1. Osnovni pojmovi matrične algebre

U ovom dijelu definirat će se osnovni pojmovi matrične algebre i navesti neka osnovna svojstva matrica koja se koriste u daljnjem tekstu. Eksplicitni dokazi navedenih tvrdnji, kao i detaljniju analizu navedenih pojmova, moguće je naći u većini knjiga o linearnoj algebri, vidi na primjer Stang (2003.), Kurepa (1978.), Horvatić (2004.) i drugi.

1.1. Pojam matrice i osnovne matrične operacije

Matrica

Matrica reda $m \cdot n$ je pravokutno polje (tabela, shema) elemenata od m redaka i n stupaca, a zapisuje se:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ddots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}], \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.1}$$

PRIMJER 1.1.

Primjeri matrica su i matrica $x = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}$ koja se naziva i vektor redak i matrica $y = \begin{bmatrix} 76 \\ 51 \\ 28 \end{bmatrix}$ koja se naziva i vektor stupac. Matrica $B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ je matrica reda $2 \cdot 3$.

Transponirana matrica

Za danu matricu A reda $m \cdot n$ ***transponirana matrica*** A' (ponekad se koristi i oznaka A^T) je matrica reda $n \cdot m$ koja se dobije zamjenom redaka i stupaca polazne matrice A.

PRIMJER 1.2.

Transponirana matrica matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ je matrica $A' = A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Za matricu $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$, transponirana matrica je $y' = y^T = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$, tj. vektor stupac "postaje" vektor redak.

NAPOMENA 1.1.

Uobičajeno je da se vektor stupac označava bez oznake transponiranja ($'$ ili ^{T}), a vektor redak s oznakom transponiranja. Naime vektor redak smatra se transponiranim vektorom pridruženog vektor stupca, kao što je dano u primjeru 1.2.

Jednakost matrica

Jednakost matrica $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ moguće je definirati ako i samo ako su matrice istog reda, tj. imaju jednak broj stupaca i redaka. U tom slučaju, matrice A i B reda $m \cdot n$ su jednake ako je za svaki $i = 1, \dots, m$ i za svaki $j = 1 \dots, n$:

$$a_{ij} = b_{ij}. \tag{1.2}$$

Jednakost matrica označava se $A = B$.

Zbroj matrica

Ako su matrice A i B reda $m \cdot n$, zbroj matrica $A + B$ je matrica C reda $m \cdot n$, za koju vrijedi:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad i = 1, \dots, m \quad \text{i} \quad j = 1, \dots, n. \tag{1.3}$$

Razlika matrica

Ako su matrice A i B reda $m \cdot n$, razlika matrica $A - B$ je matrica D reda $m \cdot n$, za koju vrijedi:

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \qquad i = 1, \dots, m \quad \text{i} \quad j = 1, \dots, n. \tag{1.4}$$

PRIMJER 1.3.

Za matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ zbroj matrica je matrica C

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix},$$

a razlika matrica je matrica D

$$D = A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

Množenje matrice skalarom

Umnožak (produkt) matrice A, reda $m \cdot n$, i skalara λ ($\lambda \in \mathbf{R}$) je matrica λA, reda $m \cdot n$, za koju vrijedi:

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.6}$$

PRIMJER 1.4.

Za matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ i skalar $\lambda = 4$:

$$\lambda A = 4 \cdot A = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}. \tag{1.7}$$

Množenje matrica

Neka je A matrica reda $m \cdot n$ i B matrica reda $n \cdot p$. Umnožak (produkt) matrica A i B je matrica C, reda $m \cdot p$, za koju vrijedi:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}, \qquad i = 1, \ldots, m \quad \text{i} \quad k = 1, \ldots, p. \tag{1.8}$$

Da bi umnožak matrica bio definiran, broj stupaca matrice A mora biti jednak broju redaka matrice B, tj.

$$A_{m \cdot n} B_{n \cdot p} = C_{m \cdot p}. \tag{1.9}$$

Element c_{ij} matrice C, koji se nalazi u i–tom retku i j–tom stupcu, dobiva se tako da se i–ti redak matrice A "pomnoži" s j–tim stupcem matrice B, što se shematski može prikazati ovako:

$$\begin{array}{c} i \end{array} \begin{bmatrix} \rightarrow & \cdots & \rightarrow \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \downarrow \\ \vdots \\ \downarrow \end{bmatrix} \\ j \end{array} = \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

$$A \qquad\qquad B \quad = \quad C$$

PRIMJER 1.5.

Umnožak matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ može se definirati jer matrica A ima tri stupca što je jednako broju redaka matrice B, tj.

$$\underset{2\cdot 3}{A}\ \underset{3\cdot 2}{B} = \underset{2\cdot 2}{C}\,. \tag{1.11}$$

Umnožak matrica A i B, matrica C, jednak je:

$$\begin{aligned} C = AB &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\cdot 2 + 1\cdot(-1) + 4\cdot 1 & 2\cdot 0 + 1\cdot 1 + 4\cdot 1 \\ (-1)\cdot 2 + 3\cdot(-1) + 1\cdot 1 & (-1)\cdot 0 + 3\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Skalarni umnožak (produkt) vektora

Neka su x i y vektori reda n (matrice reda $n \cdot 1$), tj. $x' = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$ i $y' = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{bmatrix}$. Skalarni umnožak (produkt) vektora x i y je:

$$\langle x, y \rangle = x'y = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i. \tag{1.13}$$

NAPOMENA 1.2.

Iz (1.13) slijedi da je skalarni umnožak vektora x sa "samim" sobom:

$$\langle x, x \rangle = x'x = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

a vrijednost:

$$(\langle x, x \rangle)^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \|x\| \tag{1.14}$$

naziva se ***euklidskom normom*** (ili L_2 normom) vektora x i označava se $\|x\|$.

PRIMJER 1.6.

Skalarni umnožak vektora $x' = [1 \quad 5 \quad -1 \quad 3]$ i $y' = [4 \quad 0 \quad 3 \quad 1]$ je broj:

$$\langle x, y\rangle = x'y = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i = [1 \quad 5 \quad -1 \quad 3] \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\cdot 4 + 5\cdot 0 + (-1)\cdot 3 + 3\cdot 1 = 4. \tag{1.15}$$

Kvadratna matrica

Matrica A reda $m \cdot n$ je kvadratna ako je broj redaka matrice jednak broju stupaca, tj. ako je $m = n$. Za takvu matricu kaže se da je reda n.

PRIMJER 1.7.

Matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ je kvadratna matrica drugog reda.

Simetrična matrica

Kvadratna matrica A reda n je simetrična ako je $A = A'$, tj. ako je:

$$a_{ij} = a_{ji}, \text{ za svaki } i, j = 1, \ldots, n. \tag{1.16}$$

PRIMJER 1.8.

Matrica $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ je simetrična, jer je $A = A'$.

Za sve kvadratne matrice A i B jednakog reda su umnošci AB i BA dobro definirani, ali je općenito:

$$AB \neq BA. \tag{1.17}$$

PRIMJER 1.9.

Za kvadratne matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ vrijedi:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ i } BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ tj. } AB \neq BA. \tag{1.18}$$

Općenito: Komutativnost množenja matrica ne vrijedi za proizvoljne matrice A i B reda $m \cdot n$ i $n \cdot m$.

Svojstva transponiranih matrica

Za proizvoljne matrice A i B, uz pretpostavku da su navedene operacije definirane, vrijedi:

- $(A+B)' = A' + B'$,
- $(A')' = A$,
- $(\lambda A)' = \lambda A'$, za λ proizvoljan skalar, $\lambda \in \mathbf{R}$,
- $(AB)' = B'A'$. (1.19)

Nul–matrica

Matrica koja ima sve elemente jednake nuli je ***nul–matrica*** i označava se s O. Na primjer, matrica:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

je nul–matrica reda $2 \cdot 5$, a matrica

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

je nul–matrica reda $3 \cdot 4$.

Bez obzira na red matrice, nul–matrice se označavaju s O. Iz konteksta je uvijek jasno na koju se nul–matricu misli.

Jedinična matrica

Kvadratna matrica reda n je ***jedinična matrica*** I ako je:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad I = [\delta_{ij}]\,. \tag{1.22}$$

δ_{ij} je Kroneckerov simbol definiran:

$$\delta_{ij} = 0 \text{ za svaki } i \neq j \text{ i } \delta_{11} = \delta_{22} = \ldots = \delta_{nn} = 1. \tag{1.23}$$

Jedinična matrica ima jedinice na dijagonali, a ostali elementi matrice jednaki su nuli.

Bez obzira na red matrice, jedinične matrice se označavaju s I. Naime, i matrica

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.24}$$

i

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.25}$$

su jedinične matrice, pri čemu je prva matrica reda 3, a druga reda 2. Iz konteksta je uvijek jasno na koju se jediničnu matricu misli.

Svojstvo jedinične matrice

Za svaku matricu A reda $m \cdot n$ i matricu B reda $n \cdot k$ vrijedi:

$$AI = A \quad \text{i} \quad IB = B, \tag{1.26}$$

gdje je I jedinična matrica reda n.

1.2. Determinanta i inverzna matrica

Inverzna matrica

Inverzna matrica ili ***inverz*** kvadratne matrice A reda n, oznaka A^{-1}, je matrica koja zadovoljava relaciju:

$$AA^{-1} = a^{-1}A = I, \tag{1.27}$$

gdje je I jedinična matrica reda n. Ako takva matrica postoji, za matricu A se kaže da je ***invertibilna*** ili ***regularna***. Matrica je ***singularna*** ako nije regularna.

NAPOMENA 1.3.

Za kvadratnu matricu može postojati najviše jedna inverzna matrica.

Svojstva inverzne matrice

Neka od osnovnih svojstava inverzne matrice su:

- $(A^{-1})^{-1} = A$,
- $(A')^{-1} = (A^{-1})'$,
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
- $I^{-1} = I$ gdje je I jedinična matrica reda n.

(1.28)

PRIMJER 1.10.

$$\left[(AB)^{-1}\right]' = \left[(AB)'\right]^{-1} = [B'A']^{-1} = (A')^{-1}\,(B')^{-1}.$$

Determinanta matrice (Laplaceov razvoj determinante)

Determinanta kvadratne matrice A reda n, oznaka $\det A = |A|$, računa se:

$$\det A = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\,|A_{ij}|,\ \text{za svako } i = 1,\ldots,n. \qquad (1.29)$$

$|A_{ij}|$ naziva se (i,j)–ta ***minora matrice*** A. To je determinanta kvadratne matrice $(n-1)$–og reda dobivena tako da se iz matrice A ispuste i–ti redak i j–ti stupac.

Broj $(-1)^{i+j}\,|A_{ij}| = C_{ij}$ naziva se (i,j)–ti ***kofaktor*** ili ***algebarski komplement*** matrice A. Prema tome, (i,j)–ti ***kofaktor*** ili ***algebarski komplement*** matrice A nije ništa drugo već (i,j)–ta minora matrice A s odgovarajućim predznakom.

Transponirana matrica kofaktora matrice A, oznaka A^*, naziva se ***adjunkta*** od A, tj. $A^* = [A'_{ij}]$.

NAPOMENA 1.4.

Iz formule (1.29) proizlazi da se determinanta matrice definira rekurzivno. Navedeno pravilo za izračunavanje determinante matrice A poznato je kao Cramerovo pravilo ili Laplaceov razvoj (vidi Šego, 2005. str. 39–55).

PRIMJER 1.11.

a) Matrica – skalar: $A = [a]$
Broj ili skalar je matrica reda $1 \cdot 1$, tj. $A = [a]$, pa je $\det A = |A| = a$. Na primjer, ako je $A = [4]$, $\det A = |A| = 4$.

b) Matrica drugog reda: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$
Za matricu reda $2 \cdot 2$, determinanta se izračunava:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\,|a_{22}| + a_{12}(-1)^{1+2}\,|a_{21}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Na primjer, determinanta matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ je $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - (-1) \cdot 6 = 8 + 6 = 14$.

c) Matrica trećeg reda: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$\det A = |A| = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Na primjer, determinanta matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 16 \\ 3 & 4 & 10 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ je

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 16 \\ 3 & 4 & 10 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 8 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 16 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \cdot (4 \cdot 3 - 2 \cdot 10) - 8 \cdot (3 \cdot 3 - (-1) \cdot 10) + 16 \cdot (3 \cdot 2 - (-1) \cdot 4)$$
$$= 2 \cdot (-8) - 8 \cdot 19 + 16 \cdot 10 = -16 - 152 + 160 = -8.$$

Svojstva determinante

Neka od osnovnih svojstava determinante kvadratne matrice A reda n su:

- $|A'| = |A|$,
- $|AB| = |A||B|$,
- $|\lambda A| = \lambda^n |A|$, za λ proizvoljan skalar, $\lambda \in \mathbf{R}$, (1.30)
- Ako se jedan redak (stupac) matrice može prikazati kao linearna kombinacija ostalih redaka (stupaca), tada je determinanta matrice jednaka nuli.

Specijalno: Ako su 2 retka (stupca) matrice jednaka, determinanta matrice jednaka je nuli, ali obrat ne vrijedi (vidjeti Šego, 2005.).

PROPOZICIJA:

Ako je A kvadratna matrica reda n, tada vrijedi:

$$A \text{ je invertibilna matrica } \textbf{\textit{ako i samo ako}} \text{ je } |A| \neq 0. \tag{1.31}$$

Drugim riječima, ako je matrica invertibilna (ima inverz), tada ima determinantu različitu od nule. No, vrijedi i obrat, ako je determinanta matrice različita od nule, matrica ima inverz, tj. invertibilna je.

Za invertibilnu matricu A, inverzna se matrica izračunava:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & & C_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}'}_{\text{adjunkta matrice } A} \tag{1.32}$$

gdje su C_{ij}, $i, j = 1, \ldots n$ ***kofaktori*** matrice A, $C_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$.

PRIMJER 1.12.

Za matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ izračunava se inverzna matrica A^{-1}.

Za izračunavanje inverza matrice, potrebno je prvo odrediti determinantu matrice, $|A|$ i transponiranu matricu kofaktora (adjunktu od A). Determinanta matrice A jednaka je:

$$\begin{aligned} |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (0-4) - 2 \cdot (0+8) - 3 \cdot (-3-4) \\ &= 1 \cdot (-4) - 2 \cdot 8 - 3 \cdot (-7) = 1. \end{aligned}$$

Nadalje, kofaktor C_{11} dobiva se tako da se minor $|A_{11}|$ pomnoži s $(-1)^{1+1}$. Minor $|A_{11}|$ matrice A dobiva se "ispuštanjem" prvog retka i prvog stupca matrice A, tj: $|A_{11}| = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ iz čega proizlazi da je:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} |A_{11}| = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - (-4) \cdot (-1) = -4.$$

Analogno se dobivaju i preostali kofaktori. Transponirana matrica kofaktora ili adjunkta matrice A jednaka: $A^* = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{bmatrix}$. Kako je determinanta matrice $|A| = 1$, iz (1.32) slijedi da je:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

1.3. Linearna zavisnost vektora i rang matrice

Linearna kombinacija vektora

Vektor

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \tag{1.33}$$

je ***linearna kombinacija vektora*** $x_1, x_2, , \ldots, x_k$, pri čemu su skalari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{R}$.

Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

Za skup vektora $x_1, x_2, , \ldots, x_k$ kaže se da je ***linearno zavisan*** ako postoji k skalara $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{R}$, koji nisu svi jednaki nuli, takvih da je:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k = 0. \tag{1.34}$$

S druge strane, za skup vektora $x_1, x_2, , \ldots, x_k$ kaže se da je ***linearno nezavisan*** ako relacija (1.34) vrijedi jedino u slučaju $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$, tj. niti jedan se vektor ne može prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora.

Ortogonalnost vektora

Dva ne nul–vektora x_1 i x_2 $(x_1 \neq x_2)$ su ortogonalni vektori ako je njihov skalarni umnožak jednak nuli, tj. ako je

$$x_1' x_2 = 0. \tag{1.35}$$

PRIMJER 1.13.

Vektori $x' = [1 \quad 5 \quad 0 \quad -4]$ i $y' = [4 \quad 0 \quad -3 \quad 1]$ su ortogonalni jer je

$$\langle x, y \rangle = x'y = [1 \quad 5 \quad 0 \quad -4] \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + 5 \cdot 0 + 0 \cdot (-3) + (-4) \cdot 1 = 0.$$

Ortogonalnost matrice

Kvadratna matrica X reda n, je ***ortogonalna*** ako je $X'X = I$, pri čemu je I jedinična matrica reda n.

Ortogonalnost matrice može se definirati i pomoću ortogonalnosti vektora stupaca same matrice. Naime, ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektori stupci matrice X, $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, matrica X je ortogonalna ako je za svaki $i, j = 1, 2, \ldots, n$

$$x_i' x_j = \begin{cases} 1 & \text{za } i = j, \\ 0 & \text{za } i \neq j. \end{cases} \tag{1.36}$$

tj. ako su vektori stupci matrice međusobno ortogonalni.

Rang matrice

Za matricu A reda $m \cdot n$, ***rang redaka matrice*** A je maksimalan broj linearno nezavisnih vektora redaka, a ***rang stupaca matrice*** A je maksimalan broj linearno nezavisnih vektora stupaca matrice A. Rang stupaca jednak je rangu redaka matrice A i taj broj naziva se ***rang matrice*** A, oznaka $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{r}(A)$.

Može se pokazati da vrijedi (Kurepa, 1978., str. 175):

- $\operatorname{rang}(A \cdot B) \leqslant \min\{\operatorname{rang}(A), \operatorname{rang}(B)\}$;

- kvadratna matrica A reda n je invertibilna $(|A| \neq 0)$, ***ako i samo ako*** je $\text{rang}\,(A) = n$;
- rang matrice se ne mijenja ako se matrica pomnoži s regularnom matricom zdesna ili slijeva;
  Formalno: Ako je matrica A reda $m \cdot n$ $(m < n)$, a matrice B i C regularne matrice reda m i n (postoji B^{-1} i C^{-1}), tada je:

$$\text{rang}\,(BAC) = \text{rang}\,(A).$$

- matrica A je ***singularna*** $(|A| = 0)$ ako i samo ako postoji ne nul–vektor x, $x \neq 0$, takav da je Ax nul–vektor $(Ax = 0)$.

Trag matrice

Trag kvadratne matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ definira se kao zbroj elemenata na glavnoj dijagonali, tj.

$$\text{tr}\,(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{1.37}$$

PRIMJER 1.14.

Trag matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & -7 & 5 \\ 0 & 4 & 10 \end{bmatrix}$ je $\text{tr}\,(A) = 3 + (-7) + 10 = 6$.

Svojstva traga matrice

Za kvadratne matrice A i B istog reda može se pokazati da vrijedi:

- $\text{tr}\,(A') = \text{tr}\,(A)$,
- $\text{tr}\,(A + B) = \text{tr}\,(A) + \text{tr}\,(B)$,
- $\text{tr}\,(AB) = \text{tr}\,(BA)$,
- $\text{tr}\,(\lambda A) = \lambda\,\text{tr}\,(A)$, za λ proizvoljan skalar, $\lambda \in \mathbf{R}$.

1.4. Linearne i kvadratne forme

Neka su $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ i $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ vektori reda n i neka je matrica $A = [a_{ij}]$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ kvadratna matrica reda n.

Linearna forma je funkcija definirana s:

$$x \to a'x = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i. \tag{1.38}$$

Kvadratna forma je funkcija: $(x, x) \to x'Ax$, tj.

$$\begin{aligned} x'Ax = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n \\ + a_{21}x_2x_1 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \ldots + \\ + a_{n1}x_nx_1 + \ldots + a_{nn}x_n^2. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Bilinearna forma je funkcija: $(x, y) \to x'Ay$, tj.

$$x'Ay = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j. \tag{1.40}$$

Definitnost matrice

Matrica A je ***pozitivno definitna*** ako za svaki ne nul–vektor $x \neq 0$ vrijedi da je $x'Ax > 0$, tj. ako kvadratna forma (1.39) poprima samo pozitivne vrijednosti (pozitivno je definitna).

Matrica A je ***pozitivno semidefinitna*** ako je $x'Ax \geqslant 0$.

Matrica A je ***negativno definitna*** ako za svaki ne nul–vektor x vrijedi da je $x'Ax < 0$.

Matrica A je ***negativno semidefinitna*** ako je $x'Ax \leqslant 0$.

1.5. Derivacija matrične funkcije

Derivacija funkcije $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$

Neka je F realna funkcija koja vektor $x = [\,x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n\,]'$ preslikava u skalar, tj.

$$[\,x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n\,]' \to F(x_1, \dots, x_n). \tag{1.41}$$

Derivacija funkcije $F = F(x_1, \dots, x_n)$ $(F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R})$ je vektor čije su komponente parcijalne derivacije, tj.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \tag{1.42}$$

PRIMJER 1.15.

Za vektor $x = [\,x_1 \quad x_2 \quad x_3\,]'$ i funkciju $F(x) = x_1x_2x_3 + 3x_2 - x_3^2$ je:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = x_2x_3, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_2} = x_1x_3 + 3 \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial F}{\partial x_3} = x_1x_2 - 2x_3,$$

pa je vektor parcijalnih derivacija

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2x_3 \\ x_1x_3 + 3 \\ x_1x_2 - 2x_3 \end{bmatrix}.$$

Specijalno, iz (1.42) proizlazi da je:

- $\dfrac{\partial}{\partial x}(a'x) = a = [\,a_1 \quad \cdots \quad a_n\,]'$ pri čemu je a vektor skalara,
- derivacija kvadratne forme $x'Ax$ je: $\dfrac{\partial}{\partial x}(x'Ax) = Ax + A'x$. Ako je A simetrična matrica, tada je $\dfrac{\partial}{\partial x}(x'Ax) = 2Ax$,
- derivacija bilinearne forme je $\dfrac{\partial}{\partial x}(x'Ay) = Ay$.

Derivacija funkcije $F:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$

Ako je F realna funkcija koja vektor $x=[x_1 \ \cdots \ x_n]'$ (reda n) preslikava u vektor $y=[y_1 \ \cdots \ y_n]'$ (reda m), tj.

$$[x_1 \ \cdots \ x_n]' \mapsto F(x_1,\ldots,x_n)=[y_1 \ \cdots \ y_m]', \tag{1.43}$$

derivacija vektora $y=[y_1 \ \cdots \ y_m]'$ obzirom na vektor $x=[x_1 \ \cdots \ x_m]'$ je matrica parcijalnih derivacija reda $n\cdot m$:

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial x}=\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \tag{1.44}$$

PRIMJER 1.16.

Za vektor $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ i funkciju $F(x)=y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, pri čemu je $y_1=3x_1^2-x_2$ i $y_2=x_2^2+3x_3$, matrica parcijalnih derivacija je

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial x}=\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_3} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6x_1 & 0 \\ -1 & 2x_2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Derivacija funkcije $F:\mathbf{R}^{m\cdot n} \to \mathbf{R}$

Za realnu funkciju F $(F:\mathbf{R}^{m\cdot n}\to\mathbf{R})$ i matricu $A=[a_{ij}]$ reda $m\cdot n$, definira se funkcija $A\mapsto F(A)$, tj. funkcija F je skalarna funkcija matrice A. Ako se uvede oznaka $y=F(A)$, derivacija matrične funkcije y je matrica

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A}=\frac{\partial y}{\partial A}=\begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial a_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial a_{m1}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial a_{mn}} \end{bmatrix}=\left[\frac{\partial y}{\partial a_{ij}}\right], \quad i=1,2,\ldots,m, \quad j=1,2,\ldots,n. \tag{1.45}$$

Iz (1.45) specijalno proizlazi da je:

- derivacija kvadratne forme $x'Ax$ jednaka $\dfrac{\partial}{\partial A}(x'Ax)=xx'$.

1.6. Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Svojstvene vrijednosti kvadratne matrice A (reda n) su nultočke (korijeni) jednadžbe

$$\det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0. \tag{1.46}$$

Za kvadratnu matricu A reda n, $\det(A-\lambda I)$ je polinom n–tog reda i naziva se ***svojstven*** ili ***karakteristični polinom*** A, a jednadžba (1.46) ***svojstvena*** ili ***karakteristična jednadžba*** matrice A.

Budući da svojstvena vrijednost λ_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ matrice A zadovoljava jednadžbu (1.46), tj.

$$|A - \lambda_i I| = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \tag{1.47}$$

matrica $(A - \lambda_i I)$ je singularna, pa postoji ne nul–vektor x_i $(x_i \neq 0)$ takav da je

$$(A - \lambda_i I)x_i = 0. \tag{1.48}$$

Vektor x_i naziva se ***svojstveni vektor*** matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_i.

PRIMJER 1.17.

Određuju se svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori matrice $A = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Za jediničnu matricu $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ je

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13-\lambda & 5 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix}, \tag{1.49}$$

iz čega proizlazi da je svojstveni (karakteristični) polinom (1.46) matrice A:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 13-\lambda & 5 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (13-\lambda)(4-\lambda) - 2 \cdot 5 = \lambda^2 - 17\lambda + 42 = 0. \tag{1.50}$$

Kako su rješenja kvadratne jednadžbe (1.50) jednaka $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = 14$, zaključuje se da matrica A ima dvije različite realne svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = 14$.

Svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 3$

Prvi svojstveni vektor $x_1 = [x_{11} \quad x_{21}]'$, koji je pridružen prvoj svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 3$, dobiva se iz jednadžbe (1.48), tako da se za λ_i uvrsti vrijednost $\lambda_1 = 3$, tj.

$$(A - 3I)x_1 = 0.$$

Budući da je

$$A-3I = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13-3 & 5 \\ 2 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \tag{1.51}$$

to je

$$(A-3I)x_1 = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10x_{11}+5x_{21} \\ 2x_{11}+x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1.52}$$

Retci matrice $(A-3I)x_1$ su linerano zavisni, tj. sustav jednadžbi (1.52) ima beskonačno mnogo rješenja koja se mogu izraziti jednadžbom

$$2x_{11}+x_{21}=0, \quad \text{tj.} \quad x_{21}=-2x_{11}. \tag{1.53}$$

Kako bi se dobilo jedinstveno rješenje, rješenja se normaliziraju, tj. pretpostavlja se da je norma svojstvenog vektora jednaka jedan, tj.

$$x_{11}^2+x_{21}^2=1. \tag{1.54}$$

Tako se dobiva da je

$$\begin{gathered} x_{11}^2+x_{21}^2 = x_{11}^2+(-2x_{11})^2 = x_{11}^2+4x_{11}^2 = 5x_{11}^2 = 1 \Rightarrow x_{11}^2 = \frac{1}{5}, \\ x_{11} = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad x_{21} = -2x_{11} = -\frac{2}{\sqrt{5}}. \end{gathered} \tag{1.55}$$

Prema tome, svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 3$ je $x_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$.

Analogno se dobiva da je svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = 14$; $x_2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{26}} \\ -\frac{1}{\sqrt{26}} \end{bmatrix}$.

Svojstva:

- Svojstveni ili karakteristični polinom matrice A, $|A-\lambda I|$, općenito ima n kompleksnih nultočaka ili korijena, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{C}$. Prema tome, svojstvene vrijednosti nesimetrične matrice mogu biti realni ili kompleksni brojevi. Svojstvene vrijednosti simetrične matrice uvijek su realne.

- Neka su $x_1, \ldots, x_n$ svojstveni vektori matrice A pridruženi svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Ako se s X označi matrica čiji su stupci svojstveni vektori, tj.

$X = [\, x_1 \quad \cdots \quad x_n \,]$ tada je:

$$A[\, x_1 \ \cdots \ x_n \,] = [\, \lambda_1 x_1 \ \lambda_2 x_2 \ \cdots \ \lambda_n x_n \,] = [\, x_1 \ x_2 \ \cdots x_n \,] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad (1.56)$$

odnosno u matričnoj notaciji:

$$AX = X\Lambda, \qquad (1.57)$$

pri čemu je Λ dijagonalna matrica s vrijednostima λ_i na glavnoj dijagonali.
Prema tome, uz pretpostavku da X nije singularna matrica $(X^{-1}$ postoji), iz (1.40) proizlazi da je:

$$X^{-1}AX = \Lambda, \ \text{odnosno } A = X\Lambda X^{-1}. \qquad (1.58)$$

Matricom svojstvenih vektora X dijagonalizira se matrica A.

Naime, ako su sve svojstvene vrijednosti različite (njih n), X će imati n nezavisnih stupaca, iz čega proizlazi da je matrica X regularna i da postoji inverz X^{-1}.

- Ako je A simetrična matrica, postoje svojstveni vektori koji su i po parovima ortogonalni. Naime, ako su λ_i i λ_j dvije različite svojstvene vrijednosti matrice A, $\lambda_i \neq \lambda_j$, tada je $x_i' x_j = 0$.

Općenito, za svaku simetričnu matricu A postoji ortogonalna matrica Q $(Q'Q = I)$ takva da je $Q'AQ{=}\Lambda$, gdje je Λ dijagonalna matrica. ***Stupci*** matrice Q ustvari su ***svojstveni vektori***, a ***elementi dijagonalne matrice*** Λ ***pripadne svojstvene vrijednosti*** matrice A.

Na primjer, neka matrica A ima n različitih svojstvenih vrijednosti i neka su $x_1, \ldots, x_n$ pridruženi svojstveni vektori. Matrica $Q = \left(\frac{x_1}{\|x_1\|} \quad \cdots \quad \frac{x_n}{\|x_n\|} \right)$ ortogonalna je matrica $(Q'Q = I)$, koja dijagonalizira matricu A, tj. $Q'AQ = \Lambda$, odnosno $A = Q\Lambda Q'$.

- Trag matrice jednak je zbroju svojstvenih vrijednosti matrice, $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

- Determinanta matrice jednaka je umnošku svojstvenih vrijednosti, $|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

- Kako je $A = Q\Lambda Q'$ slijedi da je:
  $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(Q\Lambda Q') = \operatorname{rang}(\Lambda) =$ broju svojstvenih vrijednosti matrice različitih od nule.

- Potenciranje matrica: $A^n = (Q\Lambda Q')^n = Q\Lambda^n Q'$, specijalno $A^2 = Q\Lambda^2 Q'$.

- A je pozitivno definitna ***ako i samo ako*** je $\lambda_i > 0$ za svaki i.
  A je pozitivno semidefinitna ***ako i samo ako*** je $\lambda_i \geqslant 0$ za svaki i.
  A je negativno definitna ***ako i samo ako*** je $\lambda_i < 0$ za svaki i.
  A je negativno semidefinitna ***ako i samo ako*** je $\lambda_i \leqslant 0$ za svaki i.

TVRDNJA 1.:

Faktorizacija (dekompozicija) Choleskog

Ako je A simetrična i pozitivno definitna matrica, tada postoji regularna matrica P takva da je:

$$A = PP', \tag{1.59}$$

pri čemu je P donjetrokutasta matrica, tj. kvadratna matrica u kojoj su svi elementi iznad glavne dijagonale jednaki nuli.

Dokaz:

$$A = Q\Lambda Q' = Q\Lambda^{\frac{1}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}}Q' = (Q\Lambda^{\frac{1}{2}})(Q\Lambda^{\frac{1}{2}})', \tag{1.60}$$

gdje je:

$$\Lambda^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \Rightarrow P = Q\Lambda^{\frac{1}{2}}. \tag{1.61}$$

1.7. Idempotentne matrice

Matrica A je ***idempotentna matrica*** ako vrijedi da je $A^2 = A$.

Svojstva:

- Svojstvene vrijednosti idempotentne matrice su 0 ili 1.
  Naime, za svojstvenu vrijednost λ, postoji pridruženi svojstveni vektor $x \neq 0$ takav da je $Ax = \lambda x$, pa je

  $$A^2x = A\underbrace{Ax}_{\lambda x} = \lambda Ax. \tag{1.62}$$

  Kako je $A^2 = A$, slijedi da je $A^2x = Ax = \lambda Ax$ iz čega proizlazi da je $\lambda Ax - Ax = 0$ odnosno:

  $$(\lambda - 1)Ax = 0 \Rightarrow (Ax = \lambda x) \Rightarrow (\lambda - 1)\lambda x = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)\lambda = 0. \tag{1.63}$$

  Dakle, vrijednost λ može biti samo 0 ili 1.
- Ako je A idempotentna matrica, $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{tr}(A)$. Naime, za idempotentne matrice, trag matrice $\operatorname{tr}(A)$ jednak je broju svojstvenih vrijednosti različitih od 0.