to ograničenje, na izvodljivost oduzimanja uvodimo nulu kao rezultat oduzimanja dva jednaka prirodna broja, kao i negativne brojeve na analogan način.

Općenito ćemo proširenje brojevnih skupova vršiti tako da taj prošireni skup u odnosu na polazni zadovoljava određene uvjete. Tako npr. u proširenom skupu uvodimo one operacije koje su postojale i u polaznom skupu, a ako njih primijenimo na elemente polaznog skupa one daju isto što i operacije toga polaznog skupa. Osim toga, te operacije u proširenom skupu moraju imati sva ona svojstva koja su imala u polaznom skupu, a prošireni skup mora biti najmanji skup na kojem je operacija, zbog koje se vrši proširenje, izvodljiva.

Uzimajući to u obzir kod proširenja skupa $\mathbf{N}$, tj. definirajući operacije koje zadovoljavaju te zahtjeve, dobivamo skup cijelih brojeva koji označavamo sa $\mathbf{Z}$. Dakle

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}.$$

Podskup od $\mathbf{Z}$, $\{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ zovemo nenegativnim cijelim brojevima.

Iskažimo još jedno svojstvo skupa $\mathbf{N}$. Svaki podskup M prirodnih brojeva $\mathbf{N}$ koji sadrži broj 1, i ima svojstvo da ako za svaki $n \in M$ slijedi $n+1 \in M$, sadrži sve prirodne brojeve, tj. $M = \mathbf{N}$.

Na tom svojstvu temelji se postupak dokazivanja teorema čija tvrdnja ovisi o prirodnom broju n, koji se zove **matematička** ili **potpuna indukcija**.

Primjer 1. Za svaki prirodni broj $n \in \mathbf{N}$ vrijedi:

$$1^2 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{1}$$

Dokaz. Označimo s M skup svih $n \in \mathbf{N}$ za koje prethodna jednakost vrijedi. Jasno da je $1 \in M$, budući da za $n = 1$ imamo

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}.$$

i dakle $1 = 1$.

Pretpostavimo da je $n \in M$, tj. da jednakost (1) za n vrijedi. Pokažimo da iz te pretpostavke slijedi da je i $n+1 \in M$, tj. da ako se sumiranje kvadrata prvih n prirodnih brojeva vrši po formuli (1) da onda i sumiranje kvadrata $n+1$ prirodnih brojeva vršimo po istoj formuli.

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ &= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}. \end{aligned}$$

Odmah se vidi da je to isti oblik kao i desna strana formule (1) samo na mjestima gdje tu stoji n ovdje stoji $n+1$. Na taj način smo pokazali da iz $n \in M$ slijedi $n+1 \in M$. Po već iskazanom svojstvu skupa $\mathbf{N}$, iz prethodnog slijedi da je $M = \mathbf{N}$, tj. da se ta sumacija vrši po formuli (1) za svaki prirodni broj.

Dokaz binomnog teorema matematičmom indukcijom dan je u 16.2.

1.3.2. Racionalni brojevi

U skupu cijelih brojeva $\mathbf{Z}$ izvodljive su, kao što smo vidjeli, tri operacije. Međutim, dijeljenje nije uvijek izvodljivo: $qx = p$, gdje je $p, q \in \mathbf{Z}$ i $q \neq 0$, u skupu $\mathbf{Z}$ nema uvijek rješenja. Ako postoji $x \in \mathbf{Z}$, koji je rješenje te jednadžbe onda taj element označavamo sa $x = \dfrac{p}{q}$. Da bi i dijeljenje bilo izvodljivo bez ograničenja nužno treba, u skladu s općom napomenom, proširiti područje brojeva. Zato promatramo skup

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbf{Z} \text{ i } q \neq 0 \right\}$$

među čijim elementima uvodimo operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja pomoću dobro nam poznatih pravila za rad s rzlomcima. Tako dobiveni skup $\mathbf{Q}$ zovemo skupom **racionalnih** brojeva. Iz samog postupka formiranja novih skupova očito je da vrijedi $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$.

Navedimo neka svojstva skupa $\mathbf{Q}$:

a) Sve četiri osnovne računske operacije u skupu $\mathbf{Q}$ uvijek su izvodljive.

b) Skup racionalnih brojeva može se urediti. Ako racionalne brojeve pišemo u obliku gdje su nazivnici pozitivni, tj. prirodni brojevi, uređaj u $\mathbf{Q}$ uvodimo sa:

$$\frac{p}{q} < \frac{r}{s} \quad \text{ako je} \quad ps < qr.$$

c) Skup racionalnih brojeva je **prebrojiv**, što znači da se između elemenata skupa $\mathbf{Q}$ i elemenata skupa $\mathbf{N}$ može uspostaviti obostrano jednoznačna korespondencija, dakle $\mathbf{Q} \sim \mathbf{N}$.

d) Skup racionalnih brojeva je **svuda gust**. To znači da između dva različita racionalna broja postoji bar još jedan racionalni broj, pa prema tome i njih beskonačno mnogo.

Dokažimo prethodnu tvrdnju: Neka su a, $b \in \mathbf{Q}$ i $a < b$. Tada je racionalan i broj $c = \dfrac{a+b}{2}$ koji je veći od a, a manji od b, tj. $a < c < b$. Ako je $c_1 = \dfrac{a+c}{2}$, tada je $a < c_1 < c < b$. Taj proces možemo nastaviti analogno dalje, a to onda dokazuje prethodnu tvrdnju.

e) Svaki racionalni broj može se prikazati u obliku decimalnog broja s konačnim brojem decimala ili u obliku periodskog decimalnog broja. Vrijedi i obratno, tj. svaki se konačni ili periodski decimalni broj može prikazati u obliku $\dfrac{p}{q}$.

Postupci za transformaciju iz jednog oblika zapisa elemenata iz $\mathbf{Q}$ u drugi oblik poznati su iz srednje škole, a ilustrirani su sljedećim primjerom.

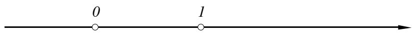
Primjer 2.

a) $\dfrac{3}{2} = 1.5$; **b)** $\dfrac{1}{3} = 0.333\ldots = 0.\dot{3}$;

c) $0.36 = \dfrac{36}{100} = \dfrac{9}{25}$; **d)** $0.\dot{3}\dot{6} = \dfrac{36}{99} = \dfrac{12}{33}$;

e) $0.6\dot{3}\dot{6} = \dfrac{636-6}{990} = \dfrac{630}{990} = \dfrac{63}{99} = \dfrac{21}{33}$.

Racionalne brojeve možemo prikazati pomoću točaka pravca i na taj način dati njihovu geometrijsku interpretaciju. Neka je dat proizvoljni pravac. Na njemu izaberimo neku točku koju zovemo **ishodište** i označimo je s O i neku drugu točku, obično desno od O, i označimo je s 1. Udaljenost od 0 do 1 uzima se kao jedinica duljine. Tako dobiven pravac zove se brojevni pravac.



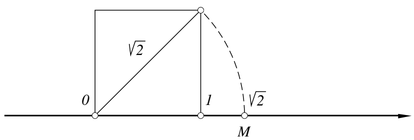
Sl. 1.7.

Postoji jedan prirodni način (mjerenje) pomoću kojeg se svakom racionalnom broju može pridružiti jedna točka brojevnog pravca - racionalna točka. Dani broj zove se apscisa te točke.

Kako je skup racionalnih brojeva svuda gust imamo dojam da su sve točke na brojevnom pravcu racionalne. Da li je to tako?

1.3.3. Iracionalni brojevi

Da odgovorimo na prethodno pitanje razmotrimo sljedeću konstrukciju:



Sl. 1.8.

Da li je apscisa točke M predočene simbolom $\sqrt{2}$ racionalan broj? Pitanje je, znači, da li se dijagonala kvadrata može izmjeriti njegovom stranicom odnosno da li jednadžba $x^2 = 2$ ima racionalno rješenje. Tvrdimo da nema racionalnog broja x kojem bi kvadrat bio 2. Da to pokažemo služit ćemo se indirektnim dokazom. Pretpostavit ćemo da takav broj postoji, a onda iz toga izvesti proturječje. Dokažimo najprije jednu lemu (leme su iskazi koje primjenjujemo u toku dokaza nekog teorema).

Lema 1. *Kvadrat neparna broja je neparan broj.*

Cijeli broj p je paran ako je djeljiv sa 2 tj. ako je $\frac{p}{2} = n \in \mathbf{Z}$. Odavde je $p = 2n$ opći oblik parnog broja. Tada je $2n + 1$ opći oblik neparnog broja.

Dokaz leme. $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$. Prvi sumand je paran broj što znači da je suma neparan broj. Lema je time dokazana. Prethodno praktički znači ako je kvadrat nekog broja paran, onda je i taj broj paran.

Pokažimo sada da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj. Pretpostavimo, kao što smo već rekli, suprotno, tj. da $\sqrt{2}$ jest racionalan. To bi značilo da se $\sqrt{2}$ može napisati u obliku

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

uz još jednu napomenu, da je razlomak $\frac{p}{q}$ do kraja skraćen, tj. da je najveća zajednička mjera $M(p, q) = 1$, odnosno da su p i q relativno prosti brojevi. Kvadriranjem dobivamo

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \implies p^2 = 2q^2.$$

Znači da je p^2 paran broj, a po lemi slijedi da je tada i p paran, tj. oblika $p = 2p$, $p_1 \in \mathbf{Z}$. Tada imamo $4p_1^2 = 2q^2 \implies 2p_1^2 = q^2$, i po lemi je q paran broj, pa možemo pisati da je $q = 2q_1$.

Time smo došli do kontradikcije, jer bi se razlomak $\frac{p}{q}$ mogao skratiti sa 2, a to je suprotno učinjenoj pretpostavci da su p i q do kraja skraćeni. Slično bi se moglo pokazati i za $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ...

Iz prethodnog slijedi:

1. Skup racionalnih točaka na brojevnom pravcu ima "praznina" iako je svuda gust.
2. Duljina dijagonale kvadrata stranice 1 ne može se izraziti racionalnim brojem. Kaže se da su dijagonala i stranica kvadrata nesumjerljive dužine.

Dakle, ako bi se radilo samo s racionalnim brojevima, to bi značilo da dijagonala kvadrata stranice 1 nema duljine, a na brojevnom pravcu bismo imali praznine. Iz toga se vidi da je potrebno dalje proširiti područje brojeva. Skup racionalnih brojeva proširujemo skupom **iracionalnih** brojeva kojeg označavamo sa **I**.

Budući da iracionalan broj $\sqrt{2}$ nije razlomak, ne možemo ga prikazati u obliku konačnog ili periodskog decimalnog broja. Ipak možemo potražiti među cijelim brojevima najveći kojem je kvadrat manji od 2 i najmanji kojem je kvadrat veći od 2. To isto učinimo i s decimalnim brojevima s jednom decimalom, pa sa dvije itd. Dobivamo

$$1 = 1^2 < 2 < 2^2 = 4$$

$$1.96 = 1.4^2 < 2 < 1.5^2 = 2.25$$

$$1.9881 = 1,41^2 < 2 < 1.42^2 = 2.0164$$

$$1.999396 = 1.414^2 < 2 < 1.415^2 = 2.002225 \quad \text{itd.}$$

Tako se vidi da se $\sqrt{2}$ može koliko hoćemo točno ukliještiti s ovakva dva niza 1; 1.4; 1.41; 1.414;... i 2; 1.5; 1.42; 1.415;... racionalnih brojeva.

Neka svojstva skupa racionalnih brojeva:

a) To je uređen skup;
b) Skup iracionalnih brojeva je svuda gust;
c) Skup iracionalnih brojeva je neprebrojiv, pa bi se u stanovitom smislu moglo reći da je iracionalnih brojeva više nego racionalnih;
d) Iracionalni brojevi prikazuju se neperiodskim decimalnim brojevima i obratno.

Skup racionalnih i iracionalnih brojeva zajedno tvore skup **realnih brojeva R**. Iz prethodnih razmatranja slijedi da je između skupa realnih brojeva **R** i točaka brojevnog pravca uspostavljena obostrano jednoznačna korespodencija. To je i razlog da ćemo kadšto umjesto o broju x govoriti o točki x, jer se zapravo misli na točku brojevnog pravca kojoj je realan broj x apscisa.

1.3.4. Algebarski i transcendentni brojevi

Skup realnih brojeva **R** može se rastaviti na dva disjunktna podskupa uvođenjem pojma algebarskih i transcendentnih brojeva.

Definicija 1. Realan broj nazivamo **algebarskim** ako je korijen algebarske jednadžbe $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ kojoj su koeficijenti cijeli brojevi i $a_n \neq 0$, Realan broj koji nije algebarski nazivamo **transcendentnim**.

Svi transcedentni brojevi su iracionalni, dok među algebarske pripadaju dijelom iracionalni kao i svi racionalni brojevi. Brojevi π, e, $2^{\sqrt{2}}$ su transcendentni. Skup algebarskih brojeva je prebrojiv.

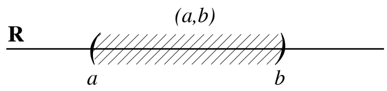
1.4. Neki jednostavni skupovi na brojevnom pravcu i neka njihova svojstva

U daljnjem izlaganju često ćemo se susretati s raznim, uglavnom "jednostavnim" podskupovima skupa realnih brojeva $\mathbf{R}$ i koristiti neka svojstva tih skupova. Zbog toga uvedimo neke osnovne pojmove koji su u vezi s tom problematikom.

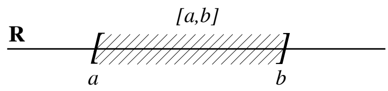
Definicija 1. Skup svih realnih brojeva x za koje vrijedi nejednakost $a < x < b$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ gdje su a, $b \in \mathbf{R}$ zove se **otvoreni** (**zatvoreni**) **interval** i označava sa (a, b) ili $\langle a, b\rangle$, odnosno $([a, b])$.

Dakle, po definiciji je $(a, b) = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b, a, b \in \mathbf{R}\}$ i $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leqslant x \leqslant b, a, b \in \mathbf{R}\}$, a grafički te skupove prikazujemo kao na slikama 1.9 i 1.10.

Naglasimo da kod otvorenog intervala (a, b) brojevi a i b nisu elementi tog skupa, dok kod zatvorenog intervala $[a, b]$ oni tom skupu pripadaju.



Sl. 1.9.



Sl. 1.10.

Definicija 2. Poluotvorenim (poluzatvorenim) intervalom $(a, b]$ $([a, b))$ nazivamo skup svih realnih brojeva x za koje vrijedi: $a < x \leqslant b$ $(a \leqslant x < b)$.

Definicija 3. Beskonačnim intervalima nazivamo skupove:

$$\{x \in \mathbf{R} : x < a, a \in \mathbf{R}\} = (-\infty, a)$$
$$\{x \in \mathbf{R} : x > a, a \in \mathbf{R}\} = (a, +\infty)$$
$$\{x \in \mathbf{R} : x \leqslant a, a \in \mathbf{R}\} = (-\infty, a]$$
$$\{x \in \mathbf{R} : x \geqslant a, a \in \mathbf{R}\} = [a, +\infty)$$
$$\{x \in \mathbf{R} : -\infty < x < +\infty\} = (-\infty, +\infty) = \mathbf{R}.$$

Za skup S realnih brojeva kažemo da je ograničen odozgo (odozdo) ako postoji realan broj M (m) takav da je $x \leqslant M$ $(x \geqslant m)$ za sve $x \in S$. Takav broj M (m) zove se **gornja** (**donja**) **međa** skupa S. Često se koristi i termin gornja (donja) ograda.

Skup S je ograničen ako je ograničen odozdo i odozgo. Geometrijski to znači da postoji neki interval iz $\mathbf{R}$, konačne duljine, koji sadrži S. Skup je neograničen ako nema ili gornju ili donju ogradu.

Primjer 1. Skupovi $(1, 5)$, $[1, 5]$, $(1, 5]$ i $[1, 5)$ su ograničeni.

Primjer 2. Skup $[2, +\infty)$ je neograničen, jer nije ograničen odozgo.

Primjer 3. Skup $S = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ je ograničen, jer je $S \subset [0, 1]$.

Očevidno da iz načina kako je uveden pojam gornje (donje) međe, slijedi da bilo koji skup S iz $\mathbf{R}$ koji je ograničen odozgo (odozdo) ima beskonačno mnogo gornjih (donjih) međa. Najmanja (najveća) gornja (donja) međa skupa S zove se **supremum** (**infimum**) i označava sa $\sup S$ ($\inf S$).

Primjer 4. Za skup $S = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leqslant x < 2\} = [0, 2)$ znamo da je $\sup S = 2$ i $\inf S = 0$. Primijetimo da je $\inf S \in S$ ali $\sup S \notin S$.

Primjer 5. Ako je $S = \{1, 3, 7, 5\}$, tada je $\inf S = 1$, a $\sup S = 7$.

Primjer 6. Ako je $S = \{x \in \mathbf{R} : 0 < x^2 < 9\}$, onda je $\sup S = 3$, a $\inf S = -3$. U ovome slučaju nijedna od tih vrijednosti nije element skupa S.

Iz prethodnih se primjera vidi da supremum i infimum mogu ali ne moraju pripadati promatranom skupu. Ako je $\sup S \in S$ onda je to **maksimum** od S a ako je $\inf S \in S$ onda je to **minimum** od S.

Primjer 7. Ako je $S = [1, 5]$ onda je maksimum tog skupa 5, a minimum 1.

Primjer 8. Otvoreni interval $S = (a, b)$ nema niti maksimum niti minimum, jer je

$$\inf S = a \notin (a, b)$$
$$\sup S = b \notin (a, b).$$

Pojam koji će se često koristiti u daljnjem izlaganju je okolina zadanog realnog broja x_0 u skupu $\mathbf{R}$.

Definicija 4. Skup O iz $\mathbf{R}$ zovemo **okolinom** realnog broja x_0 u $\mathbf{R}$ ako postoji realan broj $\varepsilon > 0$ takav da je

$$x_0 \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset O.$$

Odatle slijedi da je i sam interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, za proizvoljan broj $\varepsilon > 0$, okolina od x_0. Vidi se da je x_0 polovište tog intervala čija je duljina 2ε. Takvu okolinu zovemo ε - okolinom broja x_0 i označavamo je sa $O_\varepsilon(x_0)$.

Iz definicije slijedi da je otvoreni interval okolina svake svoje točke.

Za skup $S \subset \mathbf{R}$ kažemo da je otvoren ako za svaki $x \in S$ postoji okolina $O(x)$ tako da je $O(x) \subset S$ ili ekvivalentno: S je otvoren ako je okolina svakog svog elementa. Skup $S \subset \mathbf{R}$ je zatvoren ako mu je komplement u $\mathbf{R}$ otvoren.

Svi elementi iz S za koje je S okolina tvore nutrinu od S, označavamo je sa $\operatorname{Int} S$. Jasno je da za otvorene skupove S vrijedi $\operatorname{Int} S = S$.

Skup svih točaka koje nisu ni u nutrini od S ni u nutrini komplementa od S zovemo granicom od S.

Primjer 9. Neka je $S = [2, 4)$.
Tada je $\operatorname{Int} S = (2, 4)$, a granica od S skup $\{2, 4\}$.

1.5. Apsolutna vrijednost realnih brojeva

S pojmom apsolutne vrijednosti realnog broja uglavnom smo se svi susreli u elementarnoj matematici. Pa ipak, jer se taj pojam vrlo često primjenjuje u daljnjem izlaganju, dajemo njegovu definiciju i osnovna svojstva.

Definicija 1. Apsolutnom vrijednošću realnog broja x naziva se sam broj x, ako je x pozitivan ili 0; broj $-x$, ako je x negativan. Apsolutna vrijednost broja x označava se $|x|$.

Na taj način po definiciji je

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{ako je } x < 0. \end{cases}$$

Primjer 1. $|6| = 6$; $|-6| = -(-6) = 6$.

Iz same definicije neposredno slijedi da je $|x| \geqslant 0$.

Kako je $x^2 = (-x)^2$, za apsolutne vrijednosti vrijede jednakosti:

$$|x|^2 = x^2 \quad \text{i} \quad |x| = \sqrt{x^2}$$

pa onda slijedi

$$|-x| = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Kao poseban slučaj toga imamo: $|x-y| = |y-x|$.

Pretpostavimo, da su na brojevnom pravcu dane dvije točke P i Q čije su apscise x i y. Udaljenost između točaka P i Q jednaka je $y-x$, ako je točka Q desno od točke P, tj. $y > x$, odnosno $x-y$, ako je Q lijevo od P, tj. $x > y$. Na taj način imamo

$$|x-y| = \begin{cases} x-y, & \text{za } x \geqslant y \\ y-x, & \text{za } y > x \end{cases}$$

a to znači da je $|x-y|$ udaljenost točaka P i Q. Specijalno ako je točka Q u ishodištu, tada je $y = 0$, pa imamo da $|x|$ znači udaljenost točke P (apscise x) od ishodišta.

Teorem 2. *Neka je* $r > 0$*; tada je* $|x| < r \iff -r < x < r$.

Dokaz. Dokaz je lako provesti geometrijski. Ako x zadovoljava nejednakost $|x| < r$ to, po prethodnom, znači da je udaljenost te točke od ishodišta manja od r, a to onda znači da je to i točka iz intervala $(-r, r)$. Jasno da vrijedi i obrat, tj. da svaki x koji zadovoljava $-r < x < r$ ima svojstvo da je od O udaljen za manje od r, a to upravo znači da zadovoljava i $|x| < r$.

Sada je jasno da iz nejednakosti $|x-A| < \varepsilon$ slijedi $-\varepsilon < x-A < \varepsilon$ odnosno $A-\varepsilon < x < A+\varepsilon$ tj. tu nejednakost zadovoljavaju apscise onih točaka koje su iz intervala $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. Prema prethodnom slijedi da ako je točka P iz ε - okoline od A, za njenu apscisu x vrijedi: $|x-A| < \varepsilon$.

Lema 2. $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

Dokaz. Dokaz za $x \leqslant |x|$. Ako je $x \geqslant 0$, tada po definiciji imamo $|x| = x$. Ako je pak $x < 0$, imamo $|x| = -x > 0 > x$. Analogno se dokazuje i slučaj $-|x| \leqslant x$.

Teorem 3. *Apsolutna vrijednost sume ne premašuje sumu apsolutnih vrijednosti pojedinih sumanada, tj.* $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

Dokaz. Ako je $x + y \geqslant 0$ tada imamo, koristeći definiciju apsolutne vrijednosti i prethodnu lemu, da je $|x+y| = x + y \leqslant |x| + |y|$.

Ako je $x+y < 0$, tada je koristeći isto kao u prethodnom slučaju $|x+y| = -(x+y) = (-x) + (-y) \leqslant |-x| + |-y| = |x| + |y|$.

Teorem 4. *Poopćuje se na slučaj konačnog broja sumanada; uostalom, on je u tekstovnom dijelu tako i iskazan, tj. vrijedi:*

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_k| \leqslant |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k|.$$

Teorem 5. *Apsolutna vrijednost razlike nije manja od razlike apsolutnih vrijednosti, tj.* $|x-y| \geqslant |x| - |y|$.

Dokaz. $|x| = |x - y + y| = |(x-y) + y| \leqslant |x-y| + |y|$, a odatle slijedi tvrdnja teorema.

Za računanje s apsolutnim vrijednostima služi još i

Teorem 6. *Apsolutna vrijednost produkta (kvocijenta) jednaka je produktu (kvocijentu) apsolutnih vrijednosti faktora (brojnika i nazivnika), tj. vrijedi:*

$$|x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k| = |x_1| \cdot |x_2| \cdot \ldots \cdot |x_k| \quad i \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|},\ y \neq 0.$$

Primjer 2.

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{|\sin x|}{|x|} \leqslant \frac{1}{|x|}.$$

Imamo dakle

$$0 \leqslant \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant \frac{1}{|x|}.$$

1.6. Kompleksni brojevi

Proširivanje brojevnih skupova koje smo vršili do sada, kao što je bilo pokazano, u uskoj je vezi s rješavanjem jednostavnih jednadžbi. Ali već vrlo jednostavna jednadžba $x^2 + 1 = 0$ odnosno $x^2 = -1$ u području realnih brojeva nema rješenja, jer je kvadrat svakog realnog broja nenegativan broj. Zato ponovo proširujemo brojevno područje, poštujući opće napomene dane prilikom dosadašnjeg proširivanja. Uvodimo jedan novi objekt, označujemo ga sa i, kojemu pridružujemo svojstvo da pomnožen samim sobom daje -1. Zahtijevamo, dakle, da je $i^2 = -1$.

Nadalje, za proizvoljne realne brojeve x i y promatramo skup kojemu su elementi objekti oblika $x + yi$. U tom skupu uvodimo operacije zbrajanja i množenja na slijedeći način.

Neka su $x_1 + y_1 i$ i $x_2 + y_2 i$ dva proizvoljna elementa tog skupa. Tada je

$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

$$(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i.$$

Taj skup sa tako definiranim operacijama zbrajanja i množenja nazivamo skupom **kompleksnih brojeva** i označavamo ga sa $\mathbf{C}$.

Ako je $y = 0$ dobivamo realne brojeve kao poseban slučaj kompleksnih. Za $x = 0$ dobiveni podskup iz $\mathbf{C}$ zovemo **imaginarnim** brojevima. Dakle, imaginarni broj je oblika yi, gdje je $y \in \mathbf{R}$, a za $y = 1$ dobiva se broj i kojega zovemo imaginarnom jedinicom.

Uobičajeno je da se kompleksan broj označava jednim slovom, najčešće sa z, tj. $z = x + yi$. Za ispis kompleksnog broja z u obliku $x + yi$ kažemo da je algebarski oblik tog broja.

Definicija 1. Pod **realnim dijelom** kompleksnog broja $z = x + yi$ podrazumijevamo broj x. Simbolički to označavamo sa $\mathrm{Re}\,(z) = x$. **Imaginarni dio** broja z je y, u oznaci $\mathrm{Im}\,(z) = y$.

Primjer 1. Ako je $z = 3 + 5i$ tada je $\mathrm{Re}\,(z) = 3$ i $\mathrm{Im}\,(z) = 5$.

Definicija 2. Kompleksan broj $x - yi$ naziva se **konjugirano** kompleksnim brojem broja $x + yi$. Konjugirano kompleksni broj od z označava se sa $\overline{z}$, tj. $\overline{z} = x - yi$.

Primjer 2. Odredi $z \cdot \overline{z}$

$$z \cdot \overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2.$$

To nam pokazuje da je produkt bilo kojeg kompleksnog broja i njegovog konjugiranog broja realan broj.

I svojstva inverznih operacija (oduzimanje i dijeljenje) trebaju također biti onakva kao kod realnih brojeva. To će biti ispunjeno ako se te operacije uvedu sa

$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} \cdot \frac{x_2 - y_2 i}{x_2 - y_2 i} = \frac{x_1 x_2 + y_1 x_2 i - x_1 y_2 i - y_1 y_2 i^2}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i. \end{aligned}$$

Primjer 3. Prikaži kompleksan broj $\dfrac{3-2i}{1+i}$ u algebarskom obliku.

$$\frac{3-2i}{1+i} = \frac{3-2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{3-2i-3i+2i^2}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i.$$

Primjer 4. Nađi realni i imaginarni dio kompleksnog broja $z = (2+i)^3$. Po formuli za kub sume imamo da je

$$(2+i)^3 = 8 + 12i + 6i^2 + i^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i.$$

Dakle $\operatorname{Re}(2+i)^3 = 2$; $\operatorname{Im}(2+i)^3 = 11$.

Napomenimo da je: $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = i$, $\ldots$, $i^{4k+r} = i^r$, gdje je $r \in \{0, 1, 2, 3\}$.

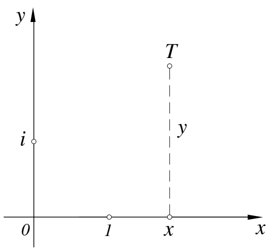
Primjer 5. Odredi realni i imaginarni dio od $\dfrac{1}{z}$, ako je $z = x + yi$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$$

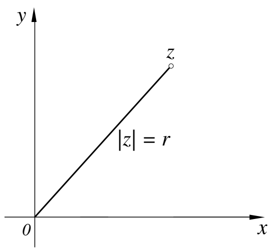
$$.\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}; \quad \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

1.6.1. Geometrijska interpretacija kompleksnog broja

Kao što je poznato, realni brojevi geometrijski se interpretiraju pomoću točaka brojevnog pravca. Kompleksni brojevi se predočuju kao točke brojevne ravnine (Gaussove ravnine). Neka je u ravnini dan pravokutni koordinatni sustav. Broju $z = x + yi$ pridružuje se točka $T(x, y)$ i obratno. Napomenimo da za $y = 0$ imamo x - os koordinatnog sustava, koju u ovom slučaju zovemo realnom osi. Za $x = 0$ imamo os y i tu se nalaze svi imaginarni brojevi yi, pa zato tu os zovemo imaginarnom osi. Na njoj je imaginarna jedinica za 1 udaljena od ishodišta u pozitivnom smjeru (vidi sl. 1.11).



Sl. 1.11.



Sl. 1.12.

Definicija 3. Apsolutnom vrijednošću ili **modulom** kompleksnog broja $z = x + yi$ zove se broj $\sqrt{x^2+y^2}$. To označavamo sa $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Treba napomenuti da je $|z|$ uvijek realan nenegativan broj, tj. $|z| \geqslant 0$; pri tom je $|z| = 0$ onda, i samo onda, kada je $z = 0$. Specijalno, ako je $y = 0$ imamo $|z| = \sqrt{x^2}$. Iz prethodne definicije odmah slijedi da $|z|$ znači udaljenost od ishodišta točke kompleksne ravnine koja pripada broju z. Često se piše $|z| = r$.

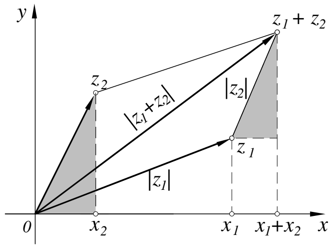
Primjer 6. Dokazati da vrijedi $z\bar{z} = |z|^2$.

$$z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

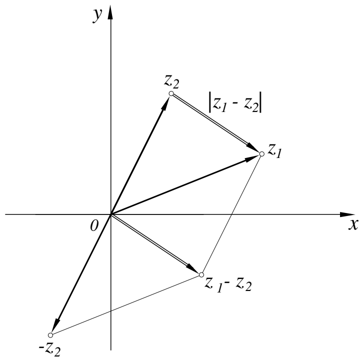
Prikažimo geometrijski zbrajanje i oduzimanje kompleksnih brojeva z_1 i z_2.

Iz sl. 1.13. koristeći svojstvo, da u trokutu suma dviju stranica nije manja od treće, dobivamo

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$



Sl. 1.13.



Sl. 1.14.

Oduzmemo li geometrijski brojeve z_1 i z_2, što je napravljeno na sl. 1.14, vidi se da je udaljenost između z_1 i z_2 jednaka broju $|z_1 - z_2|$.

Definicija 4. Dva kompleksna broja $z_1 = x_1 + y_1 i$ i $z_2 = x_2 + y_2 i$ su **jednaka** tada, i samo tada, ako je $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$.

Primjer 7. Nađite sve korijene jednadžbe $|z| - z = 1 + 2i$.

Traženi korijen označimo sa $z = x + yi$ te nakon uvrštenja u prethodnu jednadžbu dobivamo

$$\sqrt{x^2 + y^2} - x - yi = 1 + 2i.$$

Po definiciji 4. tada imamo

$$\sqrt{x^2 + y^2} - x = 1 \quad \text{i} \quad -y = 2.$$

Iz tog sustava dobivamo da je $x = \dfrac{3}{2}$ i $y = -2$, pa je korijen dane jednadžbe broj $z = \dfrac{3}{2} - 2i$.

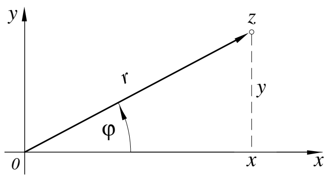
1.6.2. Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Operacije potenciranja i korjenovanja kompleksnog broja ili je vrlo komplicirano ili uopće nemoguće izvoditi ako je broj zadan u algebarskom obliku. Međutim, ako je taj isti broj zadan u tzv. trigonometrijskom obliku onda su te operacije, što ćemo kasnije vidjeti, vrlo jednostavne.

Definicija 5. **Argument** kompleksnog broja $z \neq 0$ je kut između pozitivnog dijela realne osi i dužine Oz. Pri tom, kao i obično, ako se mjerenje tog kuta φ vrši suprotno od gibanja kazaljke na satu, kut φ je pozitivan, a u smislu gibanja satne kazaljke negativan. Argument φ označavamo i sa $\varphi = \arg(z)$.

Primijetimo da za čvrsti broj $z \neq 0$ argument od z nije određen jednoznačno. Ako je φ neki argument broja z, tada su i kutovi $\varphi + 2k\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ također argumenti istog broja.

Iz $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$ može se izračunati kut φ, uz napomenu da je $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ i da se iz predznaka brojeva x i y zaključi u kojem je kvadrantu taj kut φ.



Sl. 1.15.

Primjer 8. Naći argument broja $z = 1 - i$.

Budući je $T(1, -1)$ točka 4. kvadranta, to je dosta naći argument φ kao kut tog kvadranta

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-1}{1} = -1; \quad \varphi = \frac{3\pi}{2} + \alpha, \quad \alpha \text{ je kut 1. kvadr.}$$

$$-1 = \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\Big(3\frac{\pi}{2} + \alpha\Big) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = 1 \implies \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\varphi = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$$

Iz sl. 1.15 se vidi da vrijedi

$$x = r\cos\varphi \quad \text{i} \quad y = r\sin\varphi.$$

Prema tome se broj $z = x + yi$ može prikazati u obliku

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

kojeg zovemo **trigonometrijskim oblikom** kompleksnog broja z.

Nije teško vidjeti da su dva kompleksna broja $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$; jednaka onda, i samo onda, kada je $r_1 = r_2$ i $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva danih u trigonometrijskom obliku vrši se na slijedeći način.

Teorem 7. *Kompleksni brojevi dani u trigonometrijskom obliku množe se tako da se apsolutne vrijednosti pomnože, a argumenti zbroje.*

Dokaz. Dani su brojevi $z_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)$, $k = 1, 2$. Tada je

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] \\ &= r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \end{aligned}$$

Matematičkom indukcijom lako se dokazuje da vrijedi formula

$$z_1 z_2 \ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)].$$

Prethodno također pokazuje da je

$$|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2| \quad \text{i} \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi.$$

Kao posljedicu prednjeg teorema, ako je $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$ imamo

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Ta nam formula pokazuje kako se potenciraju kompleksni brojevi dani u trigonometrijskom obliku. Za $r = 1$ dobivamo Moivreovu formulu (1737. god.) koju iskazujemo kao:

Teorem 8.

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Teorem 9. *Dva kompleksna broja zadana u trigonometrijskom obliku dijele se tako, da se apsolutne vrijednosti podijele, a argumenti oduzmu.*

Dokaz.

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_1} &= \frac{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)}{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)} = \frac{r_2}{r_1}\frac{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}\cdot\frac{\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1} \\ &= \frac{r_2}{r_1}\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_2\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\sin\varphi_1)}{\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1} \\ &= \frac{r_2}{r_1}[\cos(\varphi_2-\varphi_1) + i\sin(\varphi_2-\varphi_1)]. \end{aligned}$$

To nam također daje i

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|} \quad \text{i} \quad arg\frac{z_2}{z_1} = \arg z_2 - \arg z_1 + 2k\pi.$$

Iz prethodnog se vidi da je pomoću trigonometrijskog oblika kompleksnog broja vrlo lako vršiti množenje, dijeljenje i potenciranje.

Primjer 9. Prikažimo kompleksni broj $(1-i)^8$ u algebarskom obliku.

Najprije se za broj $z = 1 - i$ odredi modul r i argument φ. Tu je $r = \sqrt{2}$, a iz primjera 7 imamo da je argument $\varphi = \dfrac{7\pi}{4}$. Tada je

$$\begin{aligned} z^8 &= (\sqrt{2})^8\left(\cos 8\frac{7\pi}{4} + i\sin 8\frac{7\pi}{4}\right) \\ &= 2^4(\cos 14\pi + i\sin 14\pi) = 16(\cos 0 + i\sin 0) = 16. \end{aligned}$$

1.6.3. Korjenovanje kompleksnih brojeva

Zadan je kompleksan broj $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Kompleksan broj $w = \rho(\cos\Psi + i\sin\Psi)$ zove se n-ti korijen zadanog broja z, ako je $w^n = z$. U tom slučaju pišemo.

$$w = \sqrt[n]{z}.$$

Jednakost kojom smo definirali n-ti korijen poprima oblik

$$\rho^n(\cos\Psi + i\sin\Psi)^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

a po Moivreovoj formuli

$$\rho^n(\cos n\Psi + i\sin n\Psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Odatle izlazi, na osnovi pojma jednakosti kompleksnih brojeva danih u trigonometrijskom obliku, da je

$$\rho^n = r \quad \text{i} \quad n\Psi = \varphi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \quad \text{ili} \quad \rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{i} \quad \Psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

uz napomenu da je tu $\sqrt[n]{r}$ aritmetički korijen. Time je zapravo dokazan:

Teorem 10.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right]$$

gdje je $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Naime, lako se pokazuje da samo za te vrijednosti od k dobivamo različite vrijednosti korijena.

Istovremeno smo tu dokazali da jednadžba $w^n - z = 0$ ima n korijena. Iz prednjeg je vidljivo da točke, koje prikazuju sve vrijednosti $\sqrt[n]{z}$ čine vrhove pravilnog n - terokuta upisanog u kružnicu sa središtem u ishodištu i radijusom $\sqrt[n]{r}$.

Primjer 10. Izračunaj $\sqrt[3]{-1}$.
Za broj $z = -1$ imamo da je $r = 1$ i $\varphi = \pi$. Tada je

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{-1} &= \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right)\\ &= \cos\frac{(2k+1)\pi}{3} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{3}.\end{aligned}$$

Odatle dobivamo za

$$\begin{aligned}k = 0 \ \ldots z_0 &= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\\ k = 1 \ \ldots z_1 &= \cos\pi + i\sin\pi = -1,\\ k = 2 \ \ldots z_2 &= \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.\end{aligned}$$