1. Matrice

1.1. Definicija i primjeri matrica

Matrice. Matrica[1] je pravokutna tablica sačinjena od nekoliko redaka i stupaca ispunjenih njezinim elementima. Ti su elementi obično brojevi, najčešće realni, no ponekad i kompleksni. Elementi mogu biti i drugi objekti, poput funkcija, vektora, diferencijalnih operatora, pa čak i samih matrica.

Mi ćemo promatrati uglavnom matrice realnih brojeva. Evo primjera nekih matrica:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & \pi \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrica **A** ima dva retka i dva stupca. **B** ima dva retka i tri stupca, dok **C** ima tri retka i dva stupca.

[1] engl. *matrix*, njem. *Matrix*, franc. *matrice*, rus. матрица od lat. *matrix – stablo, matica*.

Zapis matrice. Element matrice označavamo indeksima, pozivanjem prvo na redak pa zatim na stupac u kojem se on nalazi. Tako $(\mathbf{A})_{11} = 2$ naznačava da je element matrice $\mathbf{A}$ koji se nalazi u prvom retku i prvom stupcu jednak 2. Na primjer, $(\mathbf{B})_{13} = -1$, $(\mathbf{B})_{21} = 2$ i slično.

Običaj je da se opći (po volji odabrani) element matrice označava malim latinskim (ponekad i grčkim) slovom. Tako je a_{11} element matrice $\mathbf{A}$ koji leži u prvom retku i prvom stupcu, $a_{11} = (\mathbf{A})_{11}$, i slično $a_{ij} = (\mathbf{A})_{ij}$. Opći oblik matrice je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

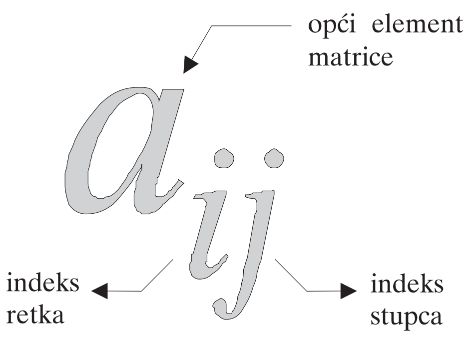
Ova matrica ima m redaka i n stupaca. Za nju kažemo da je tipa $m \times n$ ili tipa (m, n). Elementi matrice su brojevi a_{ij}; $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, indeksirani s dva indeksa. Prvi označava broj retka, a drugi broj stupca u kojem se dotični element nalazi.

Prema tome, retci se sastoje od sljedećih elemenata:

prvi redak	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1j}	$\dots$	a_{1n}
$\vdots$						
i-ti redak	a_{i1}	a_{i2}	$\dots$	a_{ij}	$\dots$	a_{in}
$\vdots$						
m-ti redak	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mj}	$\dots$	a_{mn}

(prvi indeks je čvrst i označava broj retka, a drugi se mijenja).

Stupce pak sačinjavaju elementi čiji je drugi indeks čvrst i označava broj stupca, a prvi indeks se mijenja.



Sl. 1.1. Zapis općeg elementa matrice

prvi stupac	...	j-ti stupac	...	n-ti stupac
a_{11}	$\dots$	a_{1j}	$\dots$	a_{1n}
$\vdots$		$\vdots$		
a_{i1}	$\dots$	a_{ij}	$\dots$	a_{in}
$\vdots$		$\vdots$		
a_{m1}	$\dots$	a_{mj}	$\dots$	a_{mn}

Kraće matricu $\mathbf{A}$ zapisujemo na način $\mathbf{A} = (a_{ij})$ navodeći samo ime njezinog općeg elementa.

Jednakost matrica. Dvije matrice, $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ su **jednake** ako

- su istoga tipa (imaju jednak broj redaka i jednak broj stupaca),
- imaju jednake odgovarajuće elemente, tj. vrijedi $a_{ij} = b_{ij}$ za sve i, j.

Matricu tipa $(1,1)$ možemo poistovjetiti s realnim brojem, tako smijemo pisati $[3] = 3$. Ovakvo poistovjećivanje neće nikad uzrokovati zabunu.

Ako je broj redaka m jednak broju stupaca n, za matricu kažemo da je **kvadratna matrica reda** n.

$*\,{*}\,*$

Navedimo sad nekoliko karakterističnih matrica te tipove matrica specijalnoga oblika.

Nul-matrica. Matrica čiji su svi elementi nule naziva se **nul-matrica** i označava s $\mathbf{0}$, neovisno o tome kojega je tipa ili reda. Ta nepreciznost neće stvarati nikakvih problema. Tako su sve sljedeće matrice nul-matrice

$$[0], \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad [0\ \ 0\ \ 0], \qquad \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Dijagonalna matrica. Dijagonala matrice definirana je samo za kvadratne matrice. Ona sadrži elemente s jednakim indeksima: $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. Matrica kojoj su svi elementi van dijagonale jednaki nuli naziva se **dijagonalna** matrica. Sljedeće su matrice dijagonalne

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

U literaturi se dijagonalna matrica ponekad označava simbolom diag. Tako na primjer gornje se matrice mogu zapisati ovako: $\operatorname{diag}(2,1)$, $\operatorname{diag}(3,0,4)$, $\operatorname{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$.

Jedinična matrica. To je dijagonalna matrica čiji su dijagonalni elementi jednaki 1. Označavamo ju slovom $\mathbf{I}$. (Ponegdje se u literaturi koristi i slovo $\mathbf{E}$.)

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Trokutaste matrice. Pojam je definiran samo za kvadratne matrice. Matrica je **gornja trokutasta** ako su svi njezini elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli. Evo nekih primjera:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Matrica je **donja trokutasta** ako su svi njezini elementi iznad dijagonale jednaki nuli:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Transponirana matrica. Matrica $\mathbf{B}$ je **transponirana** matrica matrice $\mathbf{A}$ ako vrijedi

$$(\mathbf{B})_{ij} = (\mathbf{A})_{ji}, \qquad \text{za sve} \quad i, j.$$

Kako dobivamo transponiranu matricu? Elemente prvoga retka matrice $\mathbf{A}$, ne mijenjajući njihov poredak, zapišemo na mjesto prvog stupca matrice $\mathbf{B}$ itd. Matrica $\mathbf{B}$ je tipa (n, m). Ovo pridruživanje nazivamo **transponiranjem**. Evo nekoliko primjera transponiranja

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Kroneckerov simbol. S δ_{ij} uobičajeno označavamo Kroneckerov delta simbol:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ako je } i = j, \\ 0 & \text{ako je } i \neq j. \end{cases}$$

Vidimo da su δ_{ij} upravo matrični elementi jedinične matrice: $\mathbf{I} = (\delta_{ij})$.

Transponiranu matricu označavamo simbolom $\mathbf{A}^\top$,

$$(\mathbf{A}^\top)_{ij} := (\mathbf{A})_{ji}, \quad \forall i,j.$$

Primjer 1.1. **a**) Ako je $\mathbf{D}$ dijagonalna matrica, tad je $\mathbf{D}^\top = \mathbf{D}$.
b) Ako je $\mathbf{L}$ gornja trokutasta, tad je $\mathbf{L}^\top$ donja trokutasta, i obratno.
c) $(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}$, za svaku matricu $\mathbf{A}$.

Ako je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica, tad se transponirana matrica dobiva tako da se elementi matrice $\mathbf{A}$ zrcale s obzirom na njezinu dijagonalu.

Simetrične matrice. Matrica $\mathbf{A}$ je **simetrična** ako je $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$, tj. $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i,j$. Simetrična matrica nužno je kvadratna. Zrcaljenjem s obzirom na dijagonalu matrica se ne mijenja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{itd.}$$

Matrica je **antisimetrična** ako vrijedi $\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$, tj. $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall i,j$. Antisimetrična matrica nužno je kvadratna i ima nule na dijagonali; $a_{ii} = -a_{ii}$ daje $a_{ii} = 0$. Evo primjera:

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{itd.}$$

Vektor kao matrica. Matrice koje imaju samo jedan redak ili samo jedan stupac nazivamo vektorima. Tako govorimo o vektor-retku ili pak o vektor-stupcu. Evo primjera vektor-stupaca:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ldots, \qquad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Za prvog kažemo da je dimenzije 2, drugi je dimenzije 3, a posljednji dimenzije n. Vektore obično označavamo masnim malim slovima latiničke abecede, iako ćemo ponekad koristiti i velika slova, jer vektor je i matrica tipa $(n,1)$ ili pak $(1,n)$. Ako je $\mathbf{b}$

Zagrade koje okružuju matricu mogu biti i drugoga oblika. U literaturi se susreću i sljedeći zapisi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Za matrice maloga reda obično ne koristimo zapis s indeksima; pišemo radije $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ i slično.

vektor-stupac, tad je njemu transponirani vektor $\mathbf{b}^\top$ vektor-redak

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}^\top = [\, b_1 \;\; b_2 \;\; \ldots \;\; b_n \,],$$

i obratno, transponiranjem vektor-retka dobiva se vektor-stupac.

Govorimo li samo *vektor*, onda mislimo na *vektor-stupac*. S druge strane, u retcima knjige lakše je zapisati vektor-redak. Stoga se vektori često zapisuju s pomoću znaka transponiranja. Tako je npr. vektor $[\,0 \;\; 1 \;\; 3\,]^\top$ zapisan u ovome retku zapravo vektor-stupac, tipa $(3,1)$.

Matrica je skup vektora. Stupce (i retke) matrice možemo u mislima shvatiti kao vektore. Tako je matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

sastavljena od sljedećih vektor-redaka

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= [\, a_{11} \;\; a_{12} \;\; \ldots \;\; a_{1n} \,], \\ \mathbf{a}_2 &= [\, a_{21} \;\; a_{22} \;\; \ldots \;\; a_{2n} \,], \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_m &= [\, a_{m1} \;\; a_{m2} \;\; \ldots \;\; a_{mn} \,], \end{aligned} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix},$$

ili pak od sljedećih vektor-stupaca

$$\mathbf{a}^1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \mathbf{a}^2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{a}^n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = [\, \mathbf{a}^1 \;\; \mathbf{a}^2 \;\; \ldots \;\; \mathbf{a}^n \,].$$

1.2. Operacije s matricama

Skup svih matrica istog tipa (m,n) označavamo sa $\mathscr{M}_{mn}$. Na tom su skupu definirane dvije operacije

- zbrajanje matrica,
- množenje skalara i matrice.

Zbrajanje matrica definirano je na način

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{ij} := (\mathbf{A})_{ij} + (\mathbf{B})_{ij}. \tag{1.1}$$

Da bi zbroj matrica bio definiran, matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ moraju biti **istoga tipa**. Rezultat zbrajanja je opet matrica, istoga tipa (m,n). Element matrice $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ na mjestu (i,j) jednak je zbroju elemenata matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ na istom tom mjestu.

Tako vrijedi, na primjer

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Bit će korisno da se priviknemo na zapis matrice u kome se redak zapisuje u obliku vektora. Tako zbrajanje matrica možemo predočiti formulom

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2+\mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m+\mathbf{b}_m \end{bmatrix}.$$

Tu je dakako

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 = [a_{11} + b_{11},\ a_{12} + b_{12}, \dots,\ a_{1n} + b_{1n}]$$

i slično za preostale retke.

Množenje matrice skalarom. Neka je $\lambda \in \mathbf{R}$ bilo koji skalar, te $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{mn}$. Umnožak matrice $\mathbf{A}$ skalarom λ je matrica $\lambda\mathbf{A}$ definirana na način

$$(\lambda\mathbf{A})_{ij} := \lambda(\mathbf{A})_{ij}. \tag{1.2}$$

Dakle, matrica se množi skalarom* tako da se svaki njezin element množi tim skalarom:

$$2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -6 \end{bmatrix},$$

$$\lambda\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Matricu $(-1)\mathbf{A}$ označavamo s $-\mathbf{A}$. Razlika dviju matrica svodi se na već uvedene operacije: $\mathbf{A} - \mathbf{B} := \mathbf{A} + (-1)\mathbf{B}$.

Skup matrica čini vektorski prostor. Izdvojimo sljedeća svojstva ovih dviju operacija

1) $(\forall\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C} \in \mathscr{M}_{mn}) \quad \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$.
2) $(\exists\mathbf{0} \in \mathscr{M}_{mn})(\forall\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{mn}) \quad \mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$.
3) $(\forall\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{mn})(\exists\mathbf{A}' \in \mathscr{M}_{mn}) \quad \mathbf{A} + \mathbf{A}' = \mathbf{A}' + \mathbf{A} = \mathbf{0}$.
4) $(\forall\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathscr{M}_{mn}) \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.
5) $(\forall\alpha,\beta \in \mathbf{R})(\forall\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{mn}) \quad \alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$
6) $(\forall\alpha \in \mathbf{R})(\forall\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathscr{M}_{mn}) \quad \alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$.
7) $(\forall\alpha,\beta \in \mathbf{R})(\forall\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{mn}) \quad (\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$.

* Skalar je drugi naziv za realan broj. Korisno ga je rabiti u ovakvim situacijama, zato što po potrebi skalarom nazivamo i kompleksne brojeve. Množenje matrice s kompleksnim brojem definira se na potpuno istovjetan način, stoga ova definicija vrijedi i kad skalare zamišljamo kao kompleksne brojeve.

8) $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$

Kažemo da skup svih matrica $\mathscr{M}_{mn}$ uz operacije zbrajanja matrica i množenja skalara i matrice čini **vektorski prostor**.

1.3. Algebra matrica

Množenje matrica znatno je složenija operacija od zbrajanja. Prije no što navedemo definiciju, upozorit ćemo na sljedeće:

- Umnožak nije definiran za bilo kakve dvije matrice, pa čak niti za matrice istoga tipa (m, n), ukoliko je $m \neq n$.
- I kad je umnožak definiran, on ovisi o poretku matrica.

Krenimo od pojma umnoška vektora.

Umnožak vektor-retka i vektor-stupca. Neka je $\mathbf{a}$ vektor-redak i $\mathbf{b}$ vektor-stupac iste duljine:

$$\mathbf{a} = [\, a_1 \;\; a_2 \;\; \dots \;\; a_n \,], \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Njihov se umnožak definira na način:

$$[\, a_1 \;\; a_2 \;\; \dots \;\; a_n \,] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n. \tag{1.3}$$

Rezultat je ovog množenja skalar. Evo primjera:

$$[\, 2 \;\; -1 \;\; 3 \,] \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} := 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 5 = 23.$$

Množenje matrica. Da bi postojao umnožak dviju matrica, one moraju biti **ulančane**: broj stupaca prve mora biti jednak broju redaka druge matrice. (Odnosno, ‘duljina’ retka prve mora biti jednaka ‘duljini’ stupca druge matrice.) Tako, ako je $\mathbf{A}$ tipa (m, n) da bi umnožak $\mathbf{AB}$ postojao, matrica $\mathbf{B}$ mora biti tipa (n, p). Pri tom m i p mogu biti bilo kakvi.

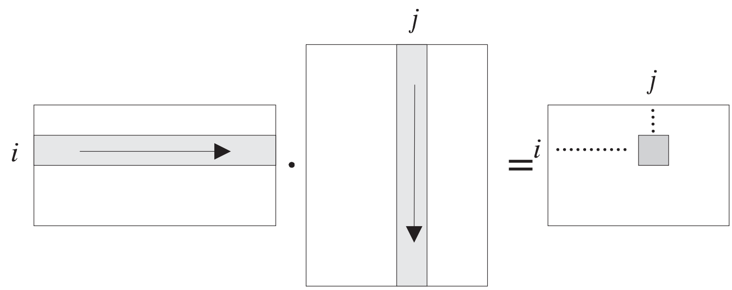
Rezultat množenja bit će ponovno matrica, tipa (m, p).

Kako množimo matrice? Neka je $\mathbf{A} = (a_{ij})$ tipa (m, n), $\mathbf{B} = (b_{ij})$ tipa (n, p). Opći element umnoška $\mathbf{AB}$ dan je formulom

$$\begin{aligned} (\mathbf{AB})_{ij} &:= a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ovaj umnožak prepoznajemo kao umnožak i-toga retka matrice $\mathbf{A}$ i j-tog stupca matrice $\mathbf{B}$:

$$(\mathbf{AB})_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}.$$



Sl. 1.2. Dvije matrice mogu se množiti samo ako su ulančane. Rezultat je matrica koja ima jednak broj redaka kao prva i jednak broj stupaca kao i druga matrica. Element unmoška na mjestu (i,j) jednak je skalarnom umnošku i-toga retka prve i j-toga stupca druge matrice

Primjer 1.2. Evo nekoliko primjera umnožaka matrica

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times(-1)+1\times 2 & 2\times 3+1\times 4 \\ (-1)\times(-1)+3\times 2 & (-1)\times 3+3\times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & -5 \\ 4 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

* * *

Ovi primjeri potvrđuju sljedeća neuobičajena svojstva

- ako je umnožak $\mathbf{AB}$ definiran, $\mathbf{BA}$ to ne mora biti (primjer **d**),
- ako postoje $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{BA}$, tad je općenito $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (primjer **c**). Čak i onda ako su matrice $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{BA}$ istoga tipa, općenito je $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (matrice u primjeru **a** i **e**),

- Ako je $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ (nul-matrica), tad ne mora biti $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ niti $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

***

Matrični umnožak vektora. Neka su $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ vektor-stupci istoga tipa. Shvatimo li ih kao matrice, onda su definirana oba umnoška, $\mathbf{a}^\top\mathbf{b}$ i $\mathbf{ab}^\top$. Pri tome

- $\mathbf{a}^\top\mathbf{b}$ je matrica tipa $(1,1)$ s elementom

$$\mathbf{a}^\top\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \end{bmatrix}.$$

Ovakvu matricu, s jednim elementom, poistovjećujemo sa skalarom i rezultat pišemo bez zagrada. Zato je, u ovom slučaju, matrični umnožak vektora jednak gore opisanom umnošku vektor retka s vektor stupcem.

- $\mathbf{ab}^\top$ je matrica tipa (n,n)! Zaista,

$$\mathbf{ab}^\top = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n \end{bmatrix}$$

Primjer 1.3.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \times 3 + 1 \times (-1) + (-3) \times 2 = -1,$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ -9 & 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Ovaj je primjer vrlo značajan. Jer, matrično množenje možemo opisati na potpuno identičan način, shvatimo li retke odnosno stupce matrica kao zasebne vektore. Evo kako:

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}^1 & \mathbf{b}^2 & \dots & \mathbf{b}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{b}^1 & \mathbf{a}_1\mathbf{b}^2 & \dots & \mathbf{a}_1\mathbf{b}^p \\ \mathbf{a}_2\mathbf{b}^1 & \mathbf{a}_2\mathbf{b}^2 & \dots & \mathbf{a}_2\mathbf{b}^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathbf{a}_m\mathbf{b}^1 & \mathbf{a}_m\mathbf{b}^2 & \dots & \mathbf{a}_m\mathbf{b}^p \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vidimo da je opći element matrice **AB** upravo

$$(\mathbf{AB})_{ij} = \mathbf{a}_i\mathbf{b}^j = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

* * *

Zapis linearnog sustava. U nastavku ćemo u nekoliko navrata spomenuti da je problem rješavanja linearnih sustava najvažniji problem linearne algebre. Dobar dio motivacija za proučavanje matrica upravo proizlazi iz njihove veze s linearnim sustavima.

Sustav od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica danas uobičajeno zapisujemo u obliku

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots\ a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots\ a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots\ a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}. \tag{1.5}$$

Ovdje su nam poznate vrijednosti koeficijenata a_{ij} te b_i, a trebamo odrediti nepoznanice $x_1 \dots, x_n$.

Čitatelj će primijetiti da se sustav (1.5) može napisati u obliku matrične jednadžbe

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \tag{1.6}$$

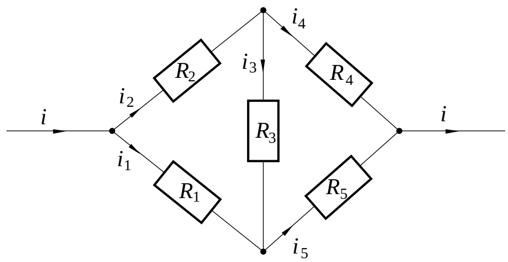
gdje smo označili

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \text{i} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Matrica **A** naziva se **matrica koeficijenata sustava**, **x** je **vektor nepoznanica**, **b desna strana** sustava.

Pokazat ćemo u četvrtom poglavlju da se postupak rješavanja ovoga sustava svodi na operacije s elementima matrice **A** i vektora **b**. Također, problem egzistencije i jedinstvenosti rješenja ovisi uglavnom o svojstvima matrice koeficijenata.

Primjer 1.4. Za strujni krug na slici po Kirchhoffovim zakonima možemo postaviti sljedeće jednadžbe



Sl. 1.3.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
i_1 & + & i_2 & & & & & & & = & i, \\
& & i_2 & - & i_3 & - & i_4 & & & = & 0, \\
i_1 & & & + & i_3 & & & - & i_5 & & 0, \\
R_1 i_1 & - & R_2 i_2 & - & R_3 i_3 & & & & & = & 0, \\
& & & & R_3 i_3 & - & R_4 i_4 & + & R_5 i_5 & = & 0.
\end{array}
$$

U matričnom zapisu:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ R_1 & -R_2 & -R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_4 & R_5 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

Svojstva matričnoga množenja. Izdvojimo neka svojstva matričnoga množenja. Ona pokazuju da unatoč ‘neobičnoj’ definiciji, to množenje ipak posjeduje neka očekivana dobra svojstva.

- **Asocijativnost**. Vrijedi

$$
(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})
$$

kad god je umnožak (s bilo koje strane) definiran.

Dokaz ovoga svojstva može čitatelj u prvome čitanju preskočiti. Nešto kasnije, ovo će svojstvo proizaći iz veze matrica s linearnim operatorima i svest će se na svojstvo asocijativnosti za kompoziciju funkcija. Ovdje ga navodimo radi vježbe zapisivanja operatora sumiranja te zapisivanja indeksa matričnih elemenata. Obratite osobito pozornost na zamjenu poretka sumacije. Dakle, ako je

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= (a_{ij}), \qquad \text{tipa} \quad (m, n), \\
\mathbf{B} &= (b_{jk}), \qquad \text{tipa} \quad (n, p), \\
\mathbf{C} &= (c_{kl}), \qquad \text{tipa} \quad (p, r),
\end{aligned}
$$

tad imamo

$$(\mathbf{AB})_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk},$$

$$(\mathbf{BC})_{jl} = \sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl},$$

te je

$$\begin{aligned}
[(\mathbf{AB})\mathbf{C}]_{il} &= \sum_{k=1}^{p}(\mathbf{AB})_{ik}c_{kl} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl} \\
&= \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kl} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{BC})_{jl} = [\mathbf{A}(\mathbf{BC})]_{il}
\end{aligned}$$

Matrični polinom. Ako je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica (i samo u tom slučaju!), definirana je potencija $\mathbf{A}^2 := \mathbf{AA}$. Induktivno definiramo potenciju:

$$\mathbf{A}^p := \underbrace{\mathbf{AA}\cdots\mathbf{A}}_{p \text{ faktora}}.$$

Očevidno je (zbog asocijativnosti množenja) da za ove potencije vrijede jednakosti $\mathbf{A}^p\mathbf{A}^q = \mathbf{A}^q\mathbf{A}^p = \mathbf{A}^{p+q}$, $(\mathbf{A}^p)^q = \mathbf{A}^{pq}$, za sve prirodne brojeve p i q.

Po definiciji, stavljamo $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$. Tako možemo definirati **matrični polinom**: ako je $f(x) = \alpha_p x^p + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ bilo koji polinom stupnja p, tad definiramo

$$f(\mathbf{A}) := \alpha_p\mathbf{A}^p + \ldots + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_0\mathbf{I}.$$

Primjer 1.5. Neka je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ i $f(x) = x^3 - x + 3$, $g(x) = x^2 - 4x + 7$. Tad vrijedi

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3 - \mathbf{A} + 3\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -9 & 8 \\ -24 & -9 \end{bmatrix}.$$

$$g(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + 7\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- **Distributivnost** Vrijedi $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$. Zaista,

$$\begin{aligned}
[(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}]_{ik} &= \sum_{j=1}^{n}(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{ij}c_{jk} = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})c_{jk} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}c_{jk} \\
&= (\mathbf{AC})_{ik} + (\mathbf{BC})_{ik} = [\mathbf{AC}+\mathbf{BC}]_{ik}
\end{aligned}$$

• **Umnožak s jediničnom matricom.** Ako je $\mathbf{I}$ jedinična matrica reda n, tad za svaku kvadratnu matricu $\mathbf{A}$ istoga reda vrijedi

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

Uvjeri se u to na primjerima matrica reda 2 i reda 3! U općem slučaju, element umnoška $\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}$ na mjestu (i, j) iznosi

$$(\mathbf{AI})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} = a_{i1}\delta_{1j} + \ldots + a_{ij}\delta_{jj} + \ldots + a_{in}\delta_{nj} = a_{ij} = (\mathbf{A})_{ij}.$$

(Od svih pribrojnika u gornjoj sumi preostaje samo jedan, kod kojega je $k = j$.) Slično vrijedi i za umnožak $\mathbf{IA}$.

• **Transponiranje.** Odnos množenja matrica prema transponiranju je sljedeći:

$$(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top.$$

Provjerimo najprije ulančanost! Matrica $\mathbf{B}^\top$ je tipa $p \times n$, $\mathbf{A}^\top$ tipa $n \times m$ te $\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$ postoji i ima tip $p \times m$, baš kao i matrica $(\mathbf{AB})^\top$. Sad pišemo:

$$\begin{aligned}
[(\mathbf{AB})^\top]_{ik} = (\mathbf{AB})_{ki} &= \sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_{ji} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{B}^\top)_{ij} (\mathbf{A}^\top)_{jk} = (\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top)_{ik}.
\end{aligned}$$

Primjer 1.6. Umnožak vektor-retka i vektor-stupca ne ovisi o njihovu poretku. Zaista, kako je $\mathbf{a}^\top \mathbf{b}$ skalar, vrijedi

$$(\mathbf{a}^\top \mathbf{b})^\top = \mathbf{a}^\top \mathbf{b}.$$

S druge strane, po pravilu transponiranja je

$$(\mathbf{a}^\top \mathbf{b})^\top = \mathbf{b}^\top \mathbf{a}^{\top\top} = \mathbf{b}^\top \mathbf{a}.$$

Tako smo dobili $\mathbf{a}^\top \mathbf{b} = \mathbf{b}^\top \mathbf{a}$.

1.4. Matrična jednadžba i inverzna matrica

U ovoj ćemo točki promatrati samo kvadratne matrice istoga reda n. Sa $\mathscr{M}_n$ označavamo skup svih takvih matrica.

Promatramo samo kvadratne matrice radi toga što su samo u tom slučaju na istome skupu definirane sve tri prije uvedene operacije: zbrajanje matrica, množenje skalara i matrice te množenje matrica.

Matrična jednadžba. Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ dvije zadane matrice iz $\mathscr{M}_n$. Matrična jednadžba je jednadžba oblika

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \tag{1.7}$$

gdje je $\mathbf{X} \in \mathscr{M}_n$ nepoznata matrica.

Postavlja se pitanje:

- Kad će jednadžba (1.7) imati jedinstveno rješenje $\mathbf{X}$?

Vidjet ćemo da odgovor na ovo pitanje ovisi samo o matrici $\mathbf{A}$. Ideja se sastoji u tome da se promotri pomoćna jednadžba

$$\mathbf{YA} = \mathbf{I}. \tag{1.8}$$

Pretpostavimo da ona ima rješenje $\mathbf{A}'$, dakle, $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Množeći jednadžbu (1.7) s $\mathbf{A}'$ (s lijeve strane!) dobivamo

$$\mathbf{A}'(\mathbf{AX}) = \mathbf{A}'\mathbf{B}.$$

kako je $\mathbf{A}'(\mathbf{AX}) = (\mathbf{A}'\mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{IX} = \mathbf{X}$, odavde slijedi da je traženo rješenje jednadžbe (1.7) matrica $\mathbf{A}'\mathbf{B}$.

Interesantno je primijetiti da provjera, tj. uvrštavanje $\mathbf{X} = \mathbf{A}'\mathbf{B}$ u (1.7) daje

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{B}) = \mathbf{B}$$

što sugerira da vrijedi $\mathbf{AA}' = \mathbf{I}$.

Pokazat ćemo poslije da je to zaista istina.

Primjer 1.7. Riješimo jednadžbu

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stavimo $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Množenjem matrica s lijeve strane i izjednačavanjem s matricom na desnoj strani dolazimo do jednadžbi

$$\begin{aligned} 3a + \ \ c &= -1, \qquad & 3b + \ \ d &= 2, \\ 5a + 2c &= 3, & 5b + 2d &= 1, \end{aligned}$$

odakle lagano slijedi $a = -5$, $c = 14$, $b = 3$, $d = -7$, tj. $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 14 & -7 \end{bmatrix}$.

Zadatak možemo riješiti i tako da najprije riješimo pomoćnu jednadžbu $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}$:

$$\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

odakle imamo

$$\begin{aligned} 3e + 5f &= 1, \qquad & 3g + 5h &= 0, \\ e + 2f &= 0, & g + 2h &= 1. \end{aligned}$$

Odavde $\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$. Sad je

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}'\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 14 & -7 \end{bmatrix}.$$

Nije uobičajeno u matematici isticati svojstva koja *ne vrijede*. Ovdje ćemo učiniti iznimku pošto sljedeća 'nevažeća svojstva' razlikuju matričnu algebru od uobičajenih algebri brojeva:

(i) Općenito je $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

(ii) Jednakost $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ ne povlači nužno $\mathbf{B} = \mathbf{C}$, čak niti u slučaju $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$.

(iii) Ako je $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, tad nije nužno $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ niti mora biti $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

Korist od ovoga pristupa sastoji se u tome da znajući matricu $\mathbf{A}'$ možemo odrediti rješenje jednadžbe (1.7) za bilo kakvu matricu $\mathbf{B}$.

Uvjerite se također da matrica $\mathbf{A}'$ zadovoljava i jednadžbu $\mathbf{AA}' = \mathbf{I}$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

***

Inverzna matrica. Neka je $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n$ zadana matrica. Matrica $\mathbf{A}'$ za koju vrijedi

$$\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{AA}' = \mathbf{I} \tag{1.9}$$

naziva se **inverzna matrica** matrice $\mathbf{A}$.

Provjerimo najprije da je inverzna matrica (ako postoji!) jedinstvena. Pretpostavimo da postoje dvije matrice, $\mathbf{A}'$ i $\mathbf{A}''$ koje zadovoljavaju (1.9). Tad iz $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}$, množeći 's desna' s matricom $\mathbf{A}''$ dobivamo $(\mathbf{A}'\mathbf{A})\mathbf{A}'' = \mathbf{IA}'' = \mathbf{A}''$. Kako je po pretpostavci $(\mathbf{A}'\mathbf{A})\mathbf{A}'' = \mathbf{A}'(\mathbf{AA}'') = \mathbf{A}'\mathbf{I} = \mathbf{A}'$, odavde slijedi tvrdnja.

Inverznu matricu obično označavamo s $\mathbf{A}^{-1}$.

Za matricu $\mathbf{A}$ kažemo da je **regularna** ukoliko postoji njezina inverzna matrica $\mathbf{A}^{-1}$.

***

Čitatelj će se možda zapitati: postoji li kvadratna matrica $\mathbf{A}'$ koja zadovoljava samo jednu od relacija u (1.9), a drugu ne? Na primjer, za koju vrijedi $\mathbf{AA}' = \mathbf{I}$ ali $\mathbf{A}'\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$? Odgovor je **ne!**, jedna jednakost u (1.9) povlači drugu. Dokaz ove tvrdnje dat ćemo u narednom poglavlju. Do tad je korisno znati da je dovoljno provjeriti samo jednu jednakost u relaciji (1.9).

***

Također, vrlo je važno spomenuti da inverz ne mora uvijek postojati. Pri tom ne mislimo samo na nul matricu, za koju je takva tvrdnja očevidna. Tako npr. matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ nema inverza. Zaista, iz uvjeta $\mathbf{AA}' = \mathbf{I}$ dobivamo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

što je nemoguće.

Učini li vam se da je razlog tome što i ova matrica ima previše nula, pokušajte pronaći inverz matrice $\begin{bmatrix} 21 & 39 \\ 49 & 91 \end{bmatrix}$.

***

Svojstva inverzne matrice. Iskažimo sljedeći

Teorem 1.1. *Ako su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ regularne matrice, tad je i $\mathbf{AB}$ regularna i vrijedi*

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}. \tag{1.10}$$

Dokaz. Matrica $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ postoji po pretpostavci. Direktna provjera sad daje

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{ABB}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AIA}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}.$$

Slično se dobiva i

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{I}.$$

Zato postoji inverz od $\mathbf{AB}$ i on je jednak $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

Formula (1.10) vrijedi i za umnožak n regularnih matrica: ako su $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ regularne, tad je i matrica $\mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_n$ regularna i vrijedi

$$(\mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_n)^{-1} = \mathbf{A}_n^{-1} \cdots \mathbf{A}_1^{-1}.$$

U to se možemo uvjeriti direktnim množenjem.

∗ * ∗

U nastavku ćemo pokušati odgovoriti na sljedeća važna pitanja

- Kad je matrica $\mathbf{A}$ regularna?
- Ako je $\mathbf{A}$ regularna, kako se računa njezin inverz?

Jedan od mogućih odgovora na ova pitanja daje teorija determinanti.

1.5. Algebarske strukture*

Pri proučavanju skupa matrica, ali i mnogih drugih struktura, pojavljuju se izvjesne zakonitosti i zajednička svojstva. Stoga je korisno uočiti ih i izdvojeno promatrati. Na taj se način stječe mnogo bolji uvid u zajednička svojstva nekih na prvi pogled posve različitih matematičkih struktura.

Jedan od osnovnih pojmova algebre koji ćemo ovdje ukratko spomenuti, jest pojam grupe.

Grupe. Grupa je matematička struktura koja se sastoji od nepraznog skupa G i binarne operacije $\circ : G \times G \to G$. To znači da je za svaka dva elementa $x, y \in G$ definiran njihov umnožak $x \circ y \in G$. Pri tome zahtjevamo da vrijede sljedeća svojstva

1) **Asocijativnost.** Za sve $x, y, z \in G$ vrijedi

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z).$$

2) **Postojanje neutralnog elementa.** Postoji element $e \in G$ takav da za svaki $x \in G$ vrijedi

$$e \circ x = x \circ e = x.$$

3) **Postojanje inverznog elementa.** Za svaki $x \in G$ postoji element $x^{-1} \in G$ takav da je

$$x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e.$$

Ako je k tome za svaka dva elementa $x, y \in G$ ispunjeno $x \circ y = y \circ x$, onda za G kažemo da je **komutativna** ili **Abelova** grupa.

Terminologija. U najjednostavnijim i najvažnijim primjerima, G je obično neki skup brojeva, a operacija $\circ$ bilo zbrajanje, bilo množenje.

Ako je operacija $\circ$ nalik na zbrajanje, tad grupu nazivamo **aditivnom**, neutralni element **nulom**, a inverzni element zovemo **suprotnim** elementom.

Ako pak operacija $\circ$ nalikuje na množenje, grupu nazivamo **multiplikativnom**, neutralni element **jedinicom**, a inverzni element **recipročnim**.

Evo primjera.

1. Aditivna grupa realnih brojeva $(\mathbf{R}, +)$, s operacijom zbrajanja kao grupovnom operacijom. Neutralni element je 0 (nula), a suprotni element broja x je broj $-x$.

Slično, aditivne grupe su grupe cijelih brojeva $(\mathbf{Z}, +)$, racionalnih $(\mathbf{Q}, +)$, kompleksnih $(\mathbf{C}, +)$.

Prirodni brojevi $(\mathbf{N}, +)$ ne čine grupu: ne postoji niti neutralni, niti suprotni element niti jednoga prirodnoga broja.

2. Multiplikativna grupa $(\mathbf{R}^*, \cdot)$, gdje je $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, a $\cdot$ operacija množenja. Jedinica (neutralni element) je 1, inverzni element od x je $1/x$.

Slično su grupe i $(\mathbf{R}^+, \cdot)$, $(\mathbf{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbf{Q}^+, \cdot)$, $(\mathbf{C}^*, \cdot)$. Međutim, $(\mathbf{Z}^*, \cdot)$ ne čini grupu: ne postoji inverzni element niti jednoga cijeloga broja koji je veći od 1.

3. Neka je n prirodan broj i $(\mathbf{Z}_n, +)$ grupa 'ostataka modulo n'. Tu je skup $\mathbf{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, operacija $+$ dvama elementima iz $\mathbf{Z}_n$ pridružuje ostatak pri dijeljenju njihova zbroja brojem n.

Provjeri da je $(\mathbf{Z}_n, +)$ grupa za slučaj $n = 2, 3, 4, 5, 6$. Ispiši 'tablicu zbrajanja', poput ove za $n = 5$

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

4. Ako je p prost broj, $\mathbf{Z}_p^* = \{1, 2, \ldots, p-1\}$ i operacija $\cdot$ definirana kao operacija množenja modulo p koja paru brojeva pridružuje ostatak pri dijeljenju njihova umnoška brojem p, tad je $(\mathbf{Z}_p^*, \cdot)$ grupa. Tablica množenja za $p = 5$ glasi

$\cdot$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Iz ove tablice čitamo: $2 \cdot 2 = 4$, $2 \cdot 3 = 1$, $3 \cdot 4 = 2$, $4^{-1} = 4$, $2^{-1} = 3$ itd.

Provjeri direktno da je $(\mathbf{Z}_p^*, \cdot)$ grupa za $p = 2, 3, 7$.

Ako p nije prost, onda $(\mathbf{Z}_p^*, \cdot)$ nije grupa. Npr. za $p = 6$ umnožak $2 \cdot 3$ jednak je 0 i ne pripada grupi.

5. Uređeni par $(F, +)$ je grupa, gdje su F sve funkcije sa skupa S u $\mathbf{R}$ (ili u $\mathbf{C}$), a $+$ operacija zbrajanja funkcija. Neutralni element je funkcija identički jednaka nuli. Što je suprotni element? Ova je grupa Abelova.

6. Uređeni par $(B, \circ)$ svih bijekcija sa skupa S u S je grupa. $\circ$ je kompozicija funkcija, e identiteta, a x^{-1} inverzna funkcija. Grupa nije Abelova.

Primjeri grupa su mnogobrojni. Tijekom ovoga kursa, kao i u kursu matematičke analize, srest ćemo se s velikim brojem sličnih primjera.

Osnovna svojstva grupe. Navedimo neka najjednostavnija svojstva svake grupe.

• Neutralni element je jedinstven. Zaista, ako postoje dva elementa, e i e' recimo, za koje vrijedi 2), tad bi bilo

$$e \circ e' = e'$$

jer je e neutralni element, ali i

$$e \circ e' = e$$

jer je e' neutralan. Stoga je nužno $e = e'$.

- Inverzni element je jedinstven. Zaista, ako x ima dva inverza, x' i x'' recimo, tad bi bilo

$$x \circ x' = e$$

pa množenje s x'' (slijeva) daje

$$x'' \circ (x \circ x') = x'' \circ e = x''.$$

Zbog asocijativnosti je tad

$$(x'' \circ x) \circ x' = x''$$

te konačno dobivamo

$$\begin{aligned} e \circ x' &= x'', \\ x' &= x''. \end{aligned}$$

- U svakoj grupi jednadžba $a \circ x = b$ ima jedinstveno rješenje. Zaista, množenjem s a^{-1} dobivamo

$$a^{-1} \circ (a \circ x) = a^{-1} \circ b \iff e \circ x = a^{-1} \circ b$$

te je $x = a^{-1} \circ b$. Rješenje je jedinstveno, jer, kad bi postojala dva — recimo x_1 i x_2 — tad bi iz $a \circ x_1 = b$ i $a \circ x_2 = b$ slijedilo $a \circ x_1 = a \circ x_2$ te, množenjem s a^{-1}, dobili bi $x_1 = x_2$.

Slično, jednadžba $y \circ a = b$ ima jedinstveno rješenje $y = b \circ a^{-1}$.

Polje. Sljedeća važna matematička struktura jest polje. Polje čini neprazni skup X na kojemu su definirane dvije operacije i koje zadovoljavaju svojstva koja ćemo navesti u nastavku. Operacije ćemo označiti s $+$ i s $\cdot$ iako to ne moraju biti klasične operacije zbrajanja i množenja. Zahtijevamo da bude ispunjeno sljedeće:

1) $(X, +)$ je (aditivna) Abelova grupa,
2) $(X^*, \cdot)$ je (multiplikativna) Abelova grupa, pri čemu je $X^* = X \setminus \{0\}$,
3) vrijede zakoni distribucije, za sve $x, y, z \in X$

$$\begin{aligned} (x + y) \cdot z &= x \cdot z + y \cdot z \\ x \cdot (y + z) &= x \cdot y + x \cdot z \end{aligned}$$

Standardni primjeri polja su polja brojeva $(Q, +, \cdot)$, $(\mathbf{R}, +, \cdot)$, $(\mathbf{C}, +, \cdot)$. Polje čini takoder i skup $(\mathbf{Z}_p, +, \cdot)$ za prost broj p, pri čemu su obje operacije definirane kao ostatak modulo p.

Matrice. Neka je $\mathbf{K}$ bilo koje polje. Matrica je svaka funkcija $\mathbf{A} : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbf{K}$. Za nju kažemo da je matrica nad poljem $\mathbf{K}$. Uobičajeno je označiti s a_{ij} vrijednost $A(i, j)$. Također, uobičajeno je cjelokupnu matricu pisati u obliku tablice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ako matricu interpretiramo kao funkciju, tad skup $(M_{mn}, +)$ svih matrica tipa (m, n) čini grupu, pri čemu je $+$ operacija matričnog zbrajanja.

Asocijativnost zbrajanja vrijedi jer vrijedi za funkcije, neutralni element (nula) je matrica identički jednaka nuli — dakle, nul matrica $\mathbf{0}$ za koju je $\mathbf{0}(i, j) = 0$ za sve i, j. Suprotni element je matrica $-\mathbf{A}$ za koju je $(-\mathbf{A})(i, j) := -\mathbf{A}(i, j)$ itd.

Matrice nad poljem $\mathbf{C}$.

Zbog svojstava polja $\mathbf{C}$ kompleksnih brojeva korisno je, a ponekad i neophodno, promatrati matrice čiji su elementi kompleksni brojevi. Ovakve matrice imaju sve osobine skupa matrica nad poljem realnih brojeva; dodatni oprez treba učiniti pri definiciji transponiranja. Ovdje je korisnije definirati umjesto transponirane tzv. **adjungiranu** matricu. Označimo najprije s $\bar{\mathbf{A}}$ matricu s kompleksno-konjugiranim elementima:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2+i & 1 \\ 1-i & 3+2i \end{bmatrix} \implies \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2-i & 1 \\ 1+i & 3-2i \end{bmatrix}$$

Sad definiramo **adjungiranu matricu** $\mathbf{A}^*$ formulom

$$\mathbf{A}^* = (\bar{\mathbf{A}})^\top,$$

u gornjem primjeru

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 2-i & 1+i \\ 1 & 3-2i \end{bmatrix}.$$

Primijetimo, ako je $\mathbf{A}$ realna, tad je $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^\top$. Matrica $\mathbf{A}^*$ imat će ulogu matrice $\mathbf{A}^\top$ u mnogim teoremima u kojima se, u slučaju realnih matrica, javlja transponirana matrica $\mathbf{A}^\top$.

Matrica je **hermitska** ako vrijedi $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$.

Vektorski prostor $(X, +, \cdot)$**.** Skup X na kojemu su definirane operacije zbrajanja te množenja sa skalarom je **vektorski prostor** ukoliko te dvije operacije zadovoljavaju sljedeća svojstva:

1) $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X) \quad \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$.
2) $(\exists \mathbf{0} \in X)(\forall \mathbf{x} \in X) \quad \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$.
3) $(\forall \mathbf{x} \in X)(\exists \mathbf{x}' \in X) \quad \mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{x}' + \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
4) $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X) \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.
5) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R})(\forall \mathbf{x} \in X) \quad \alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$
6) $(\forall \alpha \in \mathbf{R})(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X) \quad \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$.
7) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R})(\forall \mathbf{x} \in X) \quad (\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$.
8) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$

Svako od ovih svojstava ima svoj naziv:

1) asocijativnost zbrajanja,
2) postojanje nul elementa,
3) postojanje suprotnog elementa,
4) komutativnost zbrajanja,
5) kompatibilnost množenja,
6) distributivnost množenja prema zbrajanju u X,
7) distributivnost množenja prema zbrajanju u $\mathbf{R}$,
8) netrivijalnost množenja.

Iako i u definiciji vektorskoga prostora sudjeluju dvije operacije $+$ i $\cdot$, njih ne smijemo brkati s takvim operacijama koje su definirale polje. Kod polja se operacija množenja vršila nad dva elementa iz toga polja, dok se u vektorskome prostoru množi skalar i element vektorskoga prostora.

Primijetimo da pri tome skalari čine polje! Zato još govorim o vektorskom prostoru *nad poljem* $\mathbf{R}$, ili pak o vektorskom prostoru *nad poljem* $\mathbf{C}$, ukoliko su skalari kompleksni brojevi itd.