I.

O SUVREMENOJ NASTAVI MATEMATIKE

Gdje je nastava matematike danas? Možemo li biti zadovoljni? Već smo napomenuli da se nastava matematike danas pretežno ostvaruje u stručnim okvirima. Recimo nekoliko riječi o njima i problemima koji iz toga proizlaze.

Što se tiče stručnih okvira, nastava matematike još je uvijek pretežno usmjerena na izvršavanje plana i opsežnog programa, a mnogi nastavnici matematike svoj glavni zadatak vide u tome da učenici usvoje što više propisanog gradiva.

U takvoj su nastavi matematike nerijetko više od drugih zapostavljeni upravo najsposobniji učenici. Oni u početku uče s lakoćom i veseljem, a onda, budući da nisu dovoljno i primjereno opterećeni i da mogu bez napora usvojiti ono što se od njih traži, stječu pogrešan dojam da za učenje matematike i ne treba veliki napor ili postupno gube volju za učenjem. Ako nastavnik postojano ne prati i ne potiče njihov razvoj, važan će dio njihovih matematičkih sposobnosti mirovati i neće se razvijati. Tu leži prvi problem. Zato osnovni cilj nastave matematike, koji se postavlja pred svakog učenika, ne smije biti puko usvajanje gradiva propisanog programom i stjecanje znanja koja se temelje samo na nizu pravila, formula i umijeća rješavanja jednostavnih standardnih zadataka.

S druge strane, već je davno uočeno da i zadovoljavajuća redovita nastava ne može u potpunosti zadovoljiti potrebe i interese određenog broja učenika s posebnim sklonostima i sposobnostima za dublje razumijevanje matematike, koji uz odgovarajući rad mogu kasnije dati natprosječne rezultate. Tu leži drugi problem. Zato se nameće potreba da se razvijaju i njeguju posebne aktivnosti koje omogućuju što ranije otkrivanje takvih učenika i usmjeravanje i praćenje njihova rada.

Suvremena nastava matematike tako postavlja i zahtijeva rješavanje dvaju važnih problema:

- **problem razvoja stvaralačkog mišljenja i stvaralačkih sposobnosti učenika,**
- **problem odgovarajućeg osposobljavanja nastavnika matematike.**

Suvremena metodika nastave matematike pruža razne mogućnosti za rješavanje ovih dvaju problema, posebno za rješavanje prvog problema putem uvođenja učenika u samostalan i istraživački rad te razvijanja njihovih sposobnosti za rješavanje problema.

Važne elemente rješavanja prvog problema nastavnik matematike može naći već u temeljnim idejama i smjernicama na temelju kojih izvodi nastavu, načelima nastave matematike. U osnovnoj i srednjoj školi uspostavljaju se ova načela:

načelo primjerenosti,
načelo zornosti,
načelo interesa, svjesnosti i aktivnosti,
načelo sistematičnosti i postupnosti,
načelo trajnosti znanja, vještina i navika,
načelo odgojnosti nastave,
načelo motivacije,
načelo individualizacije,
načelo problemnosti,
načelo znanstvenosti.

Zatim su tu načini organizacije nastavnog procesa, oblici nastave:

frontalni oblik nastave,
diferencirana nastava,
heuristička nastava,
problemska nastava,
programirana nastava,
egzemplarna nastava,
demonstracijska nastava,
mentorska nastava i dr.

Konačno, bitni su i načini prenošenja znanja, nastavne metode:

metoda usmenog izlaganja,

metoda razgovora ili dijaloga,

heuristička metoda,

metoda rada na tekstu,

problemska metoda,

programirana metoda,

metoda demonstracije i dr.

Međutim, i pored svih načela, oblika rada i nastavnih metoda, a tomu treba pribrojiti i dobre udžbenike, kvaliteta nastave najviše ovisi o samom nastavniku. Nema kreativne nastave matematike bez kreativnog nastavnika matematike. Prvi preduvjet za kreativnost nastavnika jest njegova dobra osposobljenost, a to znači rješavanje drugog problema. Evo nekih osobina kreativnog nastavnika:

sposobnost pobuđivanja interesa za matematiku i aktivnost učenika,

sposobnost stvaranja problemskih situacija,

pravilan izbor oblika rada i nastavnih metoda,

pravilan izbor primjera i zadataka,

originalnost ideja i rješenja,

umijeće pojednostavnjenja složenih problema,

umijeće poopćavanja problema,

nenametljivo vođenje dijaloga i usmjeravanje,

otvorenost prema novim idejama,

dobro poznavanje matematičke literature,

komunikativnost,

strpljivost,

upornost,

maštovitost.

Osim redovne nastave postoje i druge mogućnosti s kojima kreativan nastavnik matematike može razvijati stvaralačko mišljenje i matematičke sposobnosti svojih učenika. To su:

dodatna nastava,

izborna nastava,

fakultativna nastava,
matematičke grupe,
seminari,
matematički časopisi,
matematička literatura,
matematička natjecanja i dr.

Posebno su važna matematička natjecanja, jer se na njima učenicima ispunjava prirodna želja da provjere svoje matematičke sposobnosti.

Kreativan nastavnik u kreativnoj nastavi ima velike izglede da kod svojih učenika razvije kreativne osobine. Evo nekih osobina kreativnog učenika:

radoznalost uma,
brzo izvođenje računskih operacija,
lako izvođenje složenijih računskih operacija,
lako razumijevanje problema,
sposobnost provođenja duboke analize,
otkrivanje različitih načina rješavanja problema,
stvaranje i iznošenje novih ideja,
sposobnost uočavanja i postavljanja problema,
ustrajnost u radu,
samostalnost,
maštovitost,
dosjetljivost,
umijeće uspoređivanja dobivenih rezultata,
sposobnost uspostavljanja analogija,
sposobnost poopćavanja,
sposobnost apstrahiranja,
umijeće izvođenja pravilnog logičkog rasuđivanja.

Za suvremenu nastavu matematike važna je još i njezina povezanost s matematikom kao znanošću. Već načelo znanstvenosti i načelo problemnosti ukazuju na određenu vezu. Tješnja veza uspostavlja se primjenom znanstvenih metoda u nastavi matematike.

Tako spoznajemo da se jedna mogućnost rješavanja prvog problema suvremene nastave matematike kreće u znanstvenim okvirima.

Recimo na početku nekoliko riječi o navedenoj vezi.

U procesu spoznaje i upoznavanja zakona prirode istraživači primjenjuju posebna sredstva – znanstvene metode istraživanja. Kod utvrđivanja metoda svake znanosti treba imati na umu da postoje zajednička i posebna obilježja istraživanja u pojedinim znanostima.

Opće metode suvremene znanosti jesu: eksperimentalna metoda, metoda promatranja, aksiomatska metoda, metoda modeliranja i statistička metoda.

Osnovne metode dolaze u parovima. Iznimka je **analogija**. To su:

ANALIZA i **SINTEZA**,

ANALOGIJA,

APSTRAKCIJA i **KONKRETIZACIJA**,

INDUKCIJA i **DEDUKCIJA**,

GENERALIZACIJA i **SPECIJALIZACIJA**.

Sve navedene metode svojstvene su svim znanostima, pa tako i matematici. Te su metode važno sredstvo matematičara-znanstvenika u procesu dobivanja novih tvrdnji, njihova dokazivanja i dovođenja u vezu s već poznatim činjenicama i teorijama.

Rad nastavnika matematike s učenicima u razredu u mnogočemu se razlikuje od rada matematičara-znanstvenika, ali postoje i neke zajedničke značajke. Učenici u nastavnom procesu samostalno ili uz pomoć nastavnika matematike također otkrivaju i spoznaju nove matematičke istine. Do tih spoznaja može se doći na različite načine. Međutim, cilj nastave matematike treba biti upoznavanje učenika sa svim stranama matematičke djelatnosti, naravno primjereno njihovim matematičkim sposobnostima i predznanju. Posebno je važno otkrivanje puta k samostalnom stvaralačkom radu učenika. Zato su navedene znanstvene metode važne i za suvremenu nastavu matematike i zato su one predmet izučavanja u suvremenoj metodici nastave matematike. Kreativan nastavnik, birajući pogodne probleme i primjenjujući te metode, može učenike osposobiti za rad koji je vrlo blizak istraživačkom radu. Mnogo je nastavnih matematičkih sadržaja za takvu primjenu.

Kako je u tom pogledu u našoj nastavnoj praksi? Tijekom nastavnog sata nastavnik matematike često govori: “analiza pokazuje”, “pogledajmo nekoliko konkretnih primjera”, “analogno se dokazuje”, “ovaj niz činjenica inducira zaključak", "rezultat ovih razmatranja je generalizacija", "specijalizacijom dobivamo formulu", "matematički pojmovi su apstraktni" i sl. Razumiju li učenici ove riječi? Kako se provjerava da oni to razumiju? Znanje o navedenim postupcima najčešće se podrazumijeva, pa objašnjenja izostaju. To nije dobro.

Učenike treba postupno i primjereno naučiti **analizirati**, **sintetizirati**, **generalizirati**, **specijalizirati**, **apstrahirati**, **konkretizirati**, **inducirati**, **deducirati**, **uočavati analogije**, bez obzira na to hoće li se oni kasnije ozbiljnije baviti matematikom ili ne. Za razliku od običnog usvajanja gradiva, ovo je viša razina matematičkog obrazovanja. Matematički način mišljenja dragocjena je stečevina matematičkog obrazovanja, primjenjiva i u mnogim drugim djelatnostima. Naglasak je na riječima "postupno" i "primjereno". Ako se znanstveni postupci primjereno i pravilno primjenjuju, s nužnim osjećajem za težinu matematičkih sadržaja i matematičkog načina mišljenja, uvažavajući matematičke sposobnosti svakog pojedinog učenika, može se očekivati da će nastava matematike biti uspješna. U protivnom, učenici će imati znatnih poteškoća pri svladavanju nastavnog gradiva i oni s vremenom mogu steći pogrešan dojam da je matematika teži predmet nego što to ona uistinu jest. Nažalost, često se u udžbenicima matematike, a onda kao posljedica i u nastavnom procesu, ne poklanja dovoljno pozornosti pravilnosti primjene znanstvenih postupaka. Za obrade nekih matematičkih sadržaja može se čak ustanoviti da su s tog gledišta pogrešne.

Neuspjesi učenika u matematici i neznanje koje pokazuju nakon završenog školovanja dobrim su dijelom posljedica činjenice da se nastava većinom izvodi na nižoj razini, gdje se suviše inzistira samo na usvajanju gradiva, a zapostavljena je navedena viša razina. Razlog zapostavljenosti leži i u činjenici da su za višu razinu nastave matematike potrebne zahtjevnije nastavne metode zasnovane na heurističkoj i problemskoj nastavi.

S druge strane, potreba (pravilne) uporabe znanstvenih metoda u nastavi matematike može se obrazložiti sljedećim činjenicama:

Matematika u nastajanju konkretna je i induktivna znanost, a sama matematika je apstraktna i deduktivna znanost. Ta činjenica govori sve o tome koliko su i za nastavu matematike važne znanstvene metode istraživanja, posebno u ovom slučaju četiri: **konkretizacija**, **indukcija**, **apstrakcija** i **dedukcija**.

Kako je s nastavom matematike u tom pogledu?

Nastava matematike u osnovnoj školi također je pretežno *konkretna* i *induktivna*. Učitelj matematike dolazi do apstraktnih postavki, do generalizacija, razmatranjem konkretnih objekata i konkretnih primjera i induktivnim zaključivanjem. Taj je način blizak i primjeren učenicima toga uzrasta. Induktivni postupak sastoji se od niza induktivnih koraka kojima se dolazi do shvaćanja općeg. Počinje se s konkretnim objektima i specijalnim slučajevima, induktivni zaključci nižu se analogijom, a promatrane činjenice nastoje se generalizirati. Uočavamo tijesnu povezanost **indukcije** s **konkretizacijom**, **specijalizacijom**, **analogijom** i **generalizacijom**. Prednosti primjene indukcije: ostvarenje načela od lakšeg ka težem, od jednostavnog ka složenom, proučavanje novih apstraktnih pojmova i izreka preko promatranja i provjeravanja, navođenje učenika na nove pojmove, iskazivanje novih tvrdnji i dr. Mnogo je sadržaja u školskoj matematici za čiju je obradu potreban i za razvoj učenikova mišljenja važan induktivni postupak. Među takve sadržaje posebno se ubrajaju razna pravila, zakoni, formule i teoremi, pogotovo ako se oni strogo ne izvode ili ne dokazuju.

Obrnuti postupak od indukcije jest dedukcija. Deduktivni način mišljenja i dokazivanja provodi se poslije indukcije i na višoj razini nastave matematike i matematičkog obrazovanja učenika.

Ovaj uvodni odjeljak završit ćemo ovom napomenom:

Nastavnik matematike ne mora biti znanstvenik da bi u nastavi pravilno i primjereno primjenjivao načelo znanstvenosti i znanstvene metode.

To se u nastavi matematike nameće samo po sebi. Rješavanje svakog problema ima nešto otkrivalačko i stvaralačko. Zato je potrebno samo da nastavnik u svojim učenicima razvija radoznalost duha, sklonost za samostalan umni rad i da im ukazuje na putove do novih otkrića.

Prema američkom matematičaru i metodičaru Polyi osnovne značajke znanstvene metode jesu: **naslućivanje**, **ispitivanje**, **provjeravanje**.

II.

NAČELO ZNANSTVENOSTI

Sva su načela nastave matematike podjednako važna, jer izražavaju bitna polazišta nastave matematike. Zato se trebaju u nastavi matematike podjednako uvažavati i primjenjivati. Ona se usko povezana. Nije rijedak slučaj da se ostvarivanjem jednog načela ostvaruje i neko drugo načelo. Osnovna značajka svakog načela sadržana je već u samom nazivu načela i ona su nastavnicima matematike uglavnom jasna. Jedno načelo ipak često izaziva nedoumicu: *načelo znanstvenosti*. Što znači znanstvenost nastave matematike?

Načelo znanstvenosti nastave matematike sastoji se od nužnog sklada nastavnih sadržaja i nastavnih metoda s jedne strane i zahtjeva i zakonitosti matematike kao znanosti s druge strane. To znači da nastavnik matematike treba učenike upoznavati s onim činjenicama i u njihovu mišljenju formirati one matematičke pojmove koji su danas znanstveno potvrđeni. Nastava matematike mora biti takva da omogućuje daljnja produbljivanja i proširivanja gradiva i prirodan nastavak matematičkog obrazovanja na višoj razini.

Iz ovog opisa vidimo da načelo znanstvenosti uspostavlja vezu između matematike kao nastavnog predmeta i matematike kao znanosti.

Pogledajmo vezu glavnih oblika mišljenja i načela znanstvenosti.

1. Matematički pojmovi

Pojam je oblik mišljenja u kojem se odražavaju bitna svojstva objekata koji se proučavaju.

Proces formiranja nekoga pojma postupan je proces. Možemo ga u grubim crtama opisati ovako: Početni i najjednostavniji stupanj spoznavanja pojma jest promatranje i upoznavanje konkretnih objekata i njihovih konkretnih svojstava povezanih s pojmom, te osjetilna spoznaja – zapažanje. Drugi stupanj je uočavanje nečeg općeg i zajedničkog elementima u promatranom skupu objekata – predodžba o pojmu. Treći je stupanj izdvajanje bitnog općeg svojstva takvih objekata – formiranje i usvajanje pojma.

Prema tome, pri obradi matematičkih pojmova nastavnik ostvaruje načelo znanstvenosti ako pravilno provodi proces formiranja pojma (opažanje, predodžba o pojmu, formiranje pojma) i pridržava se osnovnih pravila koja mora zadovoljavati definicija pojma (primjerenost, minimalnost sadržaja, sažetost, prirodnost, prikladnost, primjenjivost, suvremenost).

Uspješnost procesa osigurava pet značajnih znanstvenih postupaka: **analiza**, **sinteza**, **konkretizacija**, **apstrakcija** i **generalizacija**.

Kritično mjesto obrade nekog pojma jest prijelaz na onaj stupanj u kojem počinje postupak apstrahiranja, jer je prijelaz s konkretnog na apstraktno za neke učenike dosta težak.

Jedna od značajki pojma kao oblika mišljenja jest to što je formiranje pojma u spoznaji čovjeka neodvojivo od njegova izražavanja riječima, zapisom ili simbolom. Ova značajka posebno dolazi do izražaja u matematici. Pitanje jezika u nastavi matematike vrlo je osjetljivo. I u ovom području može doći do nejasnoća i povrede načela znanstvenosti. Vidjet ćemo to u nekoliko primjera.

1) Na prvi pogled može se učiniti da je zahtjev minimalnosti sadržaja u definiciji suviše strog, pa čak i onda kad ga se u nastavi može lako ispuniti. To nije tako. Zahtjev ima svoje metodičko opravdanje. Definicije s mnogo suvišnog opterećuju s jedne strane pamćenje učenika, a s druge strane unose zbrku pri razlikovanju definicija i poučaka. To nije u skladu s načelom znanstvenosti i sa sljedećim pravilom definiranja: definicija mora biti primjerena definiranom pojmu, ni preuska, ni preširoka, mora razotkrivati bit pojma. Za ilustraciju navodimo nekorektnu definiciju paralelograma iz jednog udžbenika čiju će bit teško razumjeti svi učenici šestog razreda:

Paralelogram je četverokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne i sukladne, nasuprotni kutovi sukladni, a kutovi uz istu stranicu suplementni.

Nije dobra ni nešto sažetija, ali još uvijek preširoka, definicija iz jednog drugog udžbenika:

Paralelogram je četverokut koji ima dva para međusobno paralelnih stranica jednakih duljina.

2) Simetrala dužine je skup svih onih točaka ravnine što su jednako udaljene od krajnjih točaka dužine.

Ova je rečenica s jezične strane jasna. S matematičke točke gledišta ona izaziva nedoumicu. Ona može biti ispravna definicija simetrale dužine! Ali u nastavi matematike uporabljuje se uobičajena definicija simetrale dužine kao pravca koji prolazi polovištem dužine i na nju je okomit. Znači, navedena rečenica nije definicija simetrale dužine! Eto primjera koji može zbuniti učenika. Na to treba pripaziti nastavnik matematike.

3) Prema jednom ranijem programu učenici trećeg razreda osnovne škole učili su jednu, a učenici četvrtog razreda drugu od ovih dviju postavki:

Pravci koji zatvaraju pravi kut nazivaju se *okomiti pravci*.

Kut čiji su kraci međusobno okomiti naziva se *pravi kut*.

Ovo je primjer cirkularne definicije: okomiti pravci definiraju se pomoću pravog kuta, a pravi kut pomoću okomitih pravaca. Zapravo se ne zna što je definirano! Malo blaže tumačenje kaže da je prva formulacija dobra definicija okomitih pravaca, dok definicija pravog kuta nije dobra pa se pojam pravog kuta mora uvesti drugačije, pomoću jednakosti sukuta.

4) S iracionalnim brojevima učenici se susreću u algebri pri vađenju drugog korijena i u geometriji pri određivanju duljina dužina. Ali kako se definiraju iracionalni brojevi? Jedna mogućnost:

Realni brojevi koji nisu racionalni nazivaju se *iracionalni brojevi*.

Slabosti su ove definicije prilično očigledne. To je primjer negativne definicije. Ona kaže što iracionalni brojevi nisu, a ne što oni jesu. Negativne definicije se ne isključuju, ali one moraju biti u skladu s pravilom: definicija ne smije biti negativna ako može biti pozitivna.

U našem slučaju definicija može biti pozitivna:

Brojevi koji se mogu zapisati u obliku beskonačnog neperiodičnog decimalnog broja nazivaju se *iracionalni brojevi*.

Čitatelj će lako prepoznati građu sljedećih primjera iracionalnih brojeva u navedenom obliku:

$$0.123456789101112131415\ldots,$$
$$1.101001000100001000001\ldots.$$

Poželjno je da i učenici nauče napisati nekoliko iracionalnih brojeva u skladu s definicijom.

5) Još se mogu naći knjige elementarne matematike u kojima se polinomima nazivaju izrazi oblika $a + \frac{b}{x} - yz + 5b$, $\frac{u}{v} + mn - \frac{p}{q} + abcd - 100$, $abc - \sqrt{x+y} + z - d^2$, $\frac{1}{m^3} + \frac{1}{n^3} - p^4 - p^3 - p^2 + 1$ i sl.

Danas se pod pojmom polinoma P podrazumijeva funkcija $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, n prirodan broj, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ realni brojevi, $a_n \neq 0$.

6) Propusti u nastavi matematike koji se događaju u području definiranja matematičkih pojmova nisu bezazleni. Oni imaju za posljedicu slabosti nastave koje značajno i loše utječu na ostvarenje ciljeva suvremene nastave matematike koja težište postavlja na uvođenje učenika u samostalan i istraživački rad, razvijanje sposobnosti za rješavanje problema, te na razvoj njihova mišljenja. Na kraju se onda loše odražava na kakvoću matematičkog obrazovanja učenika.

Nažalost, dokaz za ovakvo mišljenje vrlo je uvjerljiv i otkrio sam ga u vrijeme kad sam još bio aktivni profesor metodike. Evo kratkog opisa.

Početak metodičkog obrazovanja studenata treće godine studija jest prva metodička radionica pod nazivom MATEMATIČKI POJMOVI I. Ta se tema na predavanjima obrađuje mnogo kasnije, ali je izabrana kao početak zato da se provjeri **razina predznanja** studenata o tako važnom matematičkom sadržaju. Matematički pojmovi koje studenti trebaju definirati u ovoj metodičkoj radionici jesu:

elipsa, *homotetija*, *kompleksni broj*, *konveksan skup*, *korjenovanje*, *kvadratna jednadžba*, *logaritamska funkcija*, *nultočka polinoma*, *ortocentar trokuta*, *obrnuto proporcionalne veličine*, *polinom*, *postotak*, *pravi kut*, *površina*, *relacija*, *sfera*, *sličnost*, *translacija*, *vektor*, *visina pravokutnika*.

Rezultati su onakvi kakve je profesor metodike i mogao očekivati: **vrlo slabi** (ispravne definicije: oko 4%). Pokazuje se da je znanje studenata o matematičkim pojmovima dosta zbrkano. U njihovim radovima rijetko se može pročitati neka korektna definicija. Ne znajući u tom trenutku načela definiranja matematičkih pojmova, studenti u definiciju nekog pojma unose sve što o pojmu znaju (primjere, svojstva). Tako se umjesto kratke, precizne i potpune definicije pojma dobiva opširan tekst iz kojeg se na kraju ipak ne može doznati o čemu je riječ! Ovakva zbrka, a može se slobodno reći i **neznanje**, ne bi mogla biti sredstvo uspješne nastave. Rezultati ukazuju na potrebu ozbiljnog pristupa ovoj temi.

Kasnije, u poglavlju o oblicima mišljenja tema se metodički detaljno obrađuje, a nakon toga slijedi metodička radionica MATEMATIČKI POJMOVI II. Pojmovi školske matematike koje su u njoj studenti trebali definirati jesu:

centralna simetrija, *funkcija*, *hiperbola*, *izometrija*, *kut*, *kvadar*, *linearna jednadžba*, *logaritam*, *mimoilazni pravci*, *okomite ravnine*, *piramida*, *proporcionalne veličine*, *pravokutnik*, *rješenje sustava linearnih jednadžbi*, *simetrala dužine*, *tetiva kružnice*, *trapez*, *valjak*, *volumen*, *zatvoreni interval*.

Gotovo je suvišno kazati da su sada rezultati bolji, iako to još uvijek nije onakvo znanje kakvo treba biti (ispravne definicije: 40%). Neke se praznine u znanju malo teže popunjavaju, a da bi nastavu matematike sami uspješno izvodili, studenti moraju potpuno vladati materijom.

Zanimljivo je pogledati kakvi su se sve "biseri" definicija mogli pronaći u pismenim radovima u navedenim metodičkim radionicama. Pa pogledajmo!

Homotetija je preslikavanje s određenim svojstvima.

Kvadar je pravokutnik kojemu su sve stranice jednake duljine.

Afina funkcija zove se *linearna jednadžba*.

Polinom prvog stupnja naziva se *linearna jednadžba*.

Za dva pravca u prostoru kažemo da su *mimoilazni* ako se ne sijeku i ne podudaraju.

Pravci u prostoru koji nemaju nijednu zajedničku točku nazivaju se *mimoilazni pravci*.

Dvije ravnine zovemo *okomitim* ako su svaka dva pravca te ravnine međusobno okomita.

Ako je ravnina okomita na bilo koji pravac u drugoj ravnini, onda su te dvije *ravnine okomite*.

Tijelo omeđeno jednim poligonom i trokutima naziva se *piramida*.

Konveksni skup koji se sastoji od poligona i točke naziva se *piramida*.

Polinom je matematički izraz s više od dva člana.

Pravi kut je kut između okomitih pravaca, a *okomiti pravci* su pravci koji zatvaraju pravi kut.

Sfera je tijelo kojemu su sve točke jednako udaljene od ishodišta.

Sfera je dio prostora unutar kugle.

Sferu dobivamo presiječemo li kuglu ravninom.

Piramida kojoj je baza kružnica naziva se *stožac*.

Pravac kojemu su dvije različite točke na kružnici naziva se *tetiva*.

Translacija je preslikavanje koje jednu dužinu translatira paralelno s njom.

Valjak je prizma čija je osnovica krug.

Pravilna uspravna prizma kojoj je baza kružnica naziva se *valjak*.

Vektor je usmjerena dužina.

Vektor je usmjereni pravac ograničen s jednog kraja.

Ovo su samo one kraće neispravne definicije. Nije mali popis ni neispravnih definicija koje su pravi "romani"!

2. Dogovorne definicije

Ponekad se načelo znanstvenosti ostvaruje i u dogovoru o značenju nekog pojma, veličine ili objekta i objašnjenju razloga zašto se taj dogovor uvodi.

1) Broj 1. Je li 1 prost broj ili nije? Broj 1 formalno zadovoljava definiciju prostog broja: on je djeljiv samo s 1 i sa samim sobom. Međutim, broj 1 ipak se ne uključuje u skup prostih brojeva. Jedan od razloga dogovora da 1 nije prost broj nalazimo u osnovnom teoremu aritmetike po kojem se svaki prirodni broj različit od 1 može na jedinstven način napisati u obliku umnoška prostih faktora. Kad bismo uzeli da je 1 prost broj, taj teorem, bez dodatnih uvjeta, ne bi vrijedio. U tom slučaju imali bismo, na primjer, za broj 2009 ove rastave na proste faktore:

$$2009 = 7 \cdot 7 \cdot 41 = 1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 41 = 1 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 41 \text{ itd.}$$

Dakle, rastav ne bi bio jedinstven. Tako bi bilo za svaki prirodni broj.

2) Prazan skup $\emptyset$. Prazan skup je skup koji ne sadrži nijedan element. Ovo značenje praznog skupa ne bi imalo mnogo smisla kad ne bi za to postojao ozbiljan znanstveni razlog. Njega nalazimo u operaciji presjeka skupova. Zahtjev da presjek $A \cap B$ bilo kojih dvaju skupova A i B bude skup, a to znači i presjek disjunktnih skupova, vodi do potrebe uvođenja pojma prazan skup.

3) $a^0 = 1 \ (a \neq 0)$. U jednom udžbeniku stoji: Možemo dokazati da je $a^0 = 1$. Formulacija ukazuje na zaključak da je riječ o tvrdnji, o poučku. U školskoj matematici ova se jednakost često uvodi bez objašnjenja, ili čak s pogrešnim objašnjenjem, kao gore navedeno. A objašnjenje je jednostavno.

Najprije se dokazuje pravilo za dijeljenje potencija jednakih baza:

Za prirodne brojeve m i $n, m > n$ vrijedi jednakost $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Zatim se pravilo proširuje za slučaj $m = n$. Međutim, za $m = n$ lijeva strana jednakosti očito je jednaka 1, a desna a^0. Da bi pravilo vrijedilo i u tom slučaju, dogovorno se stavlja da je $a^0 = 1$. Dakle, $a^0 = 1$ je dogovorna definicija, a ne tvrdnja koja se može dokazati.

4) $\binom{n}{0} = 1$. Formula za izračunavanje binomnih koeficijenata $\binom{n}{k}$ ima oblik:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}.$$

Formula je valjana za $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Za $k = 0$ ne može se primijeniti. Međutim, radi potpunosti određivanja elemenata n-te osnovice, dogovorno stavljamo da je $\binom{n}{0} = 1$.

3. Poučci

Što je poučak, znamo. *Poučak* je matematička tvrdnja čija se istinitost utvrđuje dokazom. Poučak je jedan od najvažnijih matematičkih pojmova i njegova obrada zahtijeva posebnu pozornost svakog nastavnika matematike. Pravilna obrada toga pojma omogućuje brži razvoj matematičkog mišljenja učenika i bolje razumijevanje same matematike.

Pri obradi poučaka nastavnik ostvaruje načelo znanstvenosti ako svoje učenike nauči ispravno i precizno formulirati poučak, jasno razlikovati pretpostavku od tvrdnje poučka, formulirati obrat poučka, formulirati suprotnu tvrdnju, te ako postigne razumijevanje metodike dokazivanja poučaka.

Velike poteškoće stvaraju učenicima indirektni dokazi poučaka, posebno oblici *dokaz po kontrapoziciji* i *svođenja na kontradikciju (reductio ad absurdum)*.

Ovdje se neizbježno nameće pitanje: treba li dokaze upoznavati i shvaćati i onaj učenik koji se kasnije u svakodnevnom životu neće baviti matematikom, ili za njegovu životnu djelatnost matematika neće biti od neke posebne važnosti? Odgovor se lako može naslutiti iz sljedeće nepobitne istine: *učiti dokazivati znači učiti rasuđivati*, a to je jedan od osnovnih zadataka nastave matematike. Rasuđivati u životu treba svaki čovjek. Kako inače usporediti različite tvrdnje, izdvojiti iz više izjava one koje su istinite, provjeriti valjanost nekog sumnjivog dokaza, opovrgnuti nečije mišljenje, donijeti ispravan zaključak o nečemu i sl.? Da, učiti dokazivati treba svaki učenik. Zato obrazovanje učenika nije potpuno ako on tijekom školovanja nije upoznao i shvatio dokaze nekoliko standardnih matematičkih poučaka.

Poučavanje dokazivanja poučaka za nastavnika je matematike velik izazov, jer to očito nije ni jednostavno ni lagano, posebice stoga što on pritom mora imati na umu važnu činjenicu:

Iako je matematika deduktivna znanost, školska matematika ne izgrađuje se ni na jednoj razini nastave kao strog deduktivni sustav, već ostaje u okvirima modela. Ovo pogotovo vrijedi za nastavu matematike u osnovnoj školi, jer je ona većim dijelom induktivna. Mnogi poučci obrađuju se u njoj bez dokaza.

Kritično mjesto izvođenja **generalizacija** preko **induktivnih** nizova **konkretnih** slučajeva jest prijelaz na onaj stupanj u kojem počinje postupak **apstrahiranja**, jer je prijelaz s konkretnog na apstraktno za neke učenike i ovdje dosta težak.

1) I u slučaju poučaka važna je uporaba riječi, zapisa ili simbola. Skladno povezivanje prvog, drugog i trećeg možemo očitati u sljedećem aksiomu površine p poligona:

Ako su poligoni P_1 i P_2 sukladni, onda su brojevi $p(P_1)$ i $p(P_2)$ jednaki, tj. vrijedi implikacija:

$$P_1 \cong P_2 \implies p(P_1) = p(P_2).$$

2) Kao primjer nerazumijevanja dokaza poučka uzmimo A-G nejednakost. Izreka:

Ako su a i b pozitivni realni brojevi, onda aritmetičku sredinu $\dfrac{a+b}{2}$ i geometrijsku sredinu $\sqrt{ab}$ tih brojeva povezuje nejednakost $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

Da bismo dokazali ovu nejednakost, polazimo od nje i iz nje izvodimo redom nejednakosti $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$, $a+b-2\sqrt{ab} \geqslant 0$, $(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} \geqslant 0$, $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$.

Ovo se ponekad uzima kao dokaz. A to nije dokaz. Ovo je samo analiza kojom smo otkrili tek početni korak dokaza, očiglednu nejednakost $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$. Sam dokaz provodi se sintezom i izgleda ovako:

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0 \implies (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \implies a+b-2\sqrt{ab} \geqslant 0$$
$$\implies a+b \geqslant 2\sqrt{ab} \implies \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

4. Definicije i poučci

Učenici ponekad ne razlikuju definicije pojmova i poučke. To se vidljivo očituje u njihovim čestim pokušajima da i definicije dokažu.

1) Ranije navedenu nekorektnu definiciju paralelograma možemo razložiti na sljedeće četiri rečenice:

Paralelogram je četverokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne.

Paralelogram je četverokut kojemu su nasuprotne stranice sukladne.

Paralelogram je četverokut kojemu su nasuprotni kutovi sukladni.

Paralelogram je četverokut kojemu su kutovi uz istu stranicu suplementni.

Za učenike sve su ove rečenice vrlo slične i nije čudo ako ih oni u prvi trenutak i slično razmatraju i prihvaćaju.

Međutim, prva je rečenica uobičajena definicija paralelograma, pa se ne dokazuje, a druge rečenice su tada poučci i oni se trebaju dokazati. Ova definicija je prirodna i prikladna jer je svojstvo na osnovi kojega je izvedena paralelnost stranica, u skladu s uvedenim terminom, paralelogram.

Moguće je i da se neka druga od gornjih rečenica uzme za definiciju paralelograma, doduše manje prikladnu zbog nesklada s terminom paralelogram. Tada se ona ne dokazuje, a ostale su rečenice u tom slučaju poučci i oni se trebaju dokazati.

Navedenim rečenicama može se dodati još jedna koja je njima u opisanom smislu ekvivalentna:

Paralelogram je četverokut kojemu se dijagonale raspolavljaju.

Svojstvo paralelograma koje se u njoj nalazi manje je očigledno, ali i ono u potpunosti karakterizira tu vrstu četverokuta.

Nastavnik matematike može primjerenim formulacijama poboljšati razumijevanje opisanih razlika. U slučaju prirodne definicije paralelograma to izgleda ovako:

Definicija:

Četverokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne naziva se *paralelogram*.

Da je riječ o definiciji naznačuju riječi “naziva se”, a koji se pojam definicijom uvodi ukazuje kurzivom, nakošenim pismom ispisana riječ paralelogram.

Poučci:

Nasuprotne stranice paralelograma imaju jednake duljine.

Nasuprotni kutovi paralelograma su jednaki.

Susjedni kutovi paralelograma su suplementni.

Dijagonale paralelograma se raspolavljaju.

Jasnim razlikovanjem definicija i poučaka ostvaruje se također načelo znanstvenosti.

5. Pravila

Važni dijelovi nastavnog gradiva različita su pravila za brojeve koja učenici trebaju pamtiti i primjenjivati. Njihova obrada često nije primjerena i u skladu s načelom znanstvenosti.

1) Uzmimo kao primjer pravilo $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ za drugi korijen iz umnoška dvaju pozitivnih brojeva a, b i zadatak da se izračuna vrijednost korijena $\sqrt{256 \cdot 484 \cdot 729}$. Ako je razmatrano samo pravilo za dva broja, svi učenici nisu spremni za rješavanje zadatka primjenom pravila. Nastavnik je obradu skratio za jedan važan korak, što kod učenika može poremetiti misaoni proces. Zato je potreban taj korak, a to znači pravilo iz metodičkih razloga i u skladu s načelom znanstvenosti najprije analogijom proširiti za više od dva broja, pa tek onda prijeći na primjenu. Analogijom se pravilo proširuje za tri i četiri broja ovako:

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c},$$
$$\sqrt{abcd} = \sqrt{(abc)d} = \sqrt{abc} \cdot \sqrt{d} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt{d}.$$

Na temelju prvog proširenja svi bi učenici bez teškoća trebali riješiti postavljeni zadatak: $\sqrt{256 \cdot 484 \cdot 729} = \sqrt{256} \cdot \sqrt{484} \cdot \sqrt{729} = 16 \cdot 22 \cdot 27 = 9504$.

Nakon otkrića proširenja učenici su spremni i za dublje promišljanje. Ono se sastoji u naslućivanju i formulaciji jedne opće tvrdnje. Hoće li to i učiniti, ovisi o razini nastave. U osnovnoj školi možemo se zadovoljiti samo proširenjima, dok je u srednjoj školi poželjan i taj istraživački korak. Opća izreka:

Neka je n prirodni broj veći od 1 *i* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *pozitivni realni brojevi. Tada vrijedi jednakost:*

$$\sqrt{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt{a_n}.$$

U nastavi se ova jednakost može izreći i bez uporabe oznaka:

Kvadratni korijen iz umnoška pozitivnih brojeva jednak je umnošku kvadratnih korijena iz pojedinih faktora.

Ovaj primjer pokazuje kako se primjenom načela znanstvenosti skladno povezuju i dopunjuju tri znanstvene metode: **indukcija**, **analogija** i **generalizacija**.

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$, $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$ primjeri su pravila koja se ne mogu proširiti na više od dva broja. To je obično slučaj kad se u pravilu pojavljuje operacija dijeljenja.

6. Zadatci

Suvremena nastava matematike načelno pretpostavlja drugačiju spoznajnu djelatnost učenika od tradicionalne. Težište se postavlja na razvijanju umijeća samostalnog i stvaralačkog proučavanja matematike od strane učenika, te stvaranju preduvjeta za uspješnu primjenu stečenih matematičkih znanja i umijeća. Samostalna spoznajna djelatnost učenika pri proučavanju matematike ostvaruje se u velikoj mjeri primjerenim izborom i korištenjem nastavnih zadataka. Na taj način zadatci učenicima postaju važno sredstvo pri oblikovanju sustava osnovnih matematičkih znanja, umijeća i navika, te doprinose razvoju njihovih matematičkih sposobnosti i stvaralačkog mišljenja.

Zadatak je složen matematički objekt i njegov sastav nije uvijek jednostavno analizirati. Međutim, prirodno se u širem smislu izdvaja pet njegovih osnovnih sastavnica: *uvjeti*, *cilj*, *teorijska osnova*, *rješavanje*, *osvrt*.

Za našu temu od posebne je važnosti posljednja sastavnica zadatka. Ona pruža mogućnosti ispitivanja novih ideja i daljnjih usmjeravanja mišljenja učenika. Određeno usmjeravanje dade se najbrže postići nekim od ovih pitanja:

Može li se način rješavanja zadatka pojednostavniti?

Može li se zadatak riješiti na neki drugi način?

Jesmo li opisani postupak rješavanja već koristili kod nekog drugog zadatka?

Može li se zadatak pojednostavniti?

Može li se zadatak poopćiti?

Možete li sastaviti neki sličan zadatak?

Kako glasi obrnuta tvrdnja?

Vrijedi li obrnuta tvrdnja?

Pitanja očito upućuju na **analizu**, **sintezu**, **analogiju**, **specijalizaciju** i **generalizaciju**. Traženjem odgovora na ta pitanja ponovno se razvijaju i njeguju određene matematičke sposobnosti učenika i njihova kreativnost podiže na višu razinu.

Primjer matematičkih sadržaja gdje je **analiza** važna jesu *školski tekstualni zadatci*. Zašto takvi zadatci ipak često zadaju dosta teškoća i učenicima i nastavnicima, pa ih neki nastavnici izbjegavaju? Objašnjenje dobrim dijelom leži u naravi samih zadataka. Svaki takav zadatak sastoji se zapravo od dvaju zadataka:

1) sastavljanja jednadžbi prevođenjem s običnog jezika na matematički jezik (postupak je poznat pod nazivom Descartesova metoda!),

2) rješavanja jednadžbi.

Prvi od njih nije uvijek lagan, zahtijeva priličan umni napor i poznavanje postupka raščlanjivanja, **analize**, što se nerijetko pretpostavlja da učenici znaju i bez objašnjenja. Odatle teškoće, a rezultat je najčešće odbojnost prema takvim problemima. Međutim, svođenje problema na rješavanje jednadžbi višestruko je korisno jer ono omogućuje razvijanje logičkog mišljenja, dosjetljivosti, opažanja i umijeća samostalnog provođenja nevelikih istraživanja. Zato takve probleme nije dobro izbjegavati, već ih treba metodički primjereno objašnjavati, kako bi oni ispunili svoju obrazovnu svrhu.

7. Slabosti nastave matematike u radu sa zadatcima

U redovnoj nastavi, pri hospitiranju studenata matematike nastavničkih profila i na stručnim ispitima mladih nastavnika matematike uočene su neke slabosti nastave matematike u radu sa zadatcima, a koje su u uskoj vezi s načelom znanstvenosti i s primjenom znanstvenih metoda. Evo tih slabosti:

1) Nastavna situacija zahtijeva rješavanje određenog zadatka. Nastavnik matematike učenicima postavlja taj zadatak prema svome izboru i ne mari zanima li zadatak učenike ili ne. Često učenici nisu spremni za rješavanje, nije pobuđen njihov interes, pa rješavanju pristupaju pod psihološkim pritiskom. Posljedica je usporavanje nastavnog procesa, a utječe i na jasnoću i razumijevanje poučavanja.

Međutim, za nastavnika matematike izbor zadataka je važan korak za uspješnu nastavu. Zato on svaki puta mora naći zadatak koji će pobuditi interes učenika i usmjeriti njihovu pozornost na rješavanje. Zadatak mora biti primjeren znanju učenika, tako da omogućuje i aktivno sudjelovanje samih učenika u njegovu postavljanju i istraživanju u vezi s njim. Neka od ranije navedenih pitanja pomažu ostvarenje ovog cilja.

2) Većina zadataka u udžbenicima i zbirkama često je slabo međusobno povezana. Njihova je uloga vrlo uska. Oni obično služe za ilustraciju primjene nekog konkretnog pravila, zakonitosti, formule. Kada su toj svrsi poslužili, njih se brzo zaboravlja. Međutim, neki zadatak ne bi smio biti sam sebi svrha, već bi, nadovezujući se na prethodne zadatke, trebao dati nešto novo, bar malen pomak u mišljenju.

S druge strane, i takvi zadatci kakvi već jesu pružaju ponekad mogućnost usmjeravanja mišljenja učenika u nekom drugom pravcu i postavljanja dodatnih pitanja kojima se širi njihova uloga. Dobar nastavnik neće propustiti takvu mogućnost. Nažalost, najčešća je situacija da nastavnik matematike u svojoj pripremi nastavnog sata traži samo brzo rješenje postavljenog zadatka, previše se oslanja na udžbenik ili zbirku i nije zamislio nikakva dodatna pitanja. Zbog pretjeranog oslanjanja na način obrade matematičkih sadržaja u udžbeniku ili zbirci u nastavi matematike trpi upravo ono najvrednije – kreativnost nastavnika.

3) Gruba povreda znanstvenosti nastaje kada nastavnik matematike, umjesto da rješavanje zadatka prepusti učenicima, njihovu rasuđivanju, istraživanju i otkrivanju, učenike pretvara u pasivne rješavatelje zadataka po njegovim uputama. Sada trpi – kreativnost učenika.

4) Poseban problem je zadavanje domaće zadaće. To je posljednji dio nastavnog sata, pa se često događa da zbog opsežnosti upravo obrađenog novog nastavnog gradiva nastavnik to učini brzo i bez ikakvih objašnjenja, navodeći samo brojeve zadataka iz zbirke ili udžbenika. Time se povređuju važna načela nastave matematike. Zadavanje domaće zadaće treba biti brižljivo promišljeno i pripremljeno, ali i obavljeno na primjeren način. Pod tim se podrazumijeva: nastavnikov osvrt na izbor zadataka, čitanje tekstova od strane učenika, nastavnikova pitanja o razumijevanju zadataka, objašnjenja i upute za rješavanje težih zadataka.

Ovdje je moguć znatan pomak u smjeru njegovanja kreativnosti učenika izmjenom načina zadavanja domaće zadaće. Navodimo samo jednu važnu mogućnost za ostvarenje toga cilja kojom bi se postigla bolja psihološka priprema učenika za rješavanje domaće zadaće:

Učenici sami sastavljaju neke zadatke za domaću zadaću.

5) Na kraju posebno istaknimo glavne slabosti u vezi s radom s matematičkim zadatcima: standardizacija sadržaja i metoda rješavanja zadataka, neusklađenost postavljanja i rješavanja zadataka sa zakonitostima matematičkog mišljenja i nerazvijenost metodike rješavanja zadataka.

• • • • •

U opisu načela znanstvenosti vidjeli smo da se pri primjerenom njegovu ostvarivanju u određenim matematičkim sadržajima neizbježno pojavljuju pojedinačno ili u grupi više znanstvenih postupaka. Vrijeme je da se malo podrobnije pozabavimo tim postupcima, posebno s osvrtom na njihovu ulogu u nastavnom procesu.