# 1.

# Kvalitativna teorija običnih diferencijalnih jednadžbi



## 1.1. Uvod i motivacija

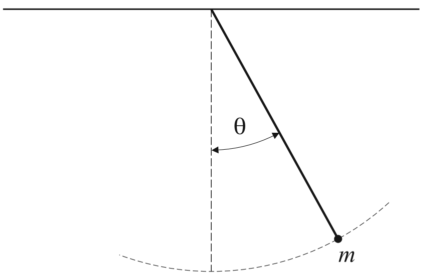
U poglavljima koja slijede navest ćemo osnovne definicije i neke osnovne teoreme kvalitativne teorije običnih diferencijalnih jednadžbi. Primijenit ćemo stečeno znanje na poznatim jednadžbama iz fizike, elektrotehnike i biologije, kao što su Duffingova, Van der Polova, Lorenzova, Lotka-Volterrina, te na mnogim drugim primjerima.

U kolegiju Matematika 2 upoznali ste diferencijalne jednadžbe. Nekoliko jednostavnih primjera iz fizike samo je naznačilo koliko je široka njihova primjena u praksi. Obradili ste teorem egzistencije i jedinstvenosti rješenja običnih diferencijalnih jednadžbi i naučili neke osnovne tehnike rješavanja. Način rješavanja jednadžbi pri kojem dobivamo jednadžbu familije rješenja nazivamo egzaktnim. Učeći kako se rješavaju pojedini tipovi jednadžbi shvatili ste da diferencijalne jednadžbe možemo riješiti samo za neke specijalne slučajeve. Što učiniti s jednadžbama koje ne možemo riješiti?

Numeričko rješavanje diferencijalnih jednadžbi je jedan od pristupa, ali taj pristup ne daje uvid u globalno ponašanje rješenja. Drugi problem su fenomeni koji su izuzetno osjetljivi na numeričke pogreške, primjer su izolirana periodička rješenja, nazivamo ih graničnim ciklusima, a isto tako i kaotična zbivanja. Mi ćemo se uglavnom baviti autonomnim sustavima diferencijalnih jednadžbi u ravnini, a usput ćemo spomenuti analogne definicije i teoreme za $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, ako takvi postoje. U ovom se kolegiju nećemo sresti s pojmom kaosa, ali bit ćemo mu vrlo blizu, slikovito govoreći. Autonomni sustavi u $\mathbb{R}^3$ mogu iskazivati kaotično ponašanje, dok oni u $\mathbb{R}^2$ nemaju takva svojstva.

Francuski matematičar Henri Poincaré (1854.–1912.) začetnik je kvalitativne teorije običnih diferencijalnih jednadžbi. U svom radu iz 1881. godine, posvećenom nebeskoj mehanici, proučavao je rješenja autonomnih sustava diferencijalnih jednadžbi, ali bez traženja eksplicitnog rješenja, jer to općenito i nije moguće. Poincaré je proučavao problem triju tijela: Sunca, Zemlje i Mjeseca. Nakon jednostavnih Keplerovih zakona koji su opisivali gibanje Sunca i Zemlje tj. problem dvaju tijela, očekivalo se da će i problem triju tijela biti relativno lako rješiv, što se pokazalo kao velika zabluda. Poincaré je predložio novi pristup problemu. Umjesto točnih pozicija planeta u bilo kojem trenutku, pitajmo se nešto drugo! Je li Sunčev sustav stabilan zauvijek? Odgovora na to pitanje nema do danas, ali takav pristup rješavanju problema razvio je novu teoriju čije osnove upravo počinjemo učiti. Zanimljivo je napomenuti da je Poincaré prvi predvidio postojanje sustava koji imaju veliku osjetljivost na početne uvjete, što znači da mala promjena početnih uvjeta daje posve različito ponašanje sustava. Takvo ponašanje nazivamo kaotičnim.

**Primjer 1.** Teorija koja se bavi nelinearnim diferencijalnim jednadžbama često kao najjednostavniji primjer uzima diferencijalnu jednadžbu jednostavnog njihala. Zanima nas period oscilacija njihala. Neka njihalo ima krutu nit, odnosno šipku duljine $l$ i neka je masa $m$ skoncentrirana u točki na dnu niti. Neka je kut otklona $\theta$, uočimo da je $\theta$ funkcija ovisna o vremenu $t$, dakle $\theta = \theta(t)$, simbolom $g$ označit ćemo gravitacijsku konstantu.




*Sl. 1.1.*

Njihalo otklonimo za neki kut $\alpha$ i pustimo da titra pod utjecajem gravitacijske sile zanemarujući u računu djelovanje ostalih sila. U tom slučaju dobivamo diferencijalnu jednadžbu jednostavnog njihala

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{1}$$

čija ispravnost se može provjeriti u bilo kojoj knjizi o klasičnoj mehanici. Oznaka $\ddot{\theta}$ je druga derivacija funkcije po vremenu $t$, odnosno $\ddot{\theta} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$. U našem slučaju početni uvjeti su $\theta(0) = \alpha$ i $\dot{\theta}(0) = 0$ zbog početnog pomaka za zadani kut $\alpha$ i činjenice da smo njihalo samo ispustili iz ruke, a ne i gurnuli, početna kutna brzina je nula. Izraz $\dfrac{g}{l}$

je konstanta ovisna o duljini niti $l$, zbog jednostavnosti jednadžbe uzmimo $\frac{g}{l} = 1$, pa imamo

$$\ddot{\theta} + \sin\theta = 0.$$

Pokušajmo riješiti jednadžbu nekom od standardnih metoda za rješavanje diferencijalnih jednadžbi. Nakon uvedene supstitucije $w = \dot{\theta}$, računamo

$$\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = w\frac{dw}{d\theta},$$

i dobivamo jednadžbu

$$w\frac{dw}{d\theta} + \sin\theta = 0,$$

koja nakon separacije varijabli, integriranja, uvrštavanja početnog uvjeta i povratka na varijable $t$ i $\theta$ glasi

$$dt = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}.$$

Nakon korištenja trigonometrijskog identiteta $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$, uvođenja supstitucije $\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\phi$ i oznake $k = \sin\frac{\alpha}{2}$ dobivamo

$$dt = \pm\frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}},$$

čiji se integral ne može izraziti pomoću elementarnih funkcija. Takve integrale nazivamo eliptičkim integralima, a u ovom slučaju dobivamo eliptički integral prve vrste. Očito ne možemo doći do eksplicitnog izraza za $\theta(t)$, odnosno za period oscilacija $P(\alpha)$ uz početni otklon $\alpha$. Pritom period $P(\alpha)$ definiramo kao vrijeme potrebno da se njihalo odnjiše od jednog ekstrema do drugog i natrag tj. od $-\alpha$ do $\alpha$, pa je

$$P(\alpha) = 4\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}}.$$

Jedna od metoda koja nam može pomoći pri rješavanju ove jednadžbe je linearizacija, što znači da ćemo uzeti da je $\sin\theta \approx \theta$ pri čemu moramo imati na umu da ova aproksimacija vrijedi samo za male kutove. Dakle, za male $\theta$ imamo jednadžbu

$$\ddot{\theta} + \theta = 0$$

koju lako rješavamo pomoću karakteristične jednadžbe $\lambda^2 + 1 = 0$. Iz $\lambda = \pm i$ slijedi da je opće rješenje linearizirane jednadžbe

$$\theta(t) = C_1\sin t + C_2\cos t.$$

Pokušajmo na još jedan način riješiti početnu jednadžbu (1). Zapišimo je kao sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{d\theta}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -\sin\theta$$

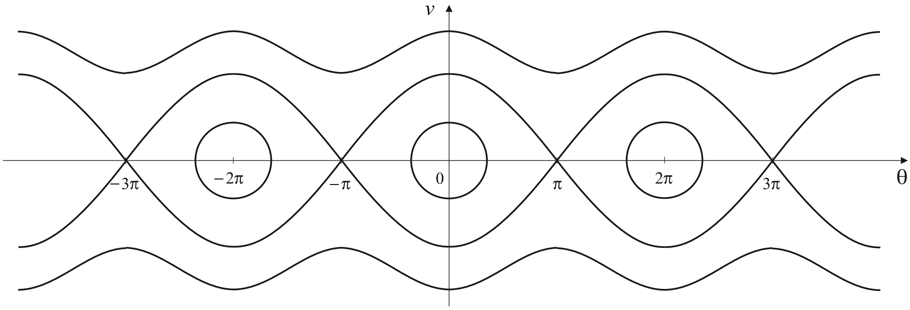
u kojemu se s desne strane ne nalazi varijabla $t$, pa takav sustav nazivamo autonomnim. Podsjetimo, kvalitativna teorija se bavi diferencijalnim jednadžbama, ali bez traženja eksplicitnog rješenja, jer to općenito i nije moguće. U ovom našem primjeru imamo specijalan slučaj u kojem je moguće naći eksplicitno rješenje sustava. Podijelimo li drugu jednadžbu prvom, dobit ćemo jednadžbu

$$\frac{dv}{d\theta} = -\frac{\sin\theta}{v}$$

koju rješavamo separacijom varijabli i dobivamo opće rješenje

$$\frac{v^2}{2} - \cos\theta = C. \tag{2}$$

Familiju krivulja koje čine opće rješenje nacrtat ćemo u $(\theta, v)$ ravnini i dobiti sliku 1.2.

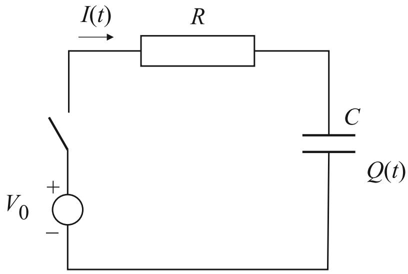



*Sl. 1.2.*

Uočimo da smo zapravo crtali u ravnini $(\theta, \dot{\theta})$. Takav prikaz nazivamo faznim portretom zadanog sustava. Iz faznog portreta je jasno da se radi o periodičkom gibanju, ali period oscilacija ne znamo. Na ovaj primjer vratit ćemo se kasnije u poglavlju 1.7. i objasniti kako s malo naučene teorije možemo nacrtati fazni portret bez poznavanja jednadžbe (2).

Za rješavanje mnogih problema dovoljno je znati kvalitativno ponašanje rješenja, nije potrebno znati jednadžbu rješenja. Ilustrirajmo to još jednim jednostavnim primjerom.

**Primjer 2.** Promatramo strujni krug prikazan na slici 1.3. Imamo istosmjerni naponski izvor konstantnog napona $V_0$, $R$ je otpor, $C$ kapacitet kondenzatora, $I(t)$ struja, a $Q(t)$ je naboj na kondenzatoru. Zanima nas što se događa s nabojem od trenutka kad zatvorimo strujni krug, oscilira li on ili se stabilizira.

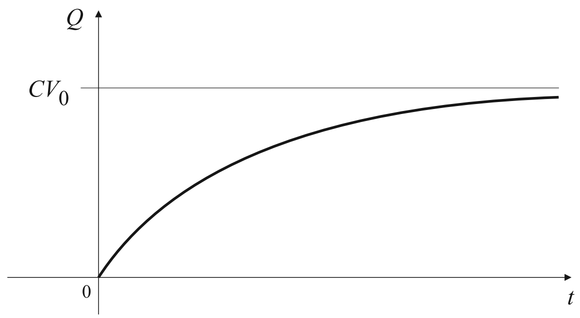



*Sl. 1.3.*

Nakon zatvaranja, pad napona u strujnom krugu jednak je $V_0 = RI + \dfrac{Q}{C}$. Koristeći $\dot{Q} = I$ dobivamo diferencijalnu jednadžbu

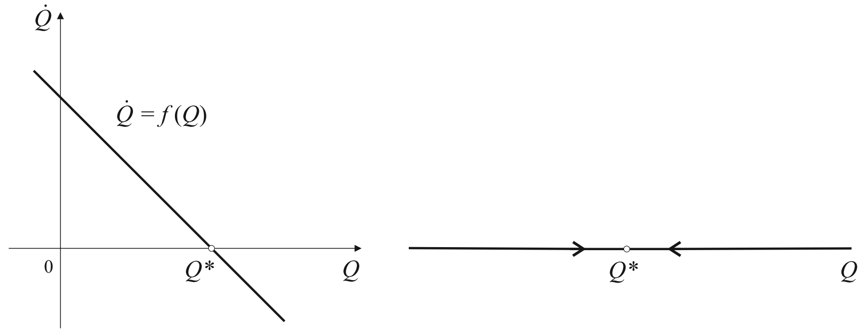
$$\dot{Q} = \frac{V_0}{R} - \frac{Q}{RC}.$$

Pretpostavljamo da je u trenutku $t = 0$ kondenzator prazan, odnosno da je $Q(0) = 0$. Gornju jednadžbu možemo riješiti klasično, separacijom varijabli i dobiti eksplicitno rješenje prikazano na slici 1.4.




*Sl. 1.4.*

Kvalitativni pristup će dati fazni portret na pravcu, jer ovdje nemamo sustav jednadžbi, već samo jednu jednadžbu. Definirajmo linearnu funkciju $f(Q) = \dfrac{V_0}{R} - \dfrac{Q}{RC}$, lako vidimo da je njezina nultočka $Q^* = CV_0$, a funkcija je padajuća. Iz $\dot{Q} > 0$ za $Q < Q^*$ zaključujemo da $Q$ raste na tom dijelu, a iz $\dot{Q} < 0$ za $Q > Q^*$ zaključujemo da $Q$ pada na tom dijelu i dobivamo fazni portret sa slike 1.5.




*Sl. 1.5.*

Iz faznog portreta na pravcu vidimo da naboj $Q(t)$ teži prema $Q^* = CV_0$ kad $t \to \infty$ bez obzira na početne uvjete, dakle stabilizira se, što nas je i zanimalo. Slika 1.4 s eksplicitnim rješenjem pokazuje isto, ali daje još i informaciju o vremenu $t$.

## 1.2. Osnovni pojmovi o dinamičkim sustavima

U prethodnom poglavlju naveli smo dva primjera diferencijalnih jednadžbi i spomenuli da ćemo se baviti njima. U ovom poglavlju želimo uspostaviti vezu između pojma diferencijalne jednadžbe i pojma dinamičkog sustava.

*Dinamički sustav* je matematički objekt kojim se opisuje razvoj nekog fizikalnog, biološkog ili nekog drugog sustava tijekom vremena. Definiran je *faznim prostorom i jednoparametarskom familijom preslikavanja*. Mi ćemo proučavati sustave kojima je fazni prostor $\mathbb{R}^n$ U tom slučaju imamo familiju preslikavanja $\varphi^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Parametar $t$ koji predstavlja vrijeme može biti realan broj $t \in \mathbb{R}$, pa tada kažemo da imamo *neprekinuto vrijeme* ili može biti $t \in \mathbb{Z}$, odnosno $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, pa tada kažemo da je *vrijeme diskretno*. Pritom za svaki $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ zahtijevamo da vrijedi

$$1)\ \varphi^\circ(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$
$$2)\ \varphi^t(\varphi^s(\mathbf{x})) = \varphi^{t+s}(\mathbf{x}), \quad \text{za svako} \quad t, s,$$

ili kraće $\varphi^\circ = id$, $\varphi^t \circ \varphi^s = \varphi^{t+s}$, pri čemu je $\varphi^1(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$. Mi ćemo se baviti dinamičkim sustavima s neprekinutim vremenom, jer se diferencijalnim jednadžbama pridružuju takvi sustavi, što ćemo ubrzo vidjeti na konkretnim primjerima. Diskretni dinamički sustavi definirani su rekurzivnim jednadžbama. Generira ih funkcija $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, a $\varphi^n = \varphi \circ \ldots \circ \varphi$ shvaćamo kao $\varphi^t$ za $t = n$. Za diskretne sustave vrijedi analogna teorija ovoj teoriji koju ćemo proučavati za neprekinute sustave.

**Primjer 3.** Neka je zadan sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= 2y. \end{aligned} \tag{3}$$

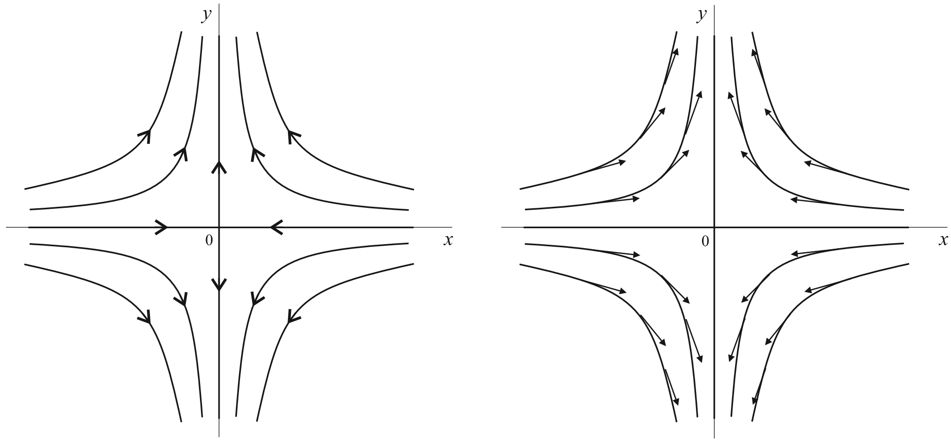
Nađimo preslikavanje $\varphi^t$ iz definicije dinamičkog sustava. Nakon uvrštavanja $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ i $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$, rješavajući sustav

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} &= -dt \\ \frac{dy}{y} &= 2dt \end{aligned} \tag{4}$$

dobivamo

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{-t} \\ y &= C_2 e^{2t}, \end{aligned} \tag{5}$$

čime je definirano preslikavanje $\varphi^t(C_1, C_2) = (C_1 e^{-t}, C_2 e^{2t})$, pri čemu je $(C_1, C_2) = (x(0), y(0))$. Uočimo još da eliminacijom parametra $t$ iz (5) ili direktnim rješavanjem sustava (3) dobivamo krivulju $y = \dfrac{C}{x^2}$, pri čemu je $C = C_1^2 C_2$. Fazni portret sustava nalazi se na slici 1.6, lijevo.




*Sl. 1.6.*

**Napomena.** Vektorsko polje $\mathbf{F}(x, y) = -x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$ skicirano je na slici 1.6, desno. Uočimo da je to vektorsko polje tangencijalno na krivulje koje su rješenja sustava

$$\dot{x} = -x$$
$$\dot{y} = 2y$$

iz prethodnog primjera. Proučavanje autonomnih sustava diferencijalnih jednadžbi je zapravo ekvivalentno proučavanju vektorskih polja.

Nastavimo s osnovnim definicijama vezanim uz pojam dinamičkog sustava, a malo kasnije obrazložit ćemo postojanje preslikavanja $\varphi^t$ za veliku klasu diferencijalnih jednadžbi. Iz svojstava 1) i 2) definicije dinamičkog sustava s realnim ($t \in \mathbb{R}$) ili diskretnim vremenom ($t \in \mathbb{Z}$) slijedi da postoji inverzno preslikavanje $(\varphi^t)^{-1} = \varphi^{-t}$, jer $\varphi^t \circ \varphi^{-t} = \varphi^\circ = id$, pa takav sustav nazivamo *invertibilnim.* Za podskup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ i svako $t > 0$, bez obzira je li sustav invertibilan, definiramo skup $\varphi^{-t}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \varphi^t(\mathbf{x}) \in A\}$ tj. skup svih $\mathbf{x}$ koje je funkcija $\varphi^t$ preslikala unutar skupa $A$. Ako je za svaki $t \in \mathbb{R}$ preslikavanje $\varphi^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ neprekinuto, odnosno klase $C^k$, onda je sustav *neprekinut*, odnosno *klase* $C^k$. Svaki $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ definira preslikavanje $t \mapsto \varphi^t(\mathbf{x})$, $t \in \mathbb{R}$ koje se zove *gibanje* dinamičkog sustava s početkom u $\mathbf{x}$ u trenutku $t = 0$.

Slika $\gamma(\mathbf{x})$ gibanja s početkom u $\mathbf{x}$ je *orbita ili trajektorija* točke $\mathbf{x}$, što znači da je $\gamma(\mathbf{x}) = \{\varphi^t(\mathbf{x})\}_{t\in\mathbb{R}}$. Dvije različite trajektorije ne mogu imati neku zajedničku točku. Orbita za koju vrijedi $\gamma(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}\}$ zove se *fiksna, kritična, ravnotežna ili singularna točka* sustava. Ako postoji $T > 0$ takav da je $\varphi^t(\mathbf{x}) = \varphi^{t+T}(\mathbf{x})$, za svaki $t \in \mathbb{R}$, kažemo da je orbita *periodička.* Ako je $T$ je najmanji pozitivni broj s tim svojstvom, kažemo da je orbita $T$*-periodička* s periodom $T$.

Singularne točke sustava i periodičke orbite zanimljivi su i važni objekti proučavanja. Proučavanje dvodimenzionalnih autonomnih sustava, kao u Primjerima 1 i 3, svodi se na proučavanje singularnih točaka i periodičnih orbita koje u svojoj okolini nemaju drugih periodičnih orbita. Takve izolirane periodične orbite zvat ćemo *graničnim ciklusima. Fazni portret* je skup svih orbita. Na slici 1.29 u poglavlju 1.4. vidimo fazni portret s graničnim ciklusom. Općenitije, proučavanje dinamičkih sustava se u dobroj mjeri sastoji od proučavanja njihovih invarijantnih skupova. To su skupovi koji imaju svojstvo da ga točka ne može napustiti kad jednom dođe u njega. Jasno je da su singulariteti i izolirane periodičke orbite takvi skupovi, ali već kod trodimenzionalnih autonomnih sustava postoje drukčiji invarijantni skupovi i to vrlo neobični. Napišimo ipak preciznu definiciju, a nakon toga pogledajmo primjer. Skup $A \subset \mathbb{R}^n$ je *invarijantan* u odnosu na familiju preslikavanja, odnosno dinamički sustav $\varphi^t$ ako je $\varphi^t(A) \subseteq A$ za svaki $t \in \mathbb{R}$.

**Primjer 4.** Za sustav (3) iz Primjera 3:
a) provjerimo da je sustav invertibilan,
b) nađimo singularitete i ispitajmo postojanje periodičkih orbita,
c) provjerimo da su koordinatne osi invarijantni skupovi.

$\triangleright$ a) Definirano je preslikavanje $\varphi^t(C_1, C_2) = (C_1e^{-t}, C_2e^{2t})$, a njegovo inverzno je $\varphi^{-t}(C_1, C_2) = (C_1e^t, C_2e^{-2t})$.

b) Jedina singularna točka je $(0,0)$ jer je to jedino rješenje sustava

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x = 0 \\ \dot{y} &= 2y = 0, \end{aligned}$$

ili drukčije rečeno jedina fiksna točka od $\varphi^t(C_1, C_2) = (C_1e^{-t}, C_2e^{2t})$, pri čemu je $(C_1, C_2) = (x(0), y(0))$. Budući da preslikavanje $\varphi^t$ nije periodičko, nema periodičkih orbita.

c) Uočimo da ako uzmemo točku s $x$-osi nakon preslikavanja $\varphi^t(C_1, 0) = (C_1e^{-t}, 0)$ dobivamo opet točku na $x$-osi, pa iz toga zaključujemo da je os $x$ invarijantan skup. Analogno dobivamo da je os $y$ isto invarijantan skup. Kasnije će biti više riječi o invarijantnim skupovima. $\triangleleft$

Da bismo obrazložili postojanje preslikavanja $\varphi^t$ za klasu autonomnih diferencijalnih jednadžbi, podsjetit ćemo se teorema o egzistenciji i jednoznačnosti rješenja diferencijalne jednadžbe. Najprije ćemo navesti teoreme koji su obrađeni u Matematici 2, a zatim ćemo ih blago preoblikovati da bi bili usklađeni sa situacijom koju ćemo promatrati.

**Teorem 1.** (Peano) *Neka je funkcija $f(x,y)$ neprekinuta na nekom pravokutniku $D$ oko točke $(x_0, y_0)$. Tada Cauchyjev problem*

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{6}$$

*ima bar jedno rješenje u nekom okolišu točke $x_0$.*

**Teorem 2.** (Picard) *Neka funkcija $f(x,y)$ definirana nekom pravokutniku $D$ oko točke $(x_0, y_0)$ ima sljedeća svojstva:*
1) *$f$ je neprekinuta na $D$;*
2) *$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ je omeđena na $D$.*

*Tada postoji interval $(x_0 - h, x_0 + h)$ na kojem postoji jednoznačno rješenje Cauchyjevog problema (6).*

Neka je zadana jednadžba na otvorenom skupu $M \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{7}$$

pri čemu je $\mathbf{f} : M \to \mathbb{R}^n$ vektorsko polje $k$ puta neprekinuto diferencijabilno tj. klase $C^k$, $k \geqslant 1$. Uz oznake $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ i $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ jednadžbu (7) možemo u komponentama zapisati kao

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Napišimo Peanov i Picardov teorem za diferencijalnu jednadžbu (7), odnosno za autonomni sustav diferencijalnih jednadžbi u $\mathbb{R}^n$.

**Teorem 3.** *Neka je vektorsko polje* $\mathbf{f}$ *klase* $C^1$ *na otvorenom skupu* $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{M}$. *Tada postoji* $a > 0$ *takav da jednadžba*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \tag{9}$$

*ima jednoznačno rješenje* $\mathbf{x}(t)$ *na intervalu* $(-a, a)$.

Uočimo da funkcija klase $C^1$ zadovoljava uvjete Picardovog teorema, što znači da bi uvjete teorema za autonomne sustave mogli oslabiti, a da i dalje imamo egzistenciju i jednoznačnost rješenja. Zahtjevi na vektorsko polje $\mathbf{f}$ mogu se i pojačati, uzimajući $\mathbf{f}$ klase $C^k$ dobivamo da je rješenje klase $C^{k+1}$.

Ako teorem o lokalnoj jedinstvenosti rješenja diferencijalne jednadžbe primijenimo na jednadžbu (7), dobivamo da za svako $\mathbf{x}_0 \in M$ postoji okolina $U$, broj $\varepsilon > 0$ i preslikavanje $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$ tako da vrijedi

a) $\varphi(\cdot, \cdot)$ je $k+1$ puta diferencijabilno u prvoj varijabli (vrijeme) i $k$ puta diferencijabilno po drugoj varijabli (položaj).

b) Za svaki $\mathbf{x} \in U$, $\varphi(\cdot, \mathbf{x})$ je lokalno jednoznačno rješenje jednadžbe (7) na vremenskom intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$ s početkom $\mathbf{x}$ za vrijeme $t = 0$.

Preslikavanje $\varphi^t = \varphi(t, \cdot)$ nazivamo *tokom klase* $C^k$ jednadžbe (7), a gibanja $\varphi(\cdot, \mathbf{x})$ nazivamo *integralnim krivuljama*.

Uz dodatne uvjete na $\mathbf{f}$ sva lokalna rješenja od (7) mogu se jednoznačno produljiti na čitav $\mathbb{R}$. U tom slučaju postoji preslikavanje $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ koje zadovoljava uvjete 1) i 2) iz definicije dinamičkog sustava, a isto tako i uvjete a) i b), ali ne više samo lokalno. Često se u uvodnom poglavlju udžbenika iz diferencijalnih jednadžbi navodi teorem koji ne govori samo o lokalnoj egzistenciji i jedinstvenosti rješenja, već i o maksimalnom intervalu na kojem to rješenje postoji.

Navedimo primjer koji govori o maksimalnom intervalu egzistencije rješenja.

**Primjer 5.** Odredimo maksimalan interval na kojem postoji rješenje jednadžbe

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 \\ x(0) &= 1. \end{aligned}$$

Integriranjem i uvrštavanjem početnog uvjeta dobivamo

$$x(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Maksimalni interval na kojem je rješenje definirano u okolini $t = 0$ je interval $(-\infty, 1)$.

Navedimo sad teorem Wintnera i Contija koji govori o dodatnim uvjetima za produljenje rješenja. U teoremu s $\|\mathbf{x}\|$ označavamo euklidsku normu vektora $\mathbf{x}$.

**Teorem 4.** *Neka je*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{10}$$

*pri čemu je* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *klase* $C^k$. *Ako postoji neprekinuta funkcija* $h : [0,\infty) \to [1,\infty)$, *takva da je* $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leqslant h(\|\mathbf{x}\|)$ *za sve* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *i vrijedi* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{ds}{h(s)} = \infty$, *onda se svako rješenje od (10) može produljiti na čitav* $\mathbb{R}^+$.

Za prethodni bi primjer bilo prirodno uzeti funkciju $h(x) = x^2+1$, $s = x = \|\mathbf{x}\| \in \mathbb{R}$, jer vrijedi $x^2 \leqslant x^2+1$, ali dobivamo $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$. Iz eksplicitnog rješenja je bilo jasno da produljenja nema.

Funkcije prikladne za primjenu Wintner-Contijevog teorema su $h(s) = Cs+1$ i $h(s) = Cs|\ln s|+1$, gdje je $C$ pozitivna konstanta.

**Primjer 6.** Zadan je sustav koji se pojavljuje u meteorologiji

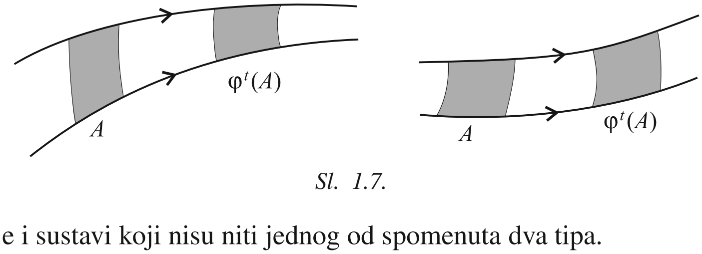
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y-x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \qquad \sigma, r, b > 0, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned} \tag{11}$$

Uočimo da zadani sustav ima $C^\infty$ tok na $\mathbb{R}^3$ jer su komponentne funkcije sustava klase $C^\infty$.

Gornji sustav nazivamo Lorenzovim sustavom konvekcijske turbulencije, pri čemu parametar $\sigma$ nazivamo Prandtlovim brojem, a parametar $r$ Rayleighovim brojem. E. N. Lorenz je meteorolog i matematičar rođen 1917. godine, u svom radu iz 1963. proučavao je gore navedeni sustav i otkrio osjetljivost sustava na početne uvjete. Uz malu promjenu početnih uvjeta trajektorije sustava su bile potpuno različite. Takvo ponašanje sustava nazivamo kaotičnim. Kod Lorenzovog sustava otkriven je i vrlo komplicirani invarijantni skup u kojemu završavaju sve trajektorije. Njegovo postojanje otkriveno je korištenjem činjenice da je sustav disipativan.

Definirajmo pojam disipativnosti i konzervativnosti sustava.

Ako invertibilni dinamički sustav $\{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ na $M \subseteq \mathbb{R}^n$ smanjuje volumen nazivamo ga *disipativnim* tj. za svaki podskup $A \subseteq M$ s pozitivnim $n$-dimenzionalnim volumenom $\mathrm{vol}\,(A)$ i za svaki $t \geqslant 0$ vrijedi $\mathrm{vol}\,(\varphi^t(A)) < \mathrm{vol}\,(A)$. Ako čuva volumen nazivamo ga *konzervativnim*, što znači da vrijedi $\mathrm{vol}\,(\varphi^t(A)) = \mathrm{vol}\,(A)$ za $t \geqslant 0$.




*Sl. 1.7.*

Postoje i sustavi koji nisu niti jednog od spomenuta dva tipa.

Za diskretne sustave postoji jednostavan kriterij kojim se određuje je li sustav disipativan ili konzervativan. Neka je $\varphi : M \to M$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$, preslikavanje klase $C^k$ s $C^k$ inverzom $\varphi^{-1}$. S $D\varphi(\mathbf{x})$ označimo Jacobijevu matricu od $\varphi$ u točki $\mathbf{x} \in M$. Diskretni sustav $\mathbf{x}_{n+1} = \varphi(\mathbf{x}_n)$, $n \in \mathbb{Z}$ je disipativan ako je $|\det D\varphi(\mathbf{x})| < 1$ za sve $\mathbf{x}$, odnosno konzervativan ako je $|\det D\varphi(\mathbf{x})| = 1$.

**Primjer 7.** Preslikavanje $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = (y + 1 - ax^2, bx)$ s parametrima $a > 0$, $b \neq 0$, nazivamo Henonovim preslikavanjem po M. Henonu, francuskom astronomu i matematičaru. Sustavom rekurzivnih jednadžbi

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n + 1 - ax_n^2 \\ y_{n+1} &= bx_n, \qquad\qquad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

definiran je diskretni dinamički sustav. Ispitajmo je li disipativan ili konzervativan.

Jacobijeva determinanta jednaka je

$$\det D\varphi(x,y) = \begin{vmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix},$$

dakle $\det D\varphi(x,y) = |b|$ što znači da je sustav disipativan za $|b| < 1$, a konzervativan za $|b| = 1$.

Za diferencijalnu jednadžbu (7), odnosno za neprekinuti dinamički sustav definiran tokom te jednadžbe kriterij konzervativnosti ili disipativnosti dan je pomoću Liouvilleova teorema. Napišimo kriterij koji slijedi iz Liouvilleovog teorema i to za sustav koji se sastoji od triju jednadžbi. Ako je $\operatorname{div}\mathbf{f}(x,y,z) < 0$, na $M$, onda je sustav disipativan, a ako je $\operatorname{div}\mathbf{f}(x,y,z) = 0$, na $M$, onda je sustav konzervativan.

Navedimo Liouvilleov teorem, jer nam on daje više informacija o tome što se događa s volumenom nakon djelovanja toka.

**Teorem 5.** *Neka je $\{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ tok od (7), $D \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^3$ bilo koji otvoreni omeđeni skup. Označimo $D_t = \varphi^t(D)$, $V_t = \operatorname{vol}(D_t)$, tada za svaki $t \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\frac{dV_t}{dt} = \int\int\int_{D_t} \operatorname{div}\mathbf{f}(x,y,z)\,dxdydz.$$

Ovaj teorem vrijedi i za tok u $\mathbb{R}^n$.

**Primjer 8.** Ispitajmo što se događa s volumenom kod Lorenzovog sustava (11). Divergencija polja $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) = (\sigma(y-x), rx - y - xz, xy - bz)$ jednaka je $\operatorname{div}\mathbf{f}(x,y,z) = -(\sigma + 1 + b) < 0$, pa odmah iz Teorema 1 zaključujemo da je sustav disipativan. Računajući integral iz teorema

$$\frac{dV_t}{dt} = -\int\int\int_{D_t} (\sigma + 1 + b)\,dxdydz = -(\sigma + 1 + b)V_t$$

i rješavajući

$$\frac{dV_t}{dt} = -(\sigma + 1 + b)V_t$$

separacijom varijabli dobivamo

$$V_t = Ce^{-(\sigma+1+b)t}$$

iz čega je jasno da za $t \to \infty$ volumen $V_t$ teži nuli.

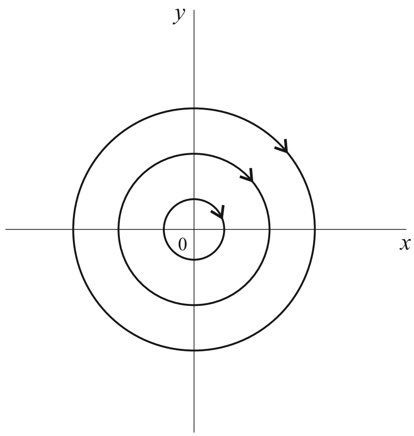
**Primjer 9.** Primjer konzervativnog sustava je Hamiltonov sustav,

$$\dot{x} = H'_y$$
$$\dot{y} = -H'_x,$$

pri čemu je $H$ funkcija klase $C^2$ i nazivamo je hamiltonijanom. Po Schwarzovom teoremu vrijedi $\operatorname{div}(H'_y, -H'_x) = H''_{yx} - H''_{xy} = 0$. Ako je hamiltonijan $H(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, onda je pripadni sustav

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x.$$

Uočimo da su ravnotežne točke Hamiltonovog sustava zapravo stacionarne točke hamiltonijana. Fazni portret lako crtamo, dijeleći jednadžbe i rješavajući ih dobivamo da su integralne krivulje središnje kružnice, kao što se vidi na slici 1.8. Općenito, singulariteti konzervativnih polja bit će samo tipovi kao na slici 1.6 i slici 1.8, što ćemo vidjeti kasnije u poglavlju koje govori o metodi energije. Konzervativni sustavi nemaju singularnih točaka iz kojih izvire tok, niti onih u koje ponire tok.




*Sl. 1.8.*

**Napomena.** Prisjetimo se pojma konzervativnog vektorskog polja $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Polje $\mathbf{f}$ je konzervativno ako postoji neka skalarna funkcija $w$, takva da je $\operatorname{grad} w = \mathbf{f}$. Pojam se pojavio kod proučavanja krivuljnih integrala i za takva polja rad sile definirane tim poljem nije ovisio o putu između zadanih točaka. Proučavanje Hamiltonovog sustava (ili nekog drugog) ekvivalentno je proučavanju diferencijalne forme $dw = H'_x dx + H'_y dy$. Računamo li integral diferencijalne forme $dw$ po nekoj krivulji, između zadanih točaka, očito po Newton-Leibnizovoj formuli taj integral ne ovisi o putu integracije. Drugim riječima, konzervativna polja ne gube energiju.

## 1.3. Linearni sustavi

U ovom poglavlju definirat ćemo osnovne pojmove i navesti osnovne teoreme kvalitativne teorije diferencijalnih jednadžbi u ravnini $\mathbb{R}^2$, a sve ćemo to prikazati na primjerima. Teorem trivijalizacije toka dinamičkog sustava (engl. *flow-box* teorem) nam kaže da je svaki tok lokalno sastavljen od usporednih trajektorija (tok je lokalno "prugast"), ako nismo u blizini singulariteta. Prema tome, posebnu pažnju ćemo posvetiti singularitetima, ali i periodičkim orbitama jer pojava singulariteta i periodičkih orbita kvalitativno mijenja ponašanje sustava. Zapaziti kvalitativnu promjenu ponašanja u praksi je od vrlo velike važnosti.

Najprije ćemo klasificirati singularitete linearnih sustava u ravnini. Uvijek, zbog jednostavnosti, pretpostavljamo da sustav ima singularitet u ishodištu, a ako to nije slučaj, onda translatiramo singularitet u nulu. Isto tako, ako sustav ima više singulariteta, svaki ispitujemo posebno. Promatrajmo sustav

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \tag{12}$$

koji možemo kraće napisati pomoću matrične jednadžbe

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{13}$$

pri čemu je

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

a $\mathbf{x} = (x, y)^T$. Uvedimo linearnu promjenu kooordinata

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y} \tag{14}$$

u sustav (12) da bismo dobili jednostavniju Jacobijevu matricu sustava. Deriviranjem (14) dobivamo $\dot{\mathbf{x}} = P\dot{\mathbf{y}}$. Iz (13) dobivamo sustav

$$P\dot{\mathbf{y}} = AP\mathbf{y} \tag{15}$$

tj.

$$\dot{\mathbf{y}} = P^{-1}AP\mathbf{y} \tag{16}$$

koji je ekvivalentan početnom sustavu. Označimo $B = P^{-1}AP$. Prema Jordanovom teoremu matrica $P$ se može odabrati tako da matrica $B$ bude jednog od sljedećih oblika:

$$1) \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$2) \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$3) \quad B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Podsjetimo se da su u slučaju 1) $\lambda_1, \lambda_2$ realne svojstvene vrijednosti matrice $A$, pri čemu mogu biti i jednake, u slučaju 2) $\lambda$ je dvostruka svojstvena vrijednost od $A$, a u slučaju 3) $A$ ima kompleksno konjugirane svojstvene vrijednosti $\lambda_{1,2} = a \pm bi$, $b \neq 0$. Ne promatramo slučaj ako je jedna svojstvena vrijednost jednaka nuli, jer tada nemamo samo jednu singularnu točku, već imamo cijelu os koja se sastoji od singularnih točaka.

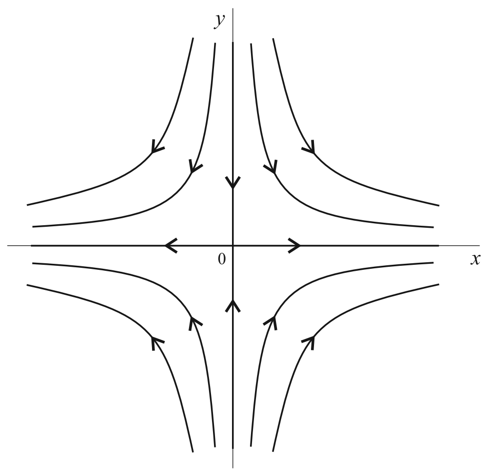
Promatrajmo najprije slučaj 1). Sustav $\dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{y}$ uz oznaku $\mathbf{y} = (x, y)$ prelazi u

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda_1 x \\ \dot{y} &= \lambda_2 y \end{aligned} \tag{17}$$

u kojemu svaku jednadžbu riješimo pojedinačno i dobivamo

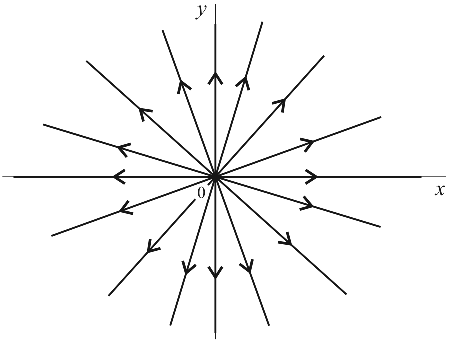
$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) &= C_2 e^{\lambda_2 t}. \end{aligned}$$

Eliminacijom varijable $t$ dobivamo jednadžbu familije integralnih krivulja $y = Cx^{\lambda_2/\lambda_1}$, za $C = C_1^{-\lambda_2/\lambda_1} C_2$. Orijentaciju trajektorije određujemo promatranjem rastu li varijable $x, y$ ili padaju kad $t \to \infty$. U slučaju $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ orijentacija trajektorije na osi $x$ će biti suprotna od smjera rasta varijable $x$, a na osi $y$ u smjeru rasta.

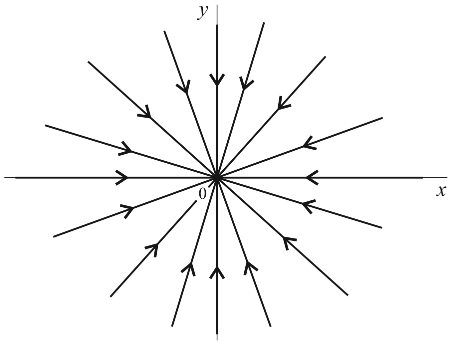



*Sl. 1.9.*

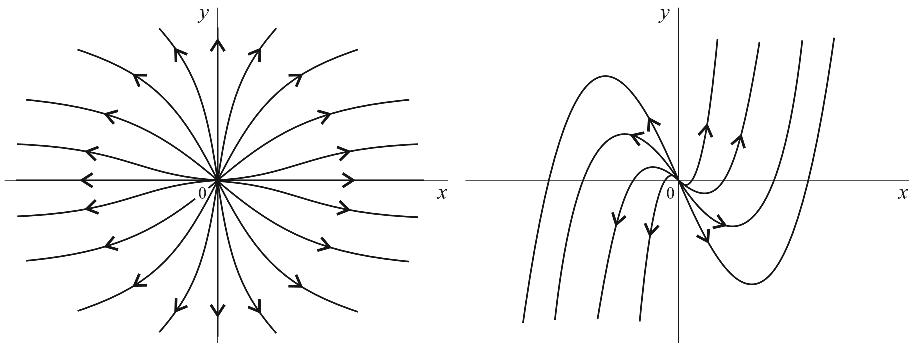
Uz uvjet da su svojstvene vrijednosti različitog predznaka kažemo da je singularitet tipa *sedla*, a ako su istog predznaka tada imamo *čvor*. Ako su svojstvene vrijednosti pozitivne, onda takav tip čvora iz kojeg izvire tok nazivamo *izvorom*, a ako su negativne, tok ponire, pa točku zovemo *ponorom*. Ponor je ujedno i privlačna točka toka. Pravi čvor je u slučaju $\lambda_1 = \lambda_2$, a matrica se može dijagonalizirati. Nepravi čvor imamo za svojstvene vrijednosti istog predznaka za koje je $\lambda_1 \neq \lambda_2$.



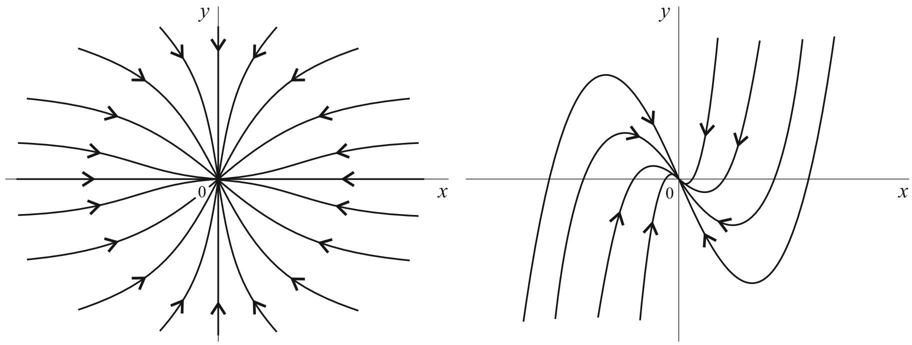

*Sl. 1.10.*




*Sl. 1.11.*




*Sl. 1.12.*




*Sl. 1.13.*

2) U ovom slučaju isto imamo nepravi čvor.

3) Pogledajmo sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - by \\ \dot{y} &= bx + ay.\end{aligned} \tag{18}$$

Njega možemo riješiti u polarnim koordinatama $(r, \varphi)$. Uvedimo promjenu kooordinata

$$\begin{aligned}x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi.\end{aligned}$$

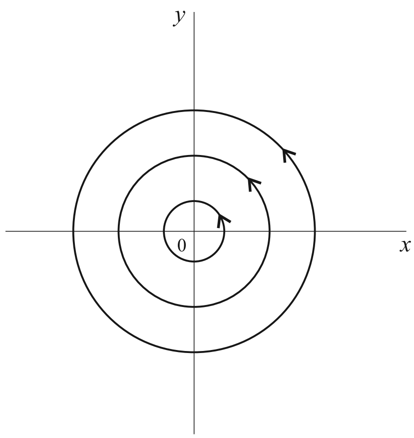
Nakon deriviranja dobivamo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{r}\cos\varphi - \dot{\varphi}\, r\sin\varphi \\ \dot{y} &= \dot{r}\sin\varphi + \dot{\varphi}\, r\cos\varphi.\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u (18) dobivamo sustav

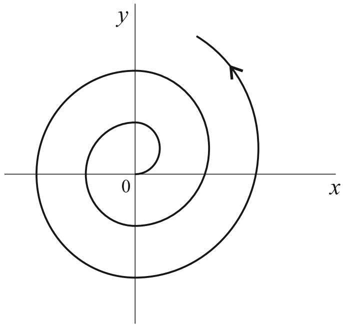
$$\begin{aligned}\dot{r} &= ar \\ \dot{\varphi} &= b,\end{aligned}$$

koji možemo riješiti i dobiti jednadžbe integralnih krivulja u polarnim koordinatama. Za $a = 0$ svojstvene vrijednosti su čisto imaginarne, a integralne krivulje kružnice. Općenitije, tip singulariteta koji okružuje familija zatvorenih krivulja naziva se *centar*. Za pozitivan $b$ orijentacija na zatvorenoj krivulji je pozitivna, za analogno je negativna.

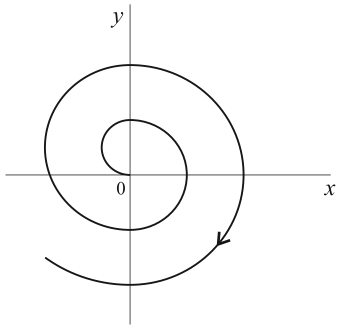



*Sl. 1.14.*

Ako je $a \neq 0$, onda su integralne krivulje spirale. Takav singularitet nazivamo *fokusom*. Ovakav fokus za koji je $a \neq 0$ naziva se još jakim ili jednostavnim fokusom, pri čemu za pozitivan $a$ je izvor, a za negativan ponor. Na slikama 1.15 i 1.16 su fokusi za $a, b > 0$ i za $a > 0$, $b < 0$.




Sl. 1.15.




Sl. 1.16.

Lako se provjeri da je rješenje sustava (18) u pravokutnim koordinatama

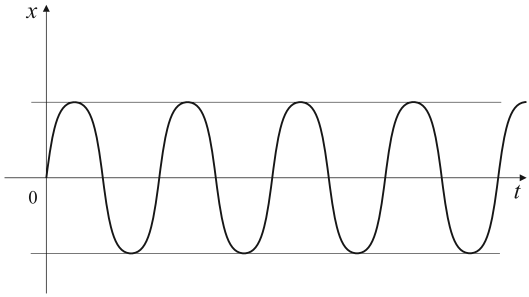
$$x(t) = C_1 e^{at} \cos(bt) - C_2 e^{at} \sin(bt)$$
$$y(t) = C_1 e^{at} \sin(bt) + C_2 e^{at} \cos(bt).$$

**Napomena.** Diferencijalna jednadžba $\ddot{x} + b^2 x = 0$, $b > 0$, ekvivalentna je sustavu

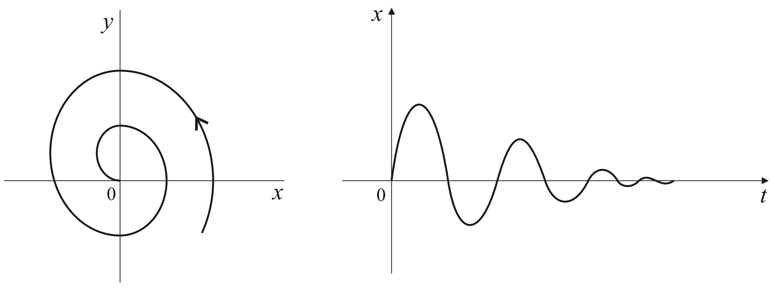
$$\dot{x} = by$$
$$\dot{y} = -bx.$$

Fazni portret je centar, a graf rješenja $x = x(t)$, prikazan na slici 1.17, ima neprigušene oscilacije.

Za slučaj $a \neq 0$ imali bismo fazni portret tipa fokusa, a graf $x = x(t)$ bi imao prigušene oscilacije, kao na slici 1.18 nacrtanoj za negativni $a$.




Sl. 1.17.




Sl. 1.18.

Proučavali smo slučaj kad je ishodište singularna točka. Pretpostavili smo da nemamo singularnih osi. Ako oko singulariteta postoji $\varepsilon$-okolina u kojoj nema drugih singulariteta, onda takav singularitet nazivamo *izoliranim*. Pogledajmo primjer sustava s neizoliranim singularitetima.

**Primjer 10.** Sustav

$$\dot{x} = -y(y-2)$$
$$\dot{y} = (x-2)(y-2)$$

ima singularnu os $y=2$ i izolirani singularitet $(2,0)$. Općenito sustav $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ ima isti fazni portret, do na orijentaciju, kao i sustav $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x})$ za $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \neq 0$ u okolini singulariteta. Množenje funkcijom $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ različitom od nule ne donosi nikakve nove singularitete, pa nema ni kvalitativne promjene ponašanja trajektorija.

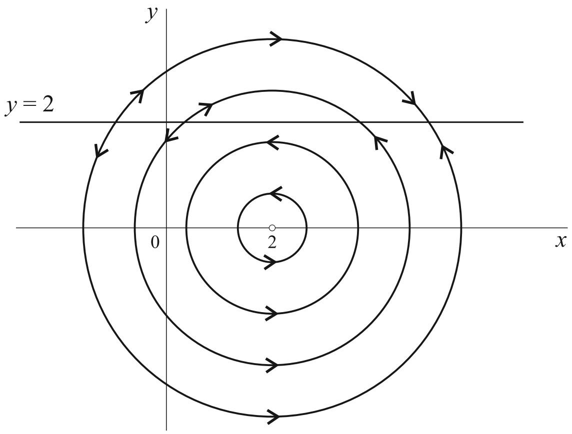
U točki $(2,0)$ imamo centar, jer nakon dijeljenja s $y-2$ i promjene koordinata

$$u = x-2$$
$$v = y$$

dobivamo sustav

$$\dot{u} = -v$$
$$\dot{v} = u.$$

Promatrajući početni sustav i promjenu predznaka od $\dot{x}$ i $\dot{y}$ zaključujemo da trajektorija pri prijelasku preko singularne osi mijenja orijentaciju. Fazni portret je prikazan na slici 1.19.




*Sl. 1.19.*

Definirat ćemo pojam stabilnosti i asimptotske stabilnosti za sustave u ravnini. Analogni pojmovi definiraju se i u $\mathbb{R}^n$. Neka je $(x_0, y_0)$ izolirana singularna točka sustava

$$\dot{x} = f(x,y)$$
$$\dot{y} = g(x,y). \tag{19}$$

Kažemo da je *stabilna* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da svako rješenje $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ sustava koje zadovoljava

$$\sqrt{(\varphi(0) - x_0)^2 + (\psi(0) - y_0)^2} < \delta$$

također zadovoljava i

$$\sqrt{(\varphi(t) - x_0)^2 + (\psi(t) - y_0)^2} < \varepsilon$$

za svaki $t \geqslant 0$. Drugim riječima, točka je stabilna ako svaka trajektorija koja počinje u blizini točke $(x_0, y_0)$ ostaje u blizini te točke. Ako točka nije stabilna, kažemo da je *nestabilna*.

Pojam asimptotske stabilnosti je jači pojam: svaka trajektorija koja započinje u dovoljno maloj okolini točke $(x_0, y_0)$ teži u tu točku.

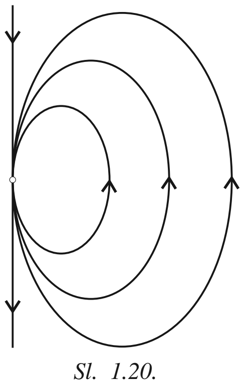
Preciznije, ako je $(x_0, y_0)$ singularna točka takva da vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = x_0,$$
$$\lim_{t\to\infty} \psi(t) = y_0,$$

onda kažemo da je $(x_0, y_0)$ *asimptotski stabilna* točka.

Klasificirajmo dosad spomenute tipove singulariteta u odnosu na upravo uvedeni pojam stabilnosti. Stabilni singulariteti su ponori, ponor može biti čvor ili fokus. Stabilan singularitet je i centar. Ponori su i asimptotski stabilni, a centar nije. Ostali tipovi su nestabilni.

Na slici 1.20 je singularna točka kakvu ne možemo dobiti kod linearnog sustava. Ta točka nije stabilna jer trajektorija izlazi iz okoline singulariteta, pa se opet vraća. Za stabilne točke, za svaku $\varepsilon$ okolinu rješenja može se naći $\delta$ okolina početne točke te trajektorije, takva da rješenje ostane u $\varepsilon$ okolini. Ovdje to nije slučaj, ne možemo naći takav $\delta$. Rješenje nam izlazi iz okoline singularne točke.



*Sl. 1.20.*