I

Uvod

TEMATIKA KNJIGE

Ova knjiga se bavi uvjetnom optimizacijom, preciznije onim dijelom uvjetne optimizacije u kojem je funkcija koju optimiziramo linearna, a uvjeti su u obliku linearnih nejednadžbi. Problemi tog tipa u literaturi su poznati kao `linearno programiranje` ili `linearna optimizacija`.

Knjiga započinje tipičnim problemima linearne optimizacije u praksi kao motivacijom, razrađuje algebarski pristup simpleks metodi preko pojma rječnika, nastavlja s osnovnim pojmovima afine geometrije (s naglaskom na konveksnost) koji kulminiraju teoremom o separaciji za konačno generirani konus. Posebna pažnja je posvećena rješivosti zadaće linearnog programiranja i dualnosti s naglaskom na važnost optimalne particije za razliku od bazične koju generira simpleks metoda. Od numeričkih metoda razrađena je simpleks metoda i njezine varijante te jedna od metoda unutarnje točke koja koristi logaritamsku kaznenu funkciju. Posebno poglavlje posvećeno je perturbaciji i analizi osjetljivosti. Detaljan prikaz svakog poglavlja dan je u posebnom poglavlju pod nazivom *O čemu knjiga govori*. Poznavaoci ove vrste literature upravo iz tog poglavlja mogu osjetiti *duh i tehniku pristupa* toj problematici, koja se razlikuje od knjige do knjige.

Zadaci u knjizi, skupljeni na kraju svakog odjeljka, imaju za cilj upotpunjavanje gradiva, njegovo proširenje, a služe i poticanju čitalaca na samostalan rad. Većina ih je riješena ili popraćena uputama i teorijskog su karaktera.

PREDZNANJE

Knjiga je prvenstveno namijenjena studentima viših godina matematike koji su ovladali osnovama linearne algebre: matricama i sustavima linearnih jednadžbi i elementima afine geometrije. Od analize i topologije na konačnodimenzionalnom prostoru dovoljno je znati pojam neprekidnosti, kompaktnosti i osnove diferencijalnog računa za razumijevanje metode unutarnje točke.

UPUTE ZA KORIŠTENJE

Materijal sakupljen u ovoj knjizi može se koristiti na više načina. Za samostalan rad preporučamo prvenstveno pročitati poglavlje *Motivacija* i poglavlje *Simpleks metoda. Algebarski pristup.* Student koji je ovladao osnovama linearne algebre i afine geometrije, može preskočiti te dijelove knjige i nastaviti s teoremom o separaciji za konačno generirani konus. Teorem dualnosti je nezaobilazan za razumijevanje simpleks metode i geometrije problema i mora naći mjesta u svakom sustavnom svladavanju gradiva.

Osnovna namjena knjige je da služi studentima kao udžbenik iz Linearnog programiranja. Ovisno o broju sati i predznanju studenta predlažemo tri stupnja: Elementarni kolegij, Napredniji kolegij i Napredni kolegij.

Elementaran kolegij. Ne pretpostavlja se veće matematičko obrazovanje.

- Poglavlje *Motivacija*. Primjeri iz tog poglavlja mogu se dopuniti ili zamijeniti zanimljivijim primjerima iz konkretnog područja, npr. ekonomija, odlučivanje...
- Poglavlje *Simpleks metoda. Algebarski pristup.*
- Dijelovi poglavlja *Geometrija poliedarskih skupova* koji se odnose na osnovne pojmove afine geometrije i konveksnosti, bez teorema o separaciji.

Napredniji kolegij. Pretpostavlja se poznavanje matričnog računa i osnova linearne algebre kao što je teorem o rangu i uvježbanost u rješavanju linearnih jednadžbi.

- Dijelovi poglavlja *Motivacija* i *Simpleks metoda. Algebarski pristup* mogu se koristiti kao materijal za vježbe i brzo uvođenje u problematiku.
- Poglavlje *Geometrija poliedarskih skupova*, osim općeg teorema o separaciji i nekih njegovih posljedica.
- Poglavlje *O rješivosti sustava jednadžbi* bez dijela koji obrađuje topologiju poliedarskih skupova.
- Poglavlje *O rješivosti zadaće linearnog programiranja* bez dijela koje obrađuje strogu komplementarnost i optimalnu particiju.
- Poglavlje *Numeričke metode*, samo simpleks metoda bez metode unutrašnje točke.

Spomenute teme obrađuju se na kolegiju *Uvod u optimizaciju* koji se sluša na prvoj godini diplomskog studija matematike na PMF-Matematičkom odjelu, Sveučilišta u Zagrebu. URL `http://www.math.hr/nastava/uopt` je WEB podrška za kolegij a na spomenutoj adresi nalazi se i link na Java aplet za simpleks metodu (utor apleta je J. Ivančić, dipl. inž. matematike), kao i slajdovi s predavanja dovoljni za razumijevanje simpleks metode. Aplet dozvoljava najviše 15 uvjeta i 15 varijabli. Osim što nudi primarno i dualno pivotiranje, aplet omogućava i analizu osjetljivosti zasnovanoj na baziČnoj particiji. Računanje dopustive točke (inicijalizacija) nije implementirano ali su zato implementirane primarno–dualne Gauss–Jordanove transformacije koje se mogu iskoristiti u tu svrhu.

Savjetujemo čitateljima, posebno onima koji studiozno pristupaju ovom štivu da instaliraju taj aplet na lokalni disk iz razloga što lokalno pokretanje programa omogućava spremanje i učitavanje podataka iz lokalne datoteke.

Napredni kolegij. Pretpostavlja poznavanje afine geometrije, konveksnosti i ovladavanje simpleks metodom.

- Poglavlje *O rješivosti sustava nejednadžbi* može se obraditi u cijelosti.
- Poglavlje *O rješivosti zadaće linearnog programiranja* može se obraditi u cijelosti.
- Poglavlje *Numeričke metode* može se obraditi u cijelosti.
- Poglavlje *Perturbacija i analiza osjetljivosti* obrađuje se po izboru.
- Cjelobrojno programiranje. Tema za sebe, izvor potražiti negdje drugdje, preporuka Schrijver [**86**]. U tom slučaju je potrebno nešto reći i o 'facijalnoj' strukturi poliedarskih skupova.

ŠTO JE U KNJIZI IZOSTAVLJENO

Ova knjiga ne pokriva numerički aspekt i implementaciju simpleks metode i metode unutarnje točke. Jednako tako ništa nije rečeno o cjelobrojnom programiranju, koje je zasebna tema, ni o mrežnom programiranju koje ima svojih specifičnosti. Ta poglavlja, kao i Data Envelopment Analysis (DEA) [**16**] mogu biti ubačeni u naprednije kolegije optimizacije.

Matrične igre sa sumom nula obrađuju se u okviru kolegija *Uvod u optimizaciju* ali nisu zastupljene u knjizi. Pojedini dijelovi te teorije formulirani su u obliku zadataka nakon poglavlja o dualnosti.

TERMINI, NAZIVI I OZNAKE

Nastojao sam da termini i nazivi objekata i struktura, kao i njihove oznake, ne odudaraju bitno od onih koji se tradicionalno koriste na PMF–Matematičkom odjelu u Zagrebu i u svjetskoj literaturi. Uz neke nazive, koji se (možda) prvi puta spominju u udžbeniku na hrvatskom jeziku, naveden je i engleski naziv, npr. `centralni put` (engl. central path).

Izuzetak je vjerojatno oznaka $\mathbb{R}^n$ koju ovdje koristimo za vektorski prostor jednostupičastih matrica duljine n i oznaka $\mathbb{R}^{m\times n}$ za prostor matrica tipa $m \times n$, v. popis oznaka na str. 5. U skladu s tim, skalarni produkt vektora x, y označavamo s

$x^\tau y$, jer je on produkt matrice retka i matrice stupca, tj.

$$x^\tau y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Uz takav pristup i studenti s minimalnim predznanjem o matematičkim strukturama brže usvajaju gradivo; napr. jednakost $(Ax)^\tau y = x^\tau(A^\tau y)$ je posljedica asocijativnosti množenja matrica i nije potrebno poznavati pojam adjungiranog operatora (matrice). Drugi je razlog prozaičniji i posljedica je činjenice da novija literatura iz numeričke matematike koristi takvu oznaku.

Uvođenje novih pojmova složenije je naravi. Tako sam, na primjer, engleski pojam 'linear programming' preveo kao *linearno programiranje*[1]. Pojam 'linear programming problem' preveden je kao *zadaća linearnog programiranja*. Problemi linearne optimizacije praktični su problemi i uzimajući tu praktičnu komponentu u obzir, činilo mi se pogodnijim koristiti termin *zadaća* nego termin *problem*. Ruska literatura također koristi isti naziv, vjerojatno i iz istih razloga iako neki autori (Neralić, [**77**]) koriste termin *problem*. Engleski pojam 'boundary problem' u teoriji običnih i percijalnih diferencijalnih jednadžbi uglavnom se prevodi na hrvatski jezik kao *rubna zadaća*.

Vektorske norme koje se koriste u knjizi su:

- euklidska norma ili 2-norma, $\|x\| = \sqrt{\sum_i x_i^2} = \sqrt{x^\tau x}$
- 1-norma (suma apsolutnih vrijednosti komponenata), $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$
- ∞-norma ili max-norma, $\|x\|_\infty = \max\limits_i |x_i|$.

Veza između skalarnog produkta i gore navedenih normi je

$$|x^\tau y| \le \|x\|_\infty \cdot \|y\|_1.$$

Jedina činjenica iz analize na konačnodimenzionalnom prostoru koja se ovdje koristi je kompaktnost zatvorene jedinične kugle $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \le 1\}$ u $\mathbb{R}^n$. To znači da svaki niz elemenata iz jedinične kugle ima konvergentan podniz. Posljedica toga jest da je svaki omeđen i zatvoren skup u $\mathbb{R}^n$ kompaktan i ta se činjenica koristi u knjizi na više mjesta.

KAZALO POJMOVA I LITERATURA

U kazalu pojmova na str. 287dan je popis pojmova s brojevima stranica na kojima se pojam uvodi, raspravlja ili poopćava. U kazalu se nalaze i imena zaslužnijih matematičara iz područja lineranog programiranja o čijem doprinosu se diskutira u knjizi i ako neki teorem nosi ime svog tvorca.

Popis korištene literature dan je na kraju knjige. Navedena je samo ona literatura koja se spominje bar jednom u tekstu.

[1] iako koristim i naziv *linearna optimizacija*

Zanimljivosti iz povijesti, od prvih početaka do današnjih dana, dane su u zasebnom poglavlju i bio mi je pravi užitak uređivati taj dio teksta.

UČESTALE OZNAKE

U tablici I.1 dan je popis nekih oznaka i simbola koji se koriste u knjizi a definirani su ili se uvode u početnim matematičkim sadržajima iz analize i linearne algebre na nižim godinama studija matematike kao i oni simboli koji se ovdje definiraju i često koriste.

$\mathbb{R}$	skup realnih brojeva
$\mathbb{R}^{m\times n}$	prostor realnih matrica tipa $m \times n$
$\mathbb{R}^n$	prostor stupaca ($\mathbb{R}^{n\times 1}$)
$N(A)$	jezgra matrice A
$R(A)$	prostor stupaca matrice A
$\mathcal{P}$	skup dopustivih točaka primarne zadaće
$\mathcal{D}$	skup dopustivih točaka dualne zadaće
$\mathcal{P}^*$	skup optimalnih točaka primarne zadaće
$\mathcal{D}^*$	skup optimalnih točaka dualne zadaće
z	vektor koeficijenata (primarne) funkcije cilja
b	vektor ograničenja
$\mu, \mu(z,b)$	optimalna vrijednost funkcije cilja
A^τ, x^τ	transponirana matrica (vektor)
$C(q_1,\ldots,q_n)$	konus generiran vektorima $q_1,\ldots,q_n$
$\mathrm{conv}(v_1,\ldots,v_n)$	politop generiran vektorima $v_1,\ldots,v_n$
$x^\tau y$	skalarni produkt vektora x,y
$X \oplus Y$	ortogonalna suma potprostora
$X^\perp$	ortogonalni komplement
$x \leq y$	$x,y \in \mathbb{R}^n$, parcijalni uređaj po komponentama

TABLICA I.1. Popis važnijih oznaka.

NUMERACIJA I PISMA (FONTOVI)

Numeracija poglavlja u knjizi koristi rimske oznake za brojeve, a odjeljci odnosno potpoglavlja numerirani su arapskim brojkama. Tako na primjer odjeljak VIII.2.1 na str. 150 pod naslovom *Optimizacija* je prvi pododjeljak drugog odjeljka u poglavlju VIII. Numeracija slika u svakom poglavlju počinje s brojem 1 i nosi prefiks poglavlja, na primjer slika II.3 na str. 12 ilustrira skup dopustivih točaka iz primjera u odjeljku II.3. Isti princip je zadržan i za numeraciju tablica. Tvrdnje kao što su teoremi, definicije, leme, propozicije i posljedice nose kao oznaku broj poglavlja i redni broj koji je zajednički za sve. To znači da prva lema i teorem koji slijede jedan iza drugoga u poglavlju V. nose oznake V.1. LEMA i V.2. TEOREM. Izuzetak čine zadaci koji su numerirani zasebno unutar poglavlja.

Varijable, funkcije i skupove označavamo malim i velikim kurzivnim pismom kao na primjer: $f(x)$ – vrijednost funkcije f u točki x, K – poliedarski skup. Grčki alfabet je uglavnom rezerviran za realne varijable, na primjer: realan broj α, i-ta kompomnenta β_i vektora b. U tabeli I.2 dan je popis svih znakova grčkog alfabeta, njih dvadeset i četiri.

Novi pojmovi, bilo u definiciji ili u tekstu, kad se pojavljuju prvi puta ispisani su pismom (fontom) tipa `courier` i nalaze se u indeksu pojmova na kraju knjige. U indeksu pojmova nalaze se i svi važniji teoremi kao i imena važnijih matematičara iz ovog područja.

GRČKI ALFABET

U tabeli I.2 dan je popis slova grčkog alfabeta. Grčka se slova tradicionalno koriste za označavanje (uglavnom) skalara (brojeva) u matematici.

α	A	alfa	ν	N	ni
β	B	beta	ξ	Ξ	ksi
γ	Γ	gama	o	O	omikron
δ	Δ	delta	π	Π	pi
ε	E	epsilon	ρ	P	ro
ζ	Z	zeta	σ	Σ	sigma
η	H	eta	τ	T	tau
θ	Θ	theta	υ	Υ	ipsilon
ι	I	jota	ϕ	Φ	fi
κ	K	kapa	χ	X	hi
λ	Λ	lambda	ψ	Ψ	psi
μ	M	mi	ω	Ω	omega

TABLICA I.2. Grčki alfabet.

II

Motivacija

Problemi uvjetne minimizacije funkcije vrlo se često javljaju u primjenama. To je problem tipa

$$\min\{\, f(x) \mid x \in \mathcal{P}\}\,,$$

gdje je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ realna funkcija, a $\mathcal{P}$ podskup od $\mathbb{R}^n$. Gornji zapis je simbolički zapis problema traženja minimuma funkcije f na skupu $\mathcal{P}$. Skup $\mathcal{P}$ nazivamo skupom `dopustivih točaka` ili `područjem minimizacije`, a funkciju f `funkcijom cilja`. Točka $v \in \mathcal{P}$ je `rješenje problema` ako je $f(v) \le f(x)$, $\forall x \in \mathcal{P}$.

Ako problem potječe iz ekonomije, onda je $\mathcal{P}$ određen uvjetima proizvodnje, prodaje, transporta..., a f je profit (u tom se slučaju traži maksimum) ili troškovi proizvodnje (tada se traži minimum). Ako je problem iz mehanike, onda je f najčešće potencijalna energija, a skup $\mathcal{P}$ određen je uvjetima na gibanje. Generički naziv za sve probleme tog tipa je `problem optimizacije` sa ili bez uvjeta.

Metode rješavanja bitno ovise o tome kakav je skup $\mathcal{P}$ (neograničen, zatvoren, konveksan, ‘tanak’...) i kakva je funkcija f (glatka, linearna, konveksna...). Linearna optimizacija ili linearno programiranje, kako se često naziva u literaturi, ograničava se na slučaj kad je f linearni funkcional, a $\mathcal{P}$ poliedarski skup. Takav se problem najčešće zapisuje u obliku

$$\min\{z^\tau x \mid Ax \le b\}\,,$$

gdje je $z \in \mathbb{R}^n$ zadani vektor, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrica i $b \in \mathbb{R}^m$ vektor. Skup $\mathcal{P}$ je u tom slučaju skup rješenja sustava nejednadžbi $Ax \le b$ koji ćemo zapisivati u ekvivalentnom obliku

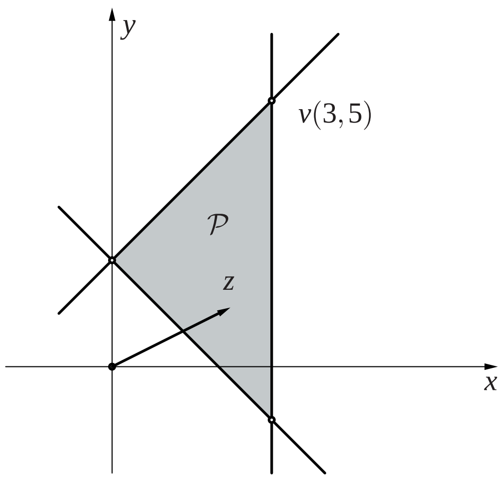
$$a^i x \le \beta_i, \quad \text{za } i = 1, \ldots, m,$$

gdje su a^i reci matrice A, a β_i komponente vektora b. Cijela je knjiga posvećena jednom jedinom problemu, koji se intenzivno proučava preko pedeset godina, iako se prvi rješavači javljaju već u 18. st. i ranije. Znatiželjnog čitatelja upućujemo na

XI poglavlje u kojem je kronološkim redom ispričana povijest problema od samih početaka do danas.

U ovom poglavlju ilustrirat ćemo karakteristične probleme u njihovom najjednostavnijem obliku i ukazati na poteškoće pri njihovom rješavanju. Ti problemi su tipični problemi linearnog programiranja i namjerno su pojednostavljeni. Svaki od njih je riješen a rješenja su takva da sugeriraju postupak rješavanja i u najopćenitijoj situaciji. Skice uz tekst imaju za cilj bolje razumijevanje geometrijske pozadine problema a ujedno navode čitaoca da sâm vidi i donese pravilan zaključak.

1. Maksimizacija uz ograničenja opisana nejednadžbama



SLIKA II.1. Geometrijska interpretacija optimalne točke.

II.1. PRIMJER. Naći maksimum funkcije cilja $c(x,y) = 2x + y$ uz ograničenja

$$\begin{aligned} -x-y &\leq -2 \\ -x+y &\leq 2 \\ x &\leq 3. \end{aligned}$$

Problemu ćemo dati geometrijsku interpretaciju, a ujedno će nam to biti motivacija za rješavanje opće zadaće linearnog programiranja. Promatrajmo sliku II.1:

- skup dopustivih točaka $\mathcal{P}$ ovdje je trokut određen s tri zadane nejednadžbe;

- izraz $2x+y$, kojeg treba maksimizirati, interpretiramo kao skalarni produkt vektora $z=(2,1)$ i vektora (x,y);
- pravci okomiti na vektor z su linije na kojima funkcija $2x+y$ poprima konstantne vrijednosti. Te vrijednosti rastu u smjeru vektora z, koji je ujedno gradijent funkcije cilja.

Skica nam sugerira da je taj skalarni produkt, uz zadane uvjete, najveći u vrhu trokuta $v=(3,5)$ i iznosi 11.

2. Konačno generirani konus

Pojam konusa je nezaobilazan u optimizaciji, bez obzira radi li se o linearnoj ili nelinearnoj optimizaciji. U svakoj točki x područja optimizacije prirodno je promatrati skup svih zraka koje izlaze iz te točke i duž kojih funkcija cilja pada, ne nužno na cijeloj zraci ali bar u nekoj njezinoj okolini. U slučaju da je funkcija cilja diferencijabilna, lako se pokaže da skup svih takvih smjerova ima svojstva konveksnog konusa koja ćemo sada protumačiti.

Kažemo da je skup C `konus` ako sadrži λx, $\lambda \geq 0$, kad god sadrži element x. Konus je poopćenje zrake u jednoj dimenziji i kuta u dvije dimenzije. Poseban slučaj konusa su `konačno generirani` konusi. Preciznije C je konačno generirani konus s generatorima $a_1,\ldots,a_m$ ako se svaki element od C može zapisati kao linearna kombinacija generatora s nenegativnim koeficijentima. Konačno generirani konusi detaljno su razmatrani u odjeljku V.3.

Sljedeći problem je tipičan primjer problema vezanih uz sustav linearnih jednadžbi i konačno generirane konuse.

II.2. PRIMJER. Naći realne brojeve x_1,x_2,x_3,x_4 takve da je

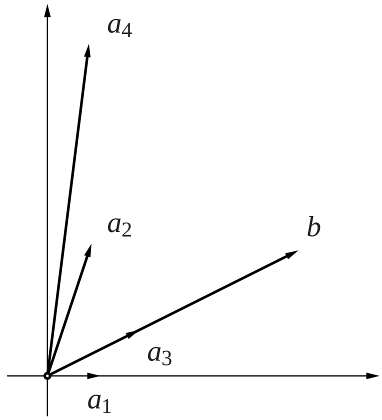
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6 \\ 3x_2 + x_3 + 8x_4 &= 3 \\ x_1,x_2,x_3,x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Ekvivalentna formulacija glasi: naći nenegativne realne brojeve x_1,x_2,x_3,x_4 tako da je vektor $b=\left[\begin{smallmatrix}6\\3\end{smallmatrix}\right]$ linearna kombinacija vektora $a_1=\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$, $a_2=\left[\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right]$, $a_3=\left[\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right]$, $a_4=\left[\begin{smallmatrix}1\\8\end{smallmatrix}\right]$ tj.

$$x_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}1\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}. \tag{1}$$

Geometrijski gledano, pita se da li vektor b leži unutar konusa generiranog s a_1, a_2, a_3, a_4.

Već je na prvi pogled jasno da rješenje nije jedinstveno. Posebno su interesantna rješenja kad je b rastavljen samo pomoću dva vektora od zadanih četiri.



SLIKA II.2. Konačno generirani konus.

Ističemo broj dva zato jer je to dimenzija prostora. Tako je:

$$
\begin{aligned}
&b = 5a_1 + a_2 \\
&b = \frac{45}{8}a_1 + \frac{3}{8}a_4 \qquad (2) \\
&b = 3a_3
\end{aligned}
$$

i to su svi mogući prikazi od b s **najviše dva** od četiri zadana vektora. Odgovarajuća rješenja su oblika

$$(5,1,0,0), \ \left(\frac{45}{8},0,0,\frac{3}{8}\right), \ (0,0,3,0)$$

i njih nazivamo `bazičnim rješenjima`. Svaka njihova konveksna kombinacija[1] je opet rješenje. Dakle,

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) = \lambda_1(5,1,0,0) + \lambda_2\left(\frac{45}{8},0,0,\frac{3}{8}\right) + \lambda_3(0,0,3,0)$$

je opet rješenje od (1) ako je $\sum \lambda_i = 1$.

Ako vektore a_i shvatimo kao stupce matrice A, problem iz prethodnog primjera motivira nas da općenitu situaciju formuliramo na sljedeći način:

> *Za matricu A tipa $m \times n$ i zadani stupac $b \in \mathbb{R}^m$ treba odrediti sva rješenja jednadžbe $Ax = b$, $x \geq 0$.*

[1] Pod konveksnom kombinacijom podrazumijevamo svaku linearnu kombinaciju $\sum \lambda_i x_i$ s nenegativnim koeficijentima $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ čija je suma $\sum \lambda_i = 1$.

O egzistenciji rješenja tog problema govori Farkaseva lema (v. VI.9). Rješenje, kao što smo vidjeli, nije nužno jedinstveno. Stoga je zanimljivo pitanje kako opisati skup svih rješenja.

> *Svako rješenje je konveksna kombinacija konačnog broja baznih rješenja.*

Detaljnije o tome govori teorem o dekompoziciji poliedarskog skupa, v. teorem VI.2, str. 105.

3. Fourier–Motzkinova metoda eliminacije

Fourier–Motzkinova metoda jedna je od metoda za rješavanje sustava nejednadžbi. Važnost joj je više teorijska nego praktična a simpleks metoda ju je numerički potpuno zasjenila. To je metoda eliminacije za nejednadžbe jer je osnovna ideja rješavanja 'zapisivanje' jedne nepoznanice, iz jedne od jednadžbi, pomoću ostalih nepoznanica i njezina eliminacija u drugim nejednadžbama. Pojam 'izraziti' je ovdje nejasan i neprecizan jer iz uvjeta na varijable zapisanog u obliku nejednadžbe nije moguće dobiti zavisnost među varijablama u funkcionalnom obliku. Za sada dopustimo da metoda govori sama za sebe. Ovdje ćemo je ilustrirati na sustavu nejednadžbi s dvije nepoznanice.

II.3. PRIMJER. Riješiti sustav nejednadžbi

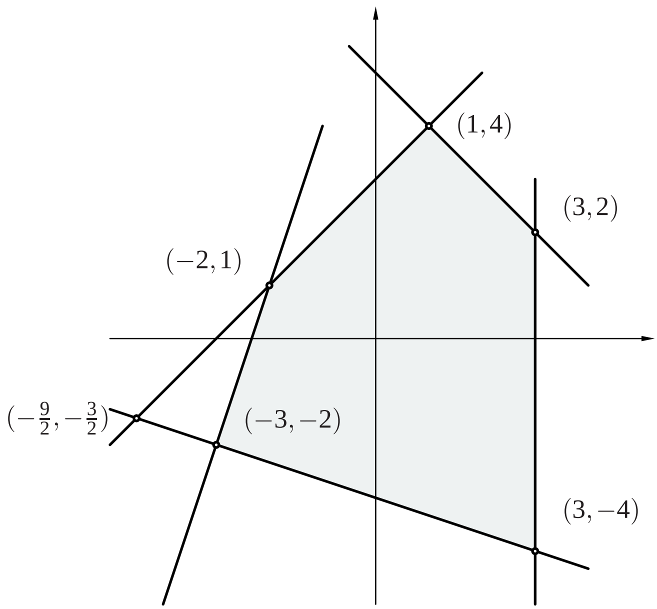
$$\begin{aligned} x+y &\le 5 \\ -x+y &\le 3 \\ -3x+y &\le 7 \\ -x-3y &\le 9 \\ x &\le 3. \end{aligned}$$

Rješenje. Gornji sustav nejednadžbi određuje poligon u ravnini prikazan na slici II.3. Svaku nejednadžbu možemo pomnožiti pozitivnim brojem i dobiti ekvivalentan sustav nejednadžbi u obliku

$$\begin{aligned} x &\le 5-y \\ x &\le 3 \\ y-3 &\le x \\ \frac{1}{3}y-\frac{7}{3} &\le x \\ -3y-9 &\le x \end{aligned} \tag{3}$$

u kojem je nepoznanica x odvojena od ostalih varijabli, a to je u ovom slučaju samo y. Ekvivalentan zapis gornjeg sustava je

$$\max\left\{y-3, \frac{1}{3}y-\frac{7}{3}, -3y-9\right\} \le x \le \min\{5-y, 3\}. \tag{4}$$



SLIKA II.3. Fourier–Motzkinova metoda.

Nepoznanicu x sada možemo eliminirati, nakon čega se dobije sustav od šest nejednadžbi za y

$$\begin{aligned} y-3 &\le 5-y \\ y-3 &\le 3 \\ \frac{1}{3}y-\frac{7}{3} &\le 5-y \\ \frac{1}{3}y-\frac{7}{3} &\le 3 \\ -3y-9 &\le 5-y \\ -3y-9 &\le 3. \end{aligned}$$

Broj nejednadžbi prethodnog sustava jednak je produktu broja nejednadžbi koje x ograničavaju odozgo s brojem nejednadžbi koje x ograničavaju odozdo. U ovom primjeru je to $2\cdot 3=6$. Sada dobivamo ograničenje za y kao presjek svih intervala;

$$-4 \le y \le 4.$$

Dalje se zaključuje ovako: za svaku vrijednost $y\in[-4,4]$ maksimalna vrijednost na lijevoj strani u (4) postiže u najviše dva argumenta (izraza). Na primjer, u izrazu $\frac{1}{3}y-\frac{7}{3}$ i u izrazu $y-3$, ta vrijednost iznosi 1. Na taj se način interval $[-4,4]$ razbija na uniju zatvorenih intervala koji se nadovezuju jedan na drugi. Rubne točke tih intervala su one vrijednosti od y za koje dva argumenta od max imaju jednake vrijednosti. Te su vrijednosti

$$-4, -2, -\frac{3}{2}, 1, 2, 4$$

Na svakom od tih podintervala sada imamo donju i gornju ogradu za x ovisno o y. Rješenje je:

$$\begin{array}{llll}
\text{za} & -4 \leq y \leq -2 & \text{je} & -3y - 9 \leq x \leq 3; \\
\text{za} & -2 \leq y \leq -\frac{3}{2} & \text{je} & \frac{1}{3}y - \frac{7}{3} \leq x \leq 3; \\
\text{za} & -\frac{3}{2} \leq y \leq 1 & \text{je} & \frac{1}{3}y - \frac{7}{3} \leq x \leq 3; \\
\text{za} & 1 \leq y \leq 2 & \text{je} & y - 3 \leq x \leq 3; \\
\text{za} & 2 \leq y \leq 4 & \text{je} & y - 3 \leq x \leq 5 - y.
\end{array}$$

Time je u potpunosti opisan skup rješenja zadanog sustava nejednadžbi. Primijetimo da drugu i treću nejednadžbu možemo objediniti u jednu jedinu što nije unaprijed vidljivo. □

ZADACI

II.1. ZADATAK. Riješite problem iz primjera eliminacijom varijable y, umjesto x.

II.2. ZADATAK. Dokažite da se maksimum funkcije $2x + y$, iz primjera II.1, definirane na skupu $\mathcal{P}$, poprima u jednom od vrhova trokuta $\mathcal{P}$.

Uputa. Prvo dokažite da se maksimum poprima na rubu trokuta, a zatim u jednom od vrhova.

II.3. ZADATAK. Zadatak se nadovezuje na primjer II.2. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

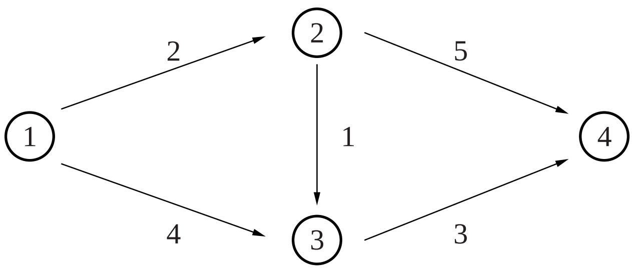
i $z^\tau = [\, 1 \;\; 2 \,]$. Tada je skup rješenja sustava nejednadžbi $y^\tau A = z^\tau, y \geq 0$ neprazan i neograničen.

Rješenje. Opće rješenje sustava $y^\tau A = z^\tau$ ima parametarski zapis $y^\tau = [\, 1 \;\; 2 \;\; 0 \,] + \lambda [\, 1 \;\; 1 \;\; 1 \,], \lambda \in \mathbb{R}$ i za $\lambda \geq 0$ je $y^\tau \geq 0$ što dokazuje neograničenost skupa rješenja. □

4. Dualna zadaća

U problemima optimizacije uz primarnu zadaću obično se javlja i dualna zadača s dualnim ograničenjima i dualnim funkcionalom. Ako primarni funkcional maksimiziramo tada dualni minimiziramo i obratno. Zašto je tome tako bit će objašnjeno u poglavlju VII koje govori o rješivosti zadaće linearnog programiranja. Dualnost u ekonomskim problemima je posljedica konkurencije na tržištu i dobre numeričke metode istodobno rješavaju i primarnu i dualnu zadaću (v. odjeljak 5 poglavlja VII).

Evo jednostavnog primjera. Zamislimo pojednostavljenu računarsku mrežu od četiri povezana računala. Želimo poslati poruku od nekog polazišta–izvora (čvor



SLIKA II.4. Računarska mreža.

①) do primaoca poruke–ponora (čvor ④). Poruka u sustavu računala putuje tako da se rastavi na više dijelova i svaki se dio pošalje svojim putem. Strelice na skici predstavljaju smjer putovanja poruke između dva čvora, a brojevi uz strelice određuju cijenu prijenosa jedinične poruke od jednog čvora do drugog. To su zapravo cijene unajmljivanja telefonskih linija i njih određuje telefonska kompanija. Problem se sastoji u nalaženju najjeftinijeg puta za slanje poruke od ① do ④.

Ako brojeve shvatimo kao vrijeme putovanja poruke između čvorova, u tom slučaju tražimo onaj put poruke kojim se najbrže stiže od ① do ④. Problem se može još dodatno zakomplicirati ako kao funkciju cilja uzmemo neku kombinaciju brzine i cijene, ali po svojoj strukturi ostaje isti kao dosadašnji.

4.1. Koji je najjeftiniji način da se pošalje poruka?

Na prvi pogled čini se optimalnim da se cijela poruka pošalje od ① do ②, zatim od ② do ③ i od ③ do ④. Lako se vidi da je taj put najjeftiniji; cijena je $2+1+3=6$.

Time smo riješili zadaću linearnog programiranja:

$$
\begin{array}{lrl}
\text{minimizirati} & b^\tau x = 2x_{12} + 4x_{13} + x_{23} + 5x_{24} + 3x_{34} & \\
\text{uz uvjete} & x_{ij} \geq 0 & \\
 & x_{12} + x_{13} = 1 & \text{(poruka je krenula iz ①)} \\
 & x_{12} - x_{23} - x_{24} = 0 & \text{(poruka nije izgubljena u ②)} \\
 & x_{13} + x_{23} - x_{34} = 0 & \text{(poruka nije izgubljena u ③)} \\
 & x_{24} + x_{34} = 1 & \text{(poruka je stigla u ④).}
\end{array}
$$

Tu zadaću zvat ćemo `primarna zadaća` ili `primarni problem`. Pri tome je x_{ij} dio poruke izražen u nekim jedinicama koji je prešao dio puta od čvora ⓘ do čvora ⓙ.

Zbrajanjem svih uvjeta osim prvog dobijemo $x_{12} + x_{13} = 1$ – poruka je poslana iz ① što je već izraženo u prvom uvjetu. To pokazuje da je prvi uvjet suvišan i možemo ga izbaciti iz razmatranja.

Jednadžbe u uvjetima ekvivalentne su Kirchoffovim zakonima održanja u strujnom krugu. Ovdje ti zakoni izražavaju zahtjev za cjelovitost poruke. Pisan u matričnom zapisu taj sustav jednadžbi izgleda:

$$
Ax := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{13} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =: z.
$$

Svaki stupac u matrici odgovara jednoj vezi (spojnici) u računarskom sustavu. Svaki redak u matrici odgovara jednom čvoru u tom sustavu. Redak $[\,1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\,]$, koji odgovara izvoru, nije napisan jer je zavisan o ostalim recima. Problem možemo zapisati u kompaktnijem obliku

$$
\min \{b^\tau x \mid Ax = z, x \geq 0\}.
$$

gdje je b stupac cijena.

4.2. Što je dualna zadaća?

Dualna zadaća se pojavljuje u trenutku kad se na tržištu pojavi konkurentska telefonska kompanija, nazovimo je ITN (International Telephone Net). ITN prima–kupuje poruku na jednom čvoru i isporučuje–prodaje je na drugom. Neka je cijena poruke na i-tom čvoru y_i. Tada je cijena od ITN-a na transportu od i-tog do j-tog čvora $-y_i + y_j$. Konkurencija dakle objavljuje cijene predaje i preuzimanja informacije u svakom čvoru. Te cijene su `dualne varijable` za razliku od `primarnih varijabli` x_{ij}. Da bi bila konkurentna na tržištu kompanija ITN mora paziti da njezine cijene nisu previsoke, tj.

$$
\begin{aligned}
-y_1 + y_2 &\leq 2 \\
-y_1 + y_3 &\leq 4 \\
-y_2 + y_3 &\leq 1 \\
-y_2 + y_4 &\leq 5 \\
-y_3 + y_4 &\leq 3.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Cilj kompanije ITN je maksimalna moguća zarada, tj. maksimizirati y_4.

Primijetimo da je vrijednost dualne varijable y pridružena svakom čvoru za razliku od primarnih varijabli koje pridružujemo spojnicama između čvorova. U strujnom krugu dualne varijable nazivamo potencijalima. Ono čime se barata u sustavu nejednadžbi (5) je razlika potencijala (analogon napona u strujnom krugu), a ne sama njegova vrijednost. Zbog toga je korisno staviti $y_1 = 0$ (uzemljiti čvor ①), što u našem slučaju znači da ITN besplatno preuzima informaciju u čvoru ①. Dualna varijabla je sada cijena transporta jedinične poruke od izvora do zadanog čvora. Uz tako odabranu vrijednost od y_1 `dualna zadaća` izgleda ovako:

$$
\begin{aligned}
&\text{maksimizirati } z^\tau y = y_4 \\
&\text{uz uvjete} \\
&\qquad\qquad y_2 \leq 2 \\
&\qquad\qquad y_3 \leq 4 \\
&\quad -y_2 + y_3 \leq 1 \\
&\quad -y_2 + y_4 \leq 5 \\
&\quad -y_3 + y_4 \leq 3.
\end{aligned}
$$

Koristeći matrični zapis gornji uvjeti su:

$$
\begin{bmatrix} y_2 & y_3 & y_4 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\leq \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}
$$

ili u transponiranom obliku

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}
\leq \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.
$$

Matrica sustava gornjih nejednadžbi je transponirana matrica matrice primarne zadaće A. Dualnu zadaću možemo kompaktnije zapisati u obliku

$$\max\{z^\tau y \mid y^\tau A \leq b^\tau\}.$$

4.3. Optimalnost.

Korisnik telefonskih linija ima dvije mogućnosti. Koristiti usluge telefonske kompanije ili usluge ITN-a. Troškovi korištenja linija telefonske kompanije su $b^\tau x$ što je zbog uvjeta (5) skuplje ili jednako skupo uslugama ITN-a; dakle $z^\tau y = y^\tau Ax \leq b^\tau x$. Odavde slijedi takozvana `slaba dualnost`

$$\max\{z^\tau y \mid y^\tau A \leq b^\tau\} \leq \min\{b^\tau x \mid Ax = z, x \geq 0\}.$$

Poanta cijele priče je da vrijedi i `jaka dualnost` tj. da je gornja nejednakost zapravo jednakost. Ta je tvdnja poznata pod nazivom teorem dualnosti, v. teorem VII.9. Pokušajmo se uvjeriti u istinitost teorema koristeći ekonomske argumente.

Redak $b^\tau - y^\tau A$ i stupac x su nenegativni. Stoga je nejednakost $y^\tau z = y^\tau Ax \leq b^\tau x$ stroga ako i samo ako je $x_{ij} > 0$ i $(y^\tau A)_{ij} = y_j - y_i < c_{ij}$ bar za jednu liniju ij od čvora i do čvora j. U tom slučaju korisnik neće koristiti uslugu telefonske kompanije na toj liniji nego će radije koristiti uslugu ITN-a. ITN tada razmišlja o povećanju cijena svojih usluga ali tako da i dalje ostane konkurentan[2]. Druga je mogućnost da korisnik organizira iskorištenost mreže x_{ij} tako da smanji ukupne troškove. Korisnik, s jedne strane, i ITN, s druge strane, se tako prilagođavaju stanju na tržištu sve dok se ne postigne ravnoteža. Ravnoteža se postiže u trenutku kada je $b_{ij} = y_j - y_i$ kad god je $x_{ij} > 0$. Tada je

$$\boxed{y^\tau Ax = b^\tau x}$$

i to je `uvjet optimalnosti`. Kad god imamo ispunjen uvjet optimalnosti za primarnu varijablu x i dualnu varijablu y tada su to rješenja primarne i dualne zadaće i vrijedi

$$\max\{z^\tau y \mid y^\tau A \leq b^\tau\} = \min\{b^\tau x \mid Ax = z, x \geq 0\}.$$

Time je ispunjena `jaka dualnost`. U trenutku ravnoteže ITN i telefonska kompanija su jednako konkurentni i korisniku je svejedno čije usluge koristi.

[2]Ovaj zaključak nije evidentan iz matematičkog aspekta problema i treba ga dokazati. Ekonomski gledano, to je dobar način rezoniranja samo nije odmah jasno kako to sprovesti.