1.

Trigonometrijske funkcije

1.1. Ako je $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$, izračunaj $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)$.

1.2. Izračunaj zbroj $\log_a \operatorname{tg} 1^\circ + \log_a \operatorname{tg} 2^\circ + \ldots + \log_a \operatorname{tg} 89^\circ$.

1.3. Izračunaj $\dfrac{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}$ bez uporabe tablica ili računala.

1.4. Bez uporabe tablica ili računala, izračunaj kut α ako je $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2$.

1.5. Dokaži da je

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}\cdot\operatorname{tg}\frac{3\pi}{7}=\sqrt{7}.$$

1.6. Bez uporabe tablica i kalkulatora izračunaj $\operatorname{tg} 9^\circ$.

1.7. Izračunaj kut α ako je

$$\operatorname{ctg}\alpha = 2+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}, \qquad (1)$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = 2+\sqrt{a}, \qquad (2)$$

gdje su a, b, c prirodni brojevi koji nisu djeljivi s 4, a $\sqrt{a}$, $\sqrt{bc}$ su iracionalni brojevi.

1.8. Izračunaj $\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{3}$.

* * *

1.9. Dokaži da je za prirodni broj $n \geqslant 2$ broj $\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ iracionalan.

1.10. Dokaži da je $\sin 1^\circ$ iracionalan broj.

1.11. Ako je $0<\alpha<90^\circ$ mjera nekog kuta u stupnjevima i racionalan broj, $\alpha\neq 45^\circ$, onda dokaži da je broj $\operatorname{tg}\alpha$ iracionalan.

* * *

1.12. Dokaži da je za svaki $x \in \mathbf{R}$ bar jedan od brojeva $|\sin x|$, $|\sin(x+1)|$ veći od $\frac{1}{3}$.

1.13. Odredi ekstremne vrijednosti funkcije $y = 5\sin x + 12\cos x$.

1.14. Odredi ekstreme funkcije $f(x) = a\cos^2 x + 2b\sin x\cos x + c\sin^2 x$.

1.15. Odredi ekstremne vrijednosti funkcije $f(x,y) = \cos x + \cos y - \cos(x+y)$.

1.16. Odredi:

a) najmanju vrijednost funkcije $f(x) = \sin^{100} x + \cos^{100} x$,
b) najveću vrijednost funkcije $f(x) = \sin^n x\cos x$.

* * *

1.17. Dokaži da je

$$\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8} = 2.$$

1.18. Dokaži jednakost

$$\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{8}.$$

1.19. Dokaži da je

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

1.20. Dokaži da je broj

$$\sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{3\pi}{18}\sin\frac{5\pi}{18}\sin\frac{7\pi}{18}\sin\frac{9\pi}{18}$$

racionalan.

1.21. Odredi vrijednost produkta

$$\cos 5^\circ\cdot\cos 10^\circ\cdot\cos 15^\circ\cdot\ldots\cdot\cos 80^\circ\cdot\cos 85^\circ.$$

1.22. Dokaži relaciju

$$\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}. \qquad (n \text{ korijena})$$

1.23. Dokaži da je za svaki prirodni $n > 1$
$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

1.24. Ako je $\sin\alpha+\sin\beta=a$ i $\cos\alpha+\cos\beta=b$, $a^2+b^2\neq 0$, odredi:
a) $\sin(\alpha+\beta)$ i $\cos(\alpha+\beta)$,
b) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $\alpha,\beta\in\langle 0,\pi\rangle$.

1.25. Nađi vezu između parametara a, b, c, d ako je:
$$\begin{aligned}a&=\cos x\sin y\sin z,\\ b&=\sin x\cos y\sin z,\\ c&=\sin x\sin y\cos z,\\ d&=\cos x\cos y\cos z.\end{aligned}$$

1.26. Ako je
$$\begin{aligned}\sin^2 x-\sin^2(y-z)&=a,\\ \sin^2 y-\sin^2(z-x)&=b,\\ \sin^2 z-\sin^2(x-z)&=c,\end{aligned}$$
izračunaj $\sin(x+y+z)$.

1.27. Odredi vrijednosti izraza $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$, ako je $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x\cdot\cos x}=m$, ($0<x<\dfrac{\pi}{2}$, $m\in\mathbf{R}$).

* * *

1.28. a) Odredi temeljni period funkcije $f(x)=(x-[x])\sin 3\pi x$.
b) Je li funkcija $f(x)=|x|^{\sqrt{|\cos x|-1}}$ periodična?

1.29. Odredi temeljni period funkcije $x\mapsto\sin^{2n}x$.

1.30. Ako je funkcija $f(x)=\cos x+\cos a_1x+\cos a_2x+\ldots+\cos a_nx$ periodična, dokaži da su tada brojevi $a_1,a_2,\ldots,a_n$ racionalni.

1.31. Neka su $a_1,\ldots,a_n$ realni brojevi,
$$f(x)=\cos(a_1+x)+\frac{\cos(a_2+x)}{2}+\ldots+\frac{\cos(a_n+x)}{2^{n-1}}.$$
Dokaži da iz $f(x_1)=f(x_2)=0$ slijedi $x_1-x_2=m\pi$, $m\in\mathbf{Z}$.

* * *

1.32. Dokaži da $\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha = 1$ ne vrijedi ni za jedan $\alpha \in \mathbf{R}$.

1.33. Neka je

$$\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3 = 0 \quad \text{i}$$
$$\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3 = 1.$$

Dokaži da za neki $x_k \in \{x_1, x_2, x_3\}$ vrijedi $\sin x_k = 0$ i $\cos x_k = 1$.

1.34. Dokaži da se za svaki prirodni n broj $\operatorname{tg}^{2n} 15^\circ + \operatorname{ctg}^{2n} 15^\circ$ može napisati u obliku sume kvadrata tri uzastopna prirodna broja.

1.35. Dokažite da ako je $2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 2 = 0$, tada za svaki nenegativni cijeli broj n postoje neparni cijeli brojevi a_n i b_n za koje vrijedi $\cos(2^n\alpha) = \frac{1}{4}(a_n + b_n\sqrt{17})$.

1.36. Dokaži da je za bilo koji $n \in \mathbf{N}$ i $\alpha \in \mathbf{R}$, ($n > 1$, $\sin\alpha \neq 0$) polinom $P(x) = x^n \sin\alpha - x\sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha$, djeljiv polinomom $Q(x) = x^2 - 2x\cos\alpha + 1$.

1.37. Neka su $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ takvi da je

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta = 1, \quad \text{i}$$
$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + \cos 2\delta \geqslant \frac{10}{3}.$$

Dokaži da je $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in [0, \frac{\pi}{6}]$.

1.38. Neka su a, b, A, B dani realni brojevi. Promotrimo funkciju

$$f(x) = 1 - a\cos x - b\sin x - A\cos 2x - B\sin 2x.$$

Ako je $f(x) \geqslant 0$ za svaki x, dokaži da je $a^2+b^2 \leqslant 2$ i $A^2+B^2 \leqslant 1$.

Rješenja zadataka

1.1. Primjenom adicijskog teorema za funkciju tangens, dobivamo

$$\begin{aligned}(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta) &= 1 + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta \\ &= 1 + \operatorname{tg}(\alpha+\beta) - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}(\alpha+\beta) + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta \\ &= 1 + 1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 2\end{aligned}$$

jer iz $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ slijedi $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$.

1.2. Vrijedi

$$\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ = \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{ctg} 1^\circ = 1.$$

Analogno

$$\operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 88^\circ = \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{ctg} 2^\circ = 1, \quad \text{itd.}$$

Kako je još $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, to je cijeli izraz jednak

$$\begin{aligned}&\log_a \operatorname{tg} 1^\circ + \log_a \operatorname{tg} 2^\circ + \ldots + \log_a \operatorname{tg} 89^\circ \\ &\quad = \log_a(\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdots \operatorname{tg} 89^\circ) = \log_a 1 = 0.\end{aligned}$$

1.3. Transformirajmo brojnik:

$$\begin{aligned}2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ &= \cos 40^\circ + (\cos 40^\circ - \cos 20^\circ) \\ &= \cos 40^\circ - 2\sin 30^\circ \sin 10^\circ \\ &= \cos 40^\circ - \sin 10^\circ = \sin 50^\circ - \sin 10^\circ \\ &= 2\cos 30^\circ \sin 20^\circ\end{aligned}$$

Zato je traženi izraz jednak $2\cos 30^\circ = \sqrt{3}$.

1.4. Računajmo na ovaj način:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\alpha &= \sqrt{3}(\sqrt{2}+1) - \sqrt{2}(\sqrt{2}+1) = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1} \\ &= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{\sin 60^\circ - \sin 45^\circ}{\sin 45^\circ - \sin 30^\circ} \\ &= \frac{2\cos\frac{105^\circ}{2}\sin\frac{15^\circ}{2}}{2\cos\frac{75^\circ}{2}\sin\frac{15^\circ}{2}} = \frac{\sin\frac{75^\circ}{2}}{\cos\frac{75^\circ}{2}} = \operatorname{tg}\frac{75^\circ}{2}\end{aligned}$$

te je $\alpha = 37.5^\circ$.

1.5. Dokažimo prvo lemu pri kojoj za svaki cijeli $n > 1$ vrijedi

$$\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \cdot \ldots \cdot \sin\frac{n-1}{n}\pi = \frac{n}{2^n-1}. \tag{1}$$

Nultočke polinoma $P(x) = x^n - 1 = (x-1)(x-A)(x-A^2)\cdot\ldots\cdot(x-A^{n-1})$, gdje je $A = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.

Imamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1}(x^{n-1} + \ldots + x + 1) \\ &= (1-A)(1-A^2)\cdot\ldots\cdot(1-A^{n-1}) = n,\end{aligned}$$

odakle slijedi $n = |1-A|\cdot|1-A^2|\cdot\ldots\cdot|1-A^{n-1}|$. Za $k = 1,2,\ldots,n-1$ vrijedi

$$|1-A^k| = \sqrt{\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)^2 + \sin^2\frac{2k\pi}{n}} = 2\sin\frac{k\pi}{n},$$

tj.

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} 2\sin\frac{k\pi}{n} \quad \Longrightarrow \quad \prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Sada je prema lemi (1)

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}\cdot\operatorname{tg}\frac{3\pi}{7} = \frac{\sqrt{\frac{7}{2^6}}}{\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}},$$

odakle je koristeći formule $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ i $\sin\alpha = \sin(\pi-\alpha)$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}\cdot\operatorname{tg}\frac{3\pi}{7} &= \frac{\frac{1}{8}\sqrt{7}}{\frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}\cdot\frac{\sin\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}}\cdot\frac{\sin\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{3\pi}{7}}}\\ &= \frac{\frac{\sqrt{7}}{8}}{\frac{1}{8}} = \sqrt{7}.\end{aligned}$$

1.6. Iz $\operatorname{tg}(3\cdot 36^\circ) = \operatorname{tg}108^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ-72^\circ) = -\operatorname{tg}72^\circ = -\operatorname{tg}(2\cdot 36^\circ)$, primjenom formula $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ i $\operatorname{tg}3\alpha = \operatorname{tg}(2\alpha+\alpha) = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$ dobivamo

$$\frac{3\operatorname{tg}36^\circ-\operatorname{tg}^3 36^\circ}{1-3\operatorname{tg}^2 36^\circ} = -\frac{2\operatorname{tg}36^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 60^\circ}.$$

Supstitucijom $t = \operatorname{tg}36^\circ \in \langle 0,1\rangle$ slijedi:

$$\begin{aligned}&\frac{3t-t^3}{1-3t^2} = -\frac{2t}{1-t^2} \quad \Longrightarrow \quad t^5-10t^2+5t = 0\\ \Longrightarrow \quad &(t^2)^2-10t^2+5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t^2 = 5\mp 2\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Zbog $t \in \langle 0,1\rangle$ slijedi $t = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$, pa je $\operatorname{tg} 36^\circ = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$. Sada, primjenom formule $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$ izlazi

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 9^\circ &= \operatorname{tg}(45^\circ - 36^\circ) = \frac{tg45^\circ - \operatorname{tg} 36^\circ}{1+\operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 36^\circ} = \frac{1-\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5-2\sqrt{5}}}\\ &= 1+\sqrt{5}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

1.7. Koristeći (1) i (2) u formuli $\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$, dobivamo

$$4\sqrt{a} - 2\sqrt{bc} = b + c - a - 5. \tag{3}$$

Budući su a, b, $c \in \mathbf{N}$, to je razlika $4\sqrt{a}-2\sqrt{bc} \in \mathbf{Z}$. Pretpostavimo da je ta razlika različita od nule, tj. $4\sqrt{a} = 2\sqrt{bc}+R$, $R \neq 0$. Kvadriranjem dobivamo $16a = 4bc + R^2 + 4R\sqrt{bc}$, odakle slijedi da je $\sqrt{bc}$ racionalan broj za $R \neq 0$, što je kontradikcija s uvjetom zadatka.

Sada je $R = 0$, pa iz (3) dobivamo

$$\left.\begin{aligned}4\sqrt{a} &= 2\sqrt{bc}\\ b+c &= a-5\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned}bc &= 4a\\ b+c &= a-5\end{aligned}\right\} \Longrightarrow c(4-b) = 4(5-b).$$

Kako je $b \neq 0$ i nije djeljivo s 4 dobivamo

$$c = 4\cdot\frac{4-b+1}{4-b} = 4 + \frac{4}{4-b}.$$

Na temelju posljednje jednakosti naslućujemo sljedeće mogućnosti

1° $4-b = 1$, tj. $b = 3$;
2° $4-b = -1$, tj. $b = 5$;
3° $4-b = 2$, tj. $b = 2$;
4° $4-b = -2$, tj. $b = 6$;

Mogućnosti 1° i 2° otpadaju, jer a nije element $\mathbf{N}$. Za $b = 2$ dobivamo $c = 6$ i $a = 3$, te za $b = 6$ dobivamo $c = 2$ i $a = 3$.

Dobivene vrijednosti za a, b i c zadovoljavaju sve uvjete zadatka, pa je $\operatorname{ctg}\alpha = 2+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{2}$ i $\operatorname{ctg} 2\alpha = 2+\sqrt{3}$ odakle je $2\alpha = \operatorname{arc\,tg}(2+\sqrt{3})$, te konačno $\alpha = 7.5^\circ$.

* * *

1.8. Neka je $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$, $\beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$. Tražimo $\gamma = \alpha+\beta$. Vrijedi $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = 1$ pa je $\gamma = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

1.9. Dokazujemo indukcijom. Za $n = 2$ je $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, iracionalan broj.

Pretpostavimo da je za $n > 2$ broj $\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ iracionalan. Tada je zbog relacije $\cos\dfrac{\pi}{2^n} = 2\cos^2\dfrac{\pi}{2^{n+1}} - 1$ i broj $\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ također iracionalan.

1.10. Pretpostavimo da je $\sin 1^\circ = \dfrac{m}{n}$, racionalan broj. Tada su $\cos^2 1^\circ = 1 - \sin^2 1^\circ$ i $\cos 2^\circ = \cos^2 1^\circ - \sin^2 1^\circ$ racionalni brojevi. Analogno se dobiva da su brojevi $\cos 4^\circ$, $\cos 8^\circ$, $\cos 16^\circ$, $\cos 32^\circ$ racionalni. Međutim, tada bi vrijedilo:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{2} &= \cos 30^\circ = \cos(32^\circ - 2^\circ)\\ &= \cos 32^\circ \cos 2^\circ + \sin 32^\circ \sin 2^\circ\\ &= \cos 32^\circ \cos 2^\circ + 2^6 \cos 16^\circ \cos 8^\circ \cos 4^\circ \cos 2^\circ \cos^2 1^\circ \sin^2 1^\circ.\end{aligned}$$

S lijeve strane je iracionalan, a s desne strane racionalan broj. Proturječje!

1.11. Pretpostavimo suprotno, tj. da je

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbf{N}, \quad M(p,q) = 1, \quad p \neq q. \tag{1}$$

Po pretpostavci je α racionalan pa postoje $m, n \in \mathbf{N}$ takvi da je

$$\alpha = \frac{m}{n} \cdot 180^\circ \quad \text{i} \quad M(m,n) = 1. \tag{2}$$

Koristeći Moivreove formule za n-tu potenciju kompleksnih brojeva

$$\begin{aligned}(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n &= \cos n\alpha + i\sin n\alpha,\\ (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n &= \cos n\alpha - i\sin n\alpha,\end{aligned} \tag{3}$$

te iz (2) činjenicu da je $\sin n\alpha = 0$ slijedi

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n.$$

Podijelivši ovu jednakost s $\cos^n\alpha \neq 0$ dobivamo

$$(1 + i\operatorname{tg}\alpha)^n = (1 - i\operatorname{tg}\alpha)^n$$

što zbog (1) dalje daje

$$(q + ip)^n = (q - ip)^n$$

što zbog Binomne formule možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}(q - ip)^n = [(q - ip) + 2ip]^n = (q - ip)^n + \binom{n}{1}(q - ip)^{n-1} \cdot 2ip + \ldots\\ + \binom{n}{n-1}(q - ip)(2ip)^{n-1} + (2ip)^n.\end{aligned}$$

Odavde je

$$-(2ip)^{n-1} = (q-ip)\left[\binom{n}{1}(q-ip)^{n-2} + \binom{n}{2}(q-ip)^{n-3}\cdot 2ip + \dots \right.$$
$$\left. + \binom{n}{n-1}(2ip)^{n-2}\right].$$

Kompleksni broj na lijevoj strani ove jednakosti mora biti jednak kompleksnom broju na desnoj, pa moraju biti jednaki i kvadrati njihovih formula, odakle mora vrijediti

$$(2p)^{2n-2} = (p^2+q^2)\cdot |z|^2 \tag{4}$$

gdje je z kompleksni broj u uglatim zagradama. Očito je z^2 prirodan broj, pa zbog (4) zaključujemo da $(2p)^{2n-2}$ mora biti djeljiv s (p^2+q^2).

S druge strane je $M(p,q)=1$, pa je i $M(p,p^2+q^2)=1$ što navodi na to da 2^{2n-2} mora biti djeljiv s p^2+q^2. Pokažimo da je to nemoguće!

Najprije, p i q ne mogu biti istovremeno parni jer je to u kontradikciji s (1), pa razlikujemo dva slučaja:

(i) Ako je p paran i q neparan (ili obrnuto) onda je p^2+q^2 neparan, pa očito 2^{2n-2} nije djeljiv s (p^2+q^2).

(ii) Ako su p i q neparni onda su oni oblika

$$p = 2k\pm 1 \qquad \text{i} \qquad q = 2l \pm 1; \qquad k,l\in \mathbf{N},$$

pa je $p^2+q^2 = 2(2k^2+2l^2+2k+2l+1)$.

Odavde zaključujemo da (p^2+q^2) sadrži neparan faktor. Treba vidjeti da je on različit od 1. Zaista, kada bi bilo

$$2k^2+2l^2+2k+2l+1 = 1, \quad \text{tj.}$$
$$k^2+l^2+k+l=0,$$

slijedilo bi $k=l=0$, a to je nemoguće jer po pretpostavci je $p\neq q$.

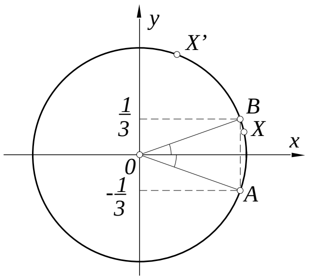
Dobivena kontradikcija pretpostavci (1) dokazuje tvrdnju zadatka.

* * *

1.12. Neka su A i B točke na jediničnoj kružnici za koje je $\sin \sphericalangle COB = \frac{1}{3}$, $\sin \sphericalangle COA = -\frac{1}{3}$ (sl. **??**). Obilježimo sa X i X' točke te kružnice takve da je $\sphericalangle COX = x$ i $\sphericalangle COX' = x'$ (mjereno u radijanima). Moramo pokazati da se barem jedna od točaka X ili X' ne nalazi na luku ACB. U tu je svrhu dovoljno pokazati da je $\sphericalangle AOB$ manji od jednog radijana.

Imamo

$$\begin{aligned}\sin \sphericalangle AOB &= \sin(2\sphericalangle COB) = \sin\Big(2\arcsin\frac{1}{3}\Big)\\ &= 2\sin\Big(\arcsin\frac{1}{3}\Big)\cos\Big(\arcsin\frac{1}{3}\Big)\\ &= \frac{2}{3}\sqrt{1-\Big(\frac{1}{3}\Big)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{9} < 0.7.\end{aligned}$$



Sl. 1.1.

S druge strane je $\sin 1 > \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} > 0.7$. Dobili smo $\sin \sphericalangle AOB < \sin 1$ i stoga je $\sphericalangle AOB < 1$, što je trebalo pokazati.

1.13. Napišimo funkciju u obliku $y = 13\big(\frac{5}{13}\sin x + \frac{12}{13}\cos x\big)$. Kako je $\big(\frac{5}{13}\big)^2 + \big(\frac{12}{13}\big)^2 = 1$, to postoji kut α takav da je $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ i $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, pa se funkcija dade napisati u obliku

$$y = 13(\cos\alpha\sin x + \sin\alpha\cos x) = 13\sin(x+\alpha).$$

Najveća vrijednost $y_{\max} = 13$ poprima se za $x = \frac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi$, a najmanja $y_{\min} = -13$ za $x = -\frac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi$.

1.14.

$$\begin{aligned}f(x) &= a\cos^2 x + 2b\sin x\cos x + c\sin^2 x\\ &= a\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} + b\sin 2x + c\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\\ &= \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2}\cos 2x + b\sin 2x\\ &= \frac{a+c}{2} + A\cdot\sin(2x+\varphi),\end{aligned}$$

gdje je $A = \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2}$, $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{a-c}{2b}$ pa $f(x)$ ima ekstreme istovremeno kad i $\sin(2x+\varphi)$. Stoga je

$$f(x)_{\min} = \frac{a+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2}$$
$$f(x)_{\max} = \frac{a+c}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2}$$

1.15. Očito je zbog $|\cos\alpha| \leqslant 1$, $f(x,y) \geqslant -3$. Kako je za $x = y = \pi$, $f(x,y) = \cos\pi + \cos\pi - \cos 2\pi = -3$, to je minimum funkcije -3.

Transformiramo li funkciju

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - 2\cos^2\frac{x+y}{2} + 1 \\ &= -2\left(\cos\frac{x+y}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cos^2\frac{x-y}{2} + 1 \\ &\leqslant 0 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Budući je za $x = y = \frac{\pi}{3}$ $\cos\frac{x+y}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \cos\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cos 0 = 0$, a $\cos^2\frac{x-y}{2} = \cos^2 0 = 1$, to je $f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$, maksimum funkcije.

1.16. (a) Usporedimo li sredinu reda 50 s aritmetičkom sredinom za brojeve $\sin^2 x$ i $\cos^2 x$, dobivamo:

$$\sqrt[50]{\frac{(\sin^2 x)^{50} + (\cos^2 x)^{50}}{2}} \geqslant \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Stoga je $f(x) \geqslant \frac{1}{2^{49}}$, kod čega f postiže tu donju granicu za sve x za koje je $\sin^2 x = \cos^2 x$, npr. $x = \frac{\pi}{4}$.

(b) Očito je dovoljno gledati f samo na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, na kojemu su $\sin x$ i $\cos x$ pozitivni.

Nejednakost između geometrijske i kvadratne sredine za $(n+1)$-torku brojeva $(\sin x, \ldots, \sin x, \sqrt{n}\cdot\cos x)$ daje

$$\sqrt[n+1]{\sin^n x\cdot\sqrt{n}\cos x} \leqslant \sqrt{\frac{\sin^2 x + \ldots + \sin^2 x + n\cos^2 x}{n+1}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

iz čega slijedi $f(x) \leqslant \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}$, pri čemu se taj ekstrem postiže za $\sin x = \sqrt{n}\cos x$, tj. $\operatorname{tg} x = \sqrt{n}$.

* * *

1.17. Vrijedi

$$\begin{aligned}
&\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}\\
&\quad=\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\Big(\pi-\frac{5\pi}{8}\Big)+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\Big(\pi-\frac{\pi}{8}\Big)\\
&\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}=2.
\end{aligned}$$

1.18. Označimo $A=\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{8}$. Tada je

$$\begin{aligned}
A\sin\frac{\pi}{7}&=\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}\\
&=\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}\sin\frac{5\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}\\
&=\frac{1}{4}\sin\frac{10\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=-\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\\
&=-\frac{1}{8}\sin\frac{8\pi}{7}=\frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{7}
\end{aligned}$$

Odavde je $A=\frac{1}{8}$.

1.19.

$$\begin{aligned}
&\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\\
&=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{14}}\Big(\cos\frac{\pi}{14}\cdot\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{14}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{14}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}\Big)\\
&=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{14}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Big(\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{\pi}{14}-\cos\frac{5\pi}{14}-\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{7\pi}{14}\\
&\qquad+\cos\frac{5\pi}{14}\Big)=\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{14}}\Big(\cos\frac{\pi}{14}+\cos\frac{7\pi}{14}\Big)\\
&=\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{14}}\cdot\cos\frac{\pi}{14}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Koristili smo formulu transformacije produkta u sumu:

$$\cos x\cdot\cos y=\tfrac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)].$$

1.20. Budući je $\sin\dfrac{3\pi}{18}=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$, $\sin\dfrac{9\pi}{18}=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$, izraz (1) postaje $\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{18}\sin\dfrac{5\pi}{18}\sin\dfrac{7\pi}{18}$.

Koristeći formule $\sin 2x=2\sin x\cos x$ i $\sin x=\cos(\frac{\pi}{2}-x)$, izraz (1) dalje možemo transformirati

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sin\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{4\pi}{18}\cos\frac{2\pi}{18}}{2\cos\frac{\pi}{18}}=\tfrac{1}{4}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{18}\cos\frac{2\pi}{18}\cos\frac{4\pi}{18}}{\cos\frac{\pi}{18}}$$
$$=\tfrac{1}{8}\cdot\frac{\sin\frac{4\pi}{18}\cos\frac{4\pi}{18}}{\cos\frac{\pi}{18}}=\frac{1}{16}\cdot\frac{\sin\frac{8\pi}{18}}{\cos\frac{\pi}{18}}=\frac{1}{16}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{18}}{\cos\frac{\pi}{18}}=\frac{1}{16},$$

što je očigledno racionalan broj.

1.21. Označimo li zadani produkt s A, imamo redom:

$$\begin{aligned}
A&=\cos 5^\circ\cos 10^\circ\cos 15^\circ\cdot\ldots\cdot\cos 40^\circ\cos 45^\circ\cdot\\
&\qquad\cdot\sin 40^\circ\cdot\ldots\cdot\sin 10^\circ\sin 5^\circ\\
\sqrt{2}A&=(\sin 5^\circ\cos 5^\circ)(\cos 10^\circ\sin 10^\circ)\cdot\ldots\cdot(\cos 40^\circ\sin 40^\circ)\\
2^8\cdot\sqrt{2}\cdot A&=\sin 10^\circ\cdot\sin 20^\circ\cdot\ldots\cdot\sin 80^\circ\\
2^8\cdot\sqrt{2}\cdot A&=(\sin 10^\circ\cos 10^\circ)\cdot\ldots\cdot(\sin 40^\circ\cdot\cos 40^\circ)\\
2^{12}\cdot\sqrt{2}\cdot A&=\frac{\sqrt{3}}{2}(\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ)\\
&=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ(\sin 40^\circ\sin 80^\circ)\\
&=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ(\sin^2 60^\circ-\sin^2 20^\circ)\\
&=\sqrt{3}\Big(\frac{3}{4}\sin 20^\circ-\sin^3 20^\circ\Big)\\
&=\frac{\sqrt{3}}{8}(3\sin 20^\circ-4\sin^3 20^\circ)\\
&=\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 60^\circ=\frac{3}{16},
\end{aligned}$$

odakle sada jednostavno dobivamo $A=3\cdot 2^{-\frac{33}{2}}$.

1.22. Za $n=1$ je $\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ te je relacija istinita. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n:

$$\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}=\frac{A}{2},$$

(u zapisu je n korijena). Tada za broj $n+1$ imamo

$$\cos\frac{\pi}{2^{n+2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{A}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+A}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+A}.$$

Dobili smo identičan izraz, s $n+1$ korijena. Time je tvrdnja dokazana.

* * *

1.23. Jednadžba $z^n = 1$ ima za rješenja sljedećih n kompleksnih brojeva:

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Označimo ih redom

$$\begin{aligned} z_0 &= \cos\frac{0\pi}{n} + i\sin\frac{0\pi}{n} = 1, \\ z_1 &= \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, \\ &\vdots \\ z_{n-1} &= \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}. \end{aligned}$$

Ti su brojevi nul-točke polinoma z^n-1. Stoga se taj polinom dade prikazati u obliku

$$\begin{aligned} z^n - 1 &= (z-z_0)(z-z_1)\cdots(z-z_{n-1}) \\ &= (z-1)(z-z_1)\cdots(z-z_{n-1}) \end{aligned}$$

Dijeljenjem s faktorom $(z-1)$ slijedi

$$\frac{z^n-1}{z-1} = z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1 = (z-z_1)\cdots(z-z_{n-1}).$$

Ova relacija vrijedi za svaki kompleksni broj z. Izaberimo $z=1$:

$$n = (1-z_1)1-z_2)\cdots(1-z_{n-1})$$

i uzmimo apsolutnu vrijednost obiju strana:

$$n = |1-z_1| \cdot |1-z_2| \cdots |1-z_{n-1}|.$$

Umnošci na desnoj strani sređuju se ovako:

$$\begin{aligned}|1-z_k| &= \left|1-\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\right|\\ &= \left|1-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}\right|\\ &= \left|2\sin\frac{k\pi}{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n}-i\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right|\\ &= 2\sin\frac{k\pi}{n}\left(\sin^2\frac{k\pi}{n}+\cos^2\frac{k\pi}{n}\right)\\ &= 2\sin\frac{k\pi}{n}.\end{aligned}$$

Odavde

$$n = 2\sin\frac{\pi}{n}\cdot 2\sin\frac{2\pi}{n}\cdots 2\sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

što dokazuje tvrdnju.

1.24. (a) Imamo redom

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{a}{b}, \qquad \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{a}{b},$$

tj.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{a}{b}=\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha+\beta)}{1+\cos(\alpha+\beta)}},$$

odakle kvadriranjem slijedi $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$, tj.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

(b) Krenimo od identiteta

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Iz jednadžbi $a^2=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta$ i $b^2=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta$ zbrajanjem dobivamo $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{a^2+b^2-2}{2}$. Nadalje, $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\sqrt{\dfrac{\cos(\alpha-\beta)+1}{2}}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$. Kako vrijedi $b=$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, to imamo $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, odakle dobivamo

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\begin{aligned}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} &= \tfrac{1}{2}\Big(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)\\ &= \tfrac{1}{2}\Big(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big) = \frac{a^2+b^2+2b}{4\sqrt{a^2+b^2}}.\end{aligned}$$

Napokon se dobiva $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{4a}{a^2+b^2+2b}$.

1.25. Redom je $ac = \frac{1}{4}\cdot\sin 2x\cdot\sin 2z\cdot\sin^2 y$ i $bd = \frac{1}{4}\sin 2x\cdot\sin 2z\cdot\cos^2 y$, odakle zbog $\cos^2 y = 1-\sin^2 y$ slijedi

$$\sin^2 y = \frac{ac}{bd+ac}. \tag{1}$$

Dalje je $bc = \frac{1}{4}\sin 2y\cdot\sin 2z\cdot\sin^2 x$ i $ad = \frac{1}{4}\sin 2y\cdot\sin 2z\cdot\cos^2 x$ odakle slijedi

$$\sin^2 x = \frac{bc}{ad+bc}. \tag{2}$$

Nadalje je $ab = \frac{1}{4}\sin 2x\cdot\sin 2y\cdot\sin^2 z$ i $cd = \frac{1}{4}\sin 2x\cdot\sin 2y\cdot\cos^2 z$, tj.

$$\sin^2 z = \frac{ab}{cd+ab}. \tag{3}$$

Jednostavno dobivamo

$$d = \frac{abc}{\sin^2 x\cdot\sin^2 y\cdot\sin^2 z}$$

odakle uz (1), (2) i (3) konačno slijedi

$$(ab+cd)\cdot(ac+bd)\cdot(ad+bc) = abcd.$$

1.26. Imamo redom:

$$\sin^2 x - \sin^2(y-z) = a$$

$$[\sin x - \sin(y-z)][\sin x + \sin(y-z)] = a$$

$$2\cos\frac{x+y-z}{2}\sin\frac{x-y+z}{2}\cdot 2\sin\frac{x+y-z}{2}\cos\frac{x-y+z}{2} = a$$

$$2\sin\frac{x-y+z}{2}\cos\frac{x-y+z}{2}\cdot 2\sin\frac{x+y-z}{2}\cos\frac{x+y-z}{2} = a$$

$$\sin(x-y+z)\sin(x+y-z) = a. \tag{1}$$

Slično dobivamo

$$\sin(-x+y+z)\sin(x+y-z)=b \tag{2}$$
$$\sin(-x+y+z)\sin(x-y+z)=c. \tag{3}$$

Pomnožimo li (1), (2) i (3), te izvadimo li drugi korijen, dobivamo:

$$\sin(-x+y+z)\sin(x-y+z)\sin(x+y-z)=\sqrt{abc}. \tag{4}$$

Podijelimo li (4) redom s (1), (2) i (3) dobivamo $\sin(-x+y+z)=\sqrt{\dfrac{bc}{a}}$, $\sin(x-y+z)=\sqrt{\dfrac{ac}{b}}$ i $\sin(x+y-z)=\sqrt{\dfrac{ab}{c}}$, odakle slijedi $-x+y+z=\arcsin\sqrt{\dfrac{bc}{a}}$, $x-y+z=\arcsin\sqrt{\dfrac{ac}{b}}$, $x+y-z=\arcsin\sqrt{\dfrac{ab}{c}}$. Zbrajanjem ovih jednadžbi dobivamo

$$x+y+z=\arcsin\sqrt{\frac{bc}{a}}+\arcsin\sqrt{\frac{ac}{b}}+\arcsin\sqrt{\frac{ab}{c}}.$$

Upotrebom identiteta

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma\\ +\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,\end{aligned}$$

te uz $\sin(\arcsin x)=x$ i $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$, dobivamo

$$\begin{aligned}\sin(x+y+z)=\sqrt{\frac{bc}{a}\left(1-\frac{ac}{b}\right)\left(1-\frac{ab}{c}\right)}+\sqrt{\frac{ac}{b}\left(1-\frac{bc}{a}\right)\left(1-\frac{ab}{c}\right)}\\ +\sqrt{\frac{ab}{c}\left(1-\frac{bc}{a}\right)\left(1-\frac{ac}{b}\right)}-\sqrt{abc}.\end{aligned}$$

1.27. Vrijedi

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\sin x\cos x}.$$

Označimo $t=\sin x\cos x$. Kvadriranjem i sređivanjem izraza

$$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cdot\cos x}=m$$

dobivamo $m^2t^2-2t-1=0$. Odavde $t=\dfrac{1\pm\sqrt{1+m^2}}{m^2}$. Zbog $t>0$ imamo $t=\dfrac{1+\sqrt{1+m^2}}{m^2}$. Zato, $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\dfrac{m^2}{1+\sqrt{m^2+1}}$.