1.

Općinsko natjecanje

Ciklus susreta i natjecanja mladih matematičara, učenika osnovnih i srednjih škola Republike Hrvatske, u posljednjoj godini 20. stoljeća započeo je kao i ranijih godina školskim natjecanjima. Ona su se provodila tijekom siječnja i veljače. Odaziv učenika bio je tradicionalno velik. Najbolji učenici na školskim natjecanjima pozvani su na općinska i gradska natjecanja. Ova natjecanja održana su 3. ožujka 2000. po jedinstvenim kriterijima Državnog povjerenstva za matematička natjecanja, koje je pripremilo i zadatke za ta natjecanja. Evo tih zadataka.

Osnovna škola

4. razred

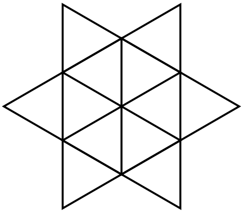
4.1. Izračunaj:

$$58 \cdot 284 - 58 \cdot 273 + 11 \cdot 42 - 1001.$$

4.2. Tri ribara ulovila su $296\,\mathrm{kg}$ ribe. Kada je prvi prodao $51\,\mathrm{kg}$, drugi $42\,\mathrm{kg}$ i treći $23\,\mathrm{kg}$ ostala im je jednaka količina ribe. Koliko je svaki pojedinačno ulovio ribe?

4.3. Kad je majka rodila sina imala je 24 godine, a kad je rodila kćerku imala je 29 godina. Koliko godina danas imaju majka, sin i kćerka ako je zbroj njihovih godina 55?

4.4. Lik na slici izrađen je od jednakostraničnih trokuta. Opseg najvećeg jednakostraničnog trokuta je $54\,\mathrm{cm}$. Kolika treba biti duljina žice od koje se može napraviti takav lik?

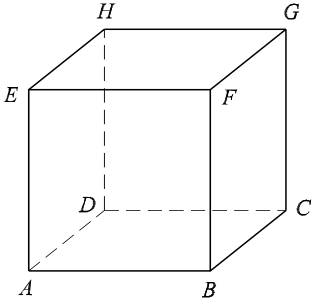


Sl. 1.1.

4.5. Iz vrha pravog kuta povuci tri polupravca koji pripadaju unutrašnjosti tog lika. Koliko si tada dobio šiljastih kutova?

5. razred

5.1. Na slici je prikazana kocka $ABCDEFGH$. Koliko ima dužina kojima su obje krajnje točke vrhovi kocke? Ispiši sve te dužine.



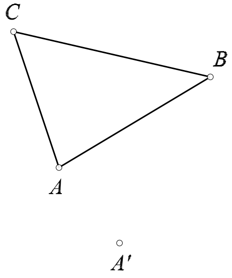
Sl. 1.2.

5.2. Odredi sve peteroznamenkaste brojeve $\overline{47a9b}$ koji su djeljivi brojem 18.

5.3. Duljine stranica pravokutnika $ABCD$ su $68\,\text{mm}$ i $4\,\text{cm}$. Na duljoj stranici $\overline{CD}$ dana je točka M koja je dijeli na dva jednaka dijela. Izračunaj površinu lika $ABMD$.

5.4. Damir je stariji od Josipa za onoliko godina za koliko je Josip stariji od Borisa. Koliko godina ima Josip, ako njih trojica zajedno imaju 54 godine?

5.5. Na slici je dan trokut ABC i točka A' koja je osnosimetrična slika točke A obzirom na neki pravac p. Konstruiraj pravac p i osnosimetričnu sliku trokuta ABC obzirom na taj pravac p.



Sl. 1.3.

6. razred

6.1. Izračunaj:

$$\frac{\dfrac{0.21}{0.75-0.6}-\dfrac{7}{6}:\left(\dfrac{1}{15}+\dfrac{3}{8}+\dfrac{29}{40}\right)}{\dfrac{28}{65}\cdot\left(\dfrac{9}{2}-\dfrac{25}{7}\right)}.$$

6.2. Damjan je zamislio jedan broj, dodao mu broj $\frac{1}{2}$, dobiveni zbroj pomnožio s $\frac{2}{3}$, tako dobiveni broj povećao za $\frac{3}{4}$ i dobio broj $\frac{253}{12}$. Koji je broj zamislio Damjan?

6.3. U nekoj školi postoje tri odjela šestog razreda: 6 a, 6 b i 6 c. Broj učenika 6 a je za tri veći od broja učenika u 6 b, a broj učenika u 6 b je za 8 manji od broja učenika u 6 c. Koliko je učenika u pojedinom odjelu, ako u školi ima ukupno 110 učenika šestog razreda?

6.4. Zadan je trokut ABC. Na produžetku stranice $\overline{AB}$ preko vrha A nanesi točku E tako da je $|AE| = |AC|$, a na produžetku stranice $\overline{AB}$ preko vrha B nanesi točku D tako da je $|BD| = |BC|$. Izračunaj veličinu kuta $\sphericalangle ECD$, ako je $\sphericalangle ACB = 74^\circ$.

6.5. Na stranicama trokuta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ jednakostraničnog trokuta ABC označene su redom točke N, P i R takve da je $|AN| = |BP| = |CR|$. Dokaži da je trokut NPR jednakostraničan.

7. razred

7.1. Izračunaj x iz razmjera

$$\frac{1.2:0.375-0.2}{6\frac{4}{25}:15\frac{2}{5}+0.8}=\frac{0.016:0.12+0.7}{x}.$$

7.2. Na jednom općinskom natjecanju iz matematike sudjelovalo je 240 učenika. Polovinu svih učenika čine $\frac{3}{5}$ svih djevojčica i $\frac{3}{7}$ svih dječaka. Koliko je na natjecanju sudjelovalo dječaka, a koliko djevojčica?

7.3. Razlika dvoznamenkastog broja i broja napisanog istim znamenkama, ali obrnutog redoslijeda je 45, a zbroj ta dva dvoznamenkasta broja jednak je umnošku dva ista prirodna broja. Koja dva dvoznamenkasta broja imaju to svojstvo?

7.4. Dan je pravokutnik $ABCD$, kome je točka S sjecište dijagonala. Na stranici $\overline{AD}$ odabrane su točke E i F, tako da je $|AE| = |EF| = |FD|$. Odredi omjer površine peterokuta $EBSCF$ i površine pravokutnika $ABCD$.

7.5. U jednakokračnom trokutu ABC duljina kraka je dva puta veća od duljine osnovice, tj. $|AC| = |BC| = 2|AB|$. Neka je točka D polovište kraka $\overline{AC}$, a točka E polovište kraka $\overline{BC}$. Koliki su unutarnji kutovi trokuta ABC, ako dužine $\overline{AE}$ i $\overline{BD}$ zatvaraju kut od 76°?

8. razred

8.1. Skrati razlomak

$$\frac{8ab-(a+2b)^2}{3a^2-12b^2}.$$

8.2. Konstruiraj kvadrat površine $14\,\mathrm{cm}^2$.

8.3. Dana su dva okomita pravca a i c. Neka su pravci b i d simetrale kutova koje zatvaraju pravci a i c. Na pravcu a odaberemo točku A koja je od sjecišta S pravaca a i c udaljena 2. U točki A podignemo okomicu na pravac a i s B označimo sjecište te okomice i pravca b. Neka je točka C presjek okomice na pravac b u točki B i pravca c, točka D presjek okomice na pravac c u točki C i pravca d, točka E presjek okomice na pravac d u točki D i pravca a, točka M presjek okomice na pravac a u točki E i pravca b, točka N presjek okomice na pravac b u točki M i pravca c. Kolika je površina mnogokuta $SABCDEMN$?

8.4. Iz mjesta A krenuo je autobus u mjesto B brzinom od $48\,\mathrm{km}$ na sat. Nakon pola sata vožnje autobusa, motorist koji se kretao isto iz mjesta A u mjesto B brzinom od $60\,\mathrm{km}$ na sat, sustigao je autobus i odmah nastavio vožnju u mjesto B. Došavši u mjesto B motorist se zadržao u mjestu 12 minuta i nastavio vožnju natrag u mjesto A, pa se tako susreo s autobusom na udaljenosti $12\,\mathrm{km}$ od mjesta B.

Kolika je udaljenost mjesta A i mjesta B?

8.5. Dan je šiljasti kut α s vrhom u točki V. Unutar kuta α istaknuta je točka S koja je središte kružnice k. Kružnica k siječe jedan krak kuta

α u točkama A i B, a drugi krak u točkama C i D, tako da su točke B i D bliže vrhu V nego točke A i C.

Dokaži da je $\sphericalangle AVC = \frac{1}{2}(\sphericalangle ASC - \sphericalangle BSD)$.

Srednja škola

1. razred

1.1. Darko će 2000. godine navršiti onoliko godina koliki je zbroj znamenki godine njegova rođenja. Koje godine je Darko rođen?

1.2. Koliko različitih cjelobrojnih rješenja ima jednadžba

$$|x| + |y| < 100?$$

1.3. Ako je $a + b = 1$ i $ab \neq 0$, dokažite jednakost

$$\frac{a}{b^3 - 1} - \frac{b}{a^3 - 1} = \frac{2(b-a)}{a^2b^2 + 3}.$$

1.4. Neka su R i r polumjeri opisane i upisane kružnice pravokutnog trokuta. Dokažite nejednakost

$$R \geq r(1 + \sqrt{2}).$$

2. razred

2.1. Za realan broj $a \geq 1$ riješite jednadžbu

$$z + a|z + 1| + i = 0, z \in \mathbf{C}.$$

Diskusija!

2.2. Neka je $a + b + c > 0$ i neka jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ nema realnih rješenja. Dokažite da je $c > 0$.

2.3. Konstruirajte trapez $ABCD$, ako je zadan zbroj duljina osnovica, $|AB| + |CD|$, duljine dijagonala $|AC|$ i $|BD|$ i kut pri vrhu A.

2.4. Dokažite da postoji barem 2000 trojki prirodnih brojeva (a, b, c) takvih da je $a^{15} + b^{15} = c^{16}$.

3. razred

3.1. Riješite jednadžbu

$$\log_{\sin x} \cos x - 2 \log_{\cos x} \sin x + 1 = 0.$$

3.2. Za koje trokute vrijedi jednakost

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) + \operatorname{tg}(\beta - \gamma) + \operatorname{tg}(\gamma - \alpha) = 0,$$

ako su α, β i γ, kutovi trokuta?

3.3. Stranice trokuta duljina $a = 14$, $b = 13$ i $c = 15$, tangiraju sferu polumjera $R = 5$. Odredite udaljenost središta sfere od ravnine trokuta.

3.4. Dana je funkcija $f(x) = \dfrac{a^x}{a^x + \sqrt{a}}$, gdje je a pozitivan realan broj. Odredite

$$S = f\left(\frac{1}{2001}\right) + f\left(\frac{2}{2001}\right) + \ldots + f\left(\frac{2000}{2001}\right).$$

4. razred

4.1. Nađite sve četveroznamenkaste brojeve koji su jednaki kvadratu nekog cijelog broja, a imaju svojstvo da su im znamenke desetica i tisućica jednake, dok im je znamenka stotica za 1 veća od znamenke jedinica.

4.2. Ako su a, b i c duljine stranica trokuta, takve da je $a+b = 3c$, dokažite jednakost

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = 2.$$

4.3. U elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ (sa središtem u ishodištu), upisan je trokut ABC tako da je tangenta na elipsu u svakom njegovom vrhu paralelna s nasuprotnom stranicom trokuta. Kolika je površina tog trokuta ako je $C = (0, b)$?

4.4. Dokažite da je

$$\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$$

neparan broj za svaki pozitivan cijeli broj n.

Rješenja

Osnovna škola

4.1. $58 \cdot 284 - 58 \cdot 273 + 11 \cdot 42 - 1001 = 58(284 - 273) + 11 \cdot 42 - 1001 = 58 \cdot 11 + 11 \cdot 42 - 1001 = 11 \cdot (58 + 42) - 1001 = 11 \cdot 100 - 1001 = 1100 - 1001 = 99$.

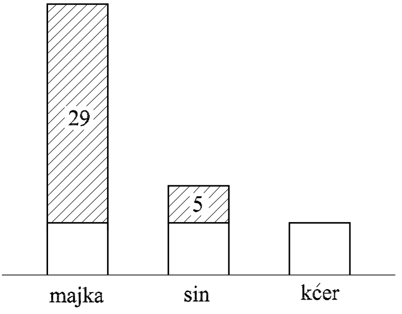
4.2.

$$296 - (51 + 42 + 23) = 180$$

$$180 : 3 = 60$$

Prvi ribar ulovio je $60 + 51 = 111$ kg ribe. Drugi ribar ulovio je $60 + 42 = 102$ kg ribe. Treći ribar ulovio je $60 + 23 = 83$ kg ribe.

4.3. Razlika godina majke i kćeri je 29, a razlika godina sina i kćeri je 5, pa grafički to prikazujemo ovako:

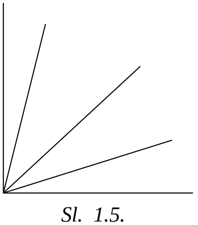


Sl. 1.4.

Budući da je zbroj godina majke, sina i kćeri jednak 55, to tri neiscrtana pravokutnika odgovaraju broju $55 - 29 - 5 = 21$, tj. jedan neiscrtani pravokutnik odgovara broju 7. Kćer ima 7 godina. Sin ima $7 + 5 = 12$ godina. Majka ima $29 + 7 = 36$ godina.

4.4. Stranica najvećeg jednakostraničnog trokuta duga je $54 : 3 = 18$ cm. Duljina stranice najmanjeg trokuta je $18 : 3 = 6$ cm. Duljina žice treba biti $24 \cdot 6 = 144$ cm.

4.5.



Sl. 1.5.

Dobili smo 9 šiljastih kutova.

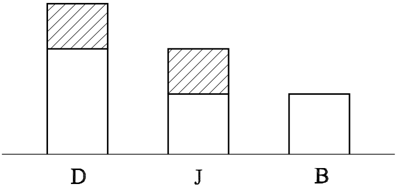
* * *

5.1. Kocka ima 8 vrhova. Svaki vrh možemo spojiti s još 7 vrhova. Dakle, na taj način se dobiva $8 \cdot 7 = 56$ dužina. Ali, u brojanju se svaka dužina pojavila dva puta, pa ukupno ima $56 : 2 = 28$ dužina. To su sljedeće dužine: AB, AC, AD, AE, AF, AG, AH, BC, BD, BE, BF, BG, BH, CD, CE, CF, CG, CH, DE, DF, DG, DH, EF, EG, EH, FG, FH, GH.

5.2. Ako je broj djeljiv s 18, tada je djeljiv s 2 i s 9. Iz djeljivosti s 2 slijedi da je znamenka b jednaka 0, 2, 4, 6 ili 8. Ako je $b = 0$, tada zbog djeljivosti s 9 mora biti i zbroj $4 + 7 + a + 9 + 0$ djeljiv s 9, tj. $a = 7$. Ako je $b = 2$, tada je $a = 5$. Ako je $b = 4$, tada je $a = 3$. Ako je $b = 6$, tada je $a = 1$. Ako je $b = 8$, tada je $a = 8$. Traženi brojevi su 47 790, 47 592, 47 394, 47 196, 47 898.

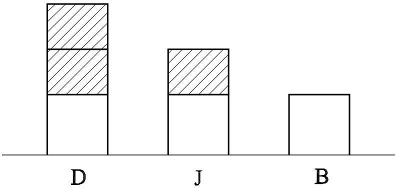
5.3. Stranica $\overline{DM}$ duga je $68 : 2 = 34\,\text{mm}$. Površina pravokutnika iznosi $P(ABCD) = 68 \cdot 40 = 2720\,\text{mm}^2$. Površina pravokutnog trokuta BCM iznosi $P(BCM) = (34 \cdot 40) : 2 = 680\,\text{mm}^2$. Površina lika $ABMD$ jednaka je razlici površina pravokutnika i pravokutnog trokuta BCM, tj. $P(ABMD) = 2720 - 680 = 2040\,\text{mm}^2$.

5.4. Uvjet zadatka možemo grafički prikazati ovako



Sl. 1.6.

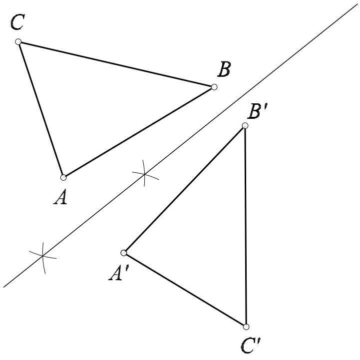
Ako je razlika Damirovih i Josipovih godina jednaka razlici Josipovih i Borisovih godina, onda je Damir od Borisa stariji dvostruko više nego što je Damir stariji od Josipa, tj. imamo ovakav grafički prikaz:



Sl. 1.7.

Zbroj njihovih godina je 54, a grafički taj zbroj se sastoji od 3 neiscrtana i 3 iscrtana pravokutnika. Dakle, jedan neiscrtani i jedan iscrtani pravokutnik odgovaraju trećini ukupnog zbroja, tj. $\frac{1}{3} \cdot 54 = 18$. Budući da su Josipove godine upravo prikazane pomoću jednog iscrtanog i jednog neiscrtanog pravokutnika, slijedi da Josip ima 18 godina.

5.5. Najprije konstruiramo pravac p kao simetralu dužine $\overline{AA'}$, a zatim odredimo točke B' i C' zrcalno simetrične točkama B i C u odnosu na pravac p.



Sl. 1.8.

* * *

6.1.

$$\frac{\dfrac{0.21}{0.75-0.6}-\dfrac{7}{6}:\left(\dfrac{1}{15}+\dfrac{3}{8}+\dfrac{29}{40}\right)}{\dfrac{28}{65}\cdot\left(\dfrac{9}{2}-\dfrac{25}{7}\right)}=\frac{\dfrac{0.21}{0.15}-\dfrac{7}{6}:\dfrac{140}{120}}{\dfrac{28}{65}\cdot\dfrac{13}{14}}$$

$$=\frac{\dfrac{7}{5}-1}{\dfrac{2}{5}}=1.$$

6.2. Nepoznati broj označimo s x. Tada imamo

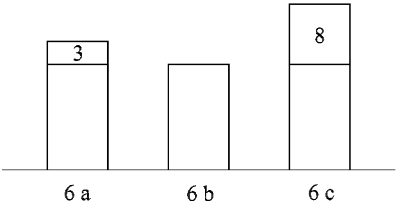
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{253}{12},$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}=\frac{253}{12}-\frac{3}{4},\qquad \left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}=\frac{61}{3}$$

$$x+\frac{1}{2}=\frac{61}{3}\cdot\frac{3}{2},\qquad x+\frac{1}{2}=\frac{61}{2},$$

$$x=\frac{61}{2}-\frac{1}{2},\qquad x=30.$$

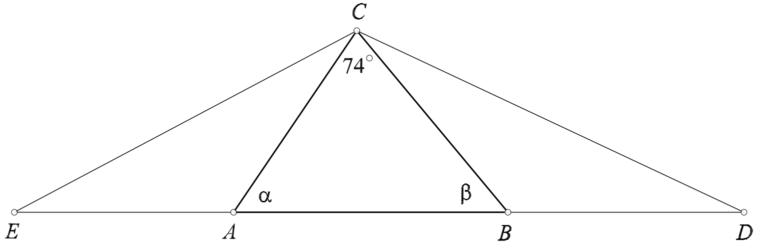
6.3. Uvjete zadatka grafički prikazujemo ovako



Sl. 1.9.

Budući da je ukupan broj šestoškolaca 110, slijedi da je broj učenika u 6 b jednak trećini razlike $110 - 3 - 8$, tj. u 6 b ima 33 učenika. Sad zaključujemo da u 6 a ima $33 + 3 = 36$ učenika, a u 6 c ima $33 + 8 = 41$ učenik.

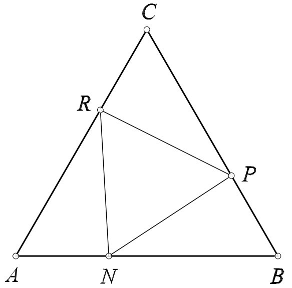
6.4.



Sl. 1.10.

Budući da je $|AC| = |AE|$, slijedi da je trokut ACE jednakokračan, pa je $\sphericalangle CEA = \sphericalangle ECA$. Zbroj ta dva kuta jednak je vanjskom kutu trokuta ACE pri vrhu A, tj. $\sphericalangle CEA + \sphericalangle ECA = \alpha$, te je $\sphericalangle CEA = \sphericalangle ECA = \frac{1}{2}\alpha$. Budući da je $|BC| = |BD|$, trokut BDC je jednakokračan, pa je $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BDC$. Zbroj ta dva kuta jednak je vanjskom kutu trokuta BDC pri vrhu B, tj. $\sphericalangle BCD + \sphericalangle BDC = \beta$, te je $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BDC = \frac{1}{2}\beta$. Sada je $\sphericalangle ECD = \sphericalangle ECA + \sphericalangle ACB + \sphericalangle BCD = \frac{1}{2}\alpha + 74^\circ + \frac{1}{2}\beta = 74^\circ + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 74^\circ + \frac{1}{2}(180^\circ - 74^\circ) = 127^\circ$.

6.5. Budući da je $|AN| = |BP| = |CR|$, slijedi $|NB| = |PC| = |RA|$. Uz to u jednakostraničnom trokutu vrijedi $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = 60^\circ$, pa su trokuti NBP, PCR i RAN sukladni. Odavde je $|NP| = |PR| = |RN|$, pa je trokut NPR jednakostraničan.



Sl. 1.11.

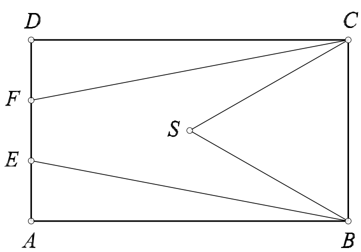
* * *

7.1. Vrijednost brojnika prvog razlomka je 3. Vrijednost nazivnika prvog razlomka je 1.2. Vrijednost brojnika drugog razlomka je $\frac{5}{6}$. Tražena vrijednost je $x = \frac{1}{3}$.

7.2. Neka je x broj djevojčica koje su sudjelovale na natjecanju. Tada je $240 - x$ broj dječaka. Zato vrijedi jednadžba $\frac{3}{5}x + \frac{3}{7}(240 - x) = 120$, čije je rješenje $x = 100$. Na natjecanju je sudjelovalo 140 dječaka i 100 djevojčica.

7.3. Neka traženi dvoznamenkasti brojevi imaju oblik $\overline{ab}$ i $\overline{ba}$, te neka je $\overline{ab} > \overline{ba}$. Tada vrijedi jednakost $10a + b - (10b + a) = 45$, ili dalje redom $10a + b - 10b - a = 45$, $9a - 9b = 45$, $a - b = 5$, tj. $a = 5 + b$. Kako je $10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a + b)$ i 11 je prost broj, slijedi da je $a + b = 11$. Ako u ovoj jednakosti zamijenimo a s $b + 5$, dobivamo $b + 5 + b = 11$, tj. $b = 3$. Zato je $a = 8$. Traženi dvoznamenkasti brojevi su 83 i 38.

7.4.



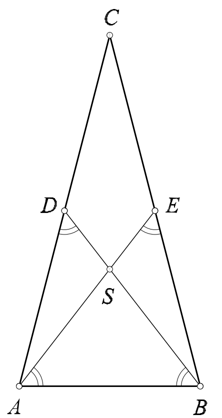
Sl. 1.12.

Neka je $|AB| = |CD| = a$, $|BC| = |AD| = b$. Tada je $|AE| = |EF| =$

$|FD| = \dfrac{b}{3}$. U trokutu SBC visina na stranicu $\overline{BC}$ ima duljinu $\dfrac{a}{2}$, pa je $P(SBC) = \dfrac{1}{2} \cdot b \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{ab}{4}$. $P(BAE) = P(CDF) = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot \dfrac{b}{3} = \dfrac{ab}{6}$. $P(EBSCF) = P(ABCD) - P(SBC) - P(BAE) - P(CDF) = ab - \dfrac{ab}{4} - \dfrac{ab}{6} - \dfrac{ab}{6} = \dfrac{5}{12}ab$.
Omjer površina je $\dfrac{P(EBSCF)}{P(ABCD)} = \dfrac{5}{12}$.

7.5. *Komentar.* Podaci iz prve rečenice jednoznačno određuju sve kuteve u trokutu ABC, pa tako i kut između dužina $\overline{AE}$ i $\overline{BD}$. Taj kut iznosi *otprilike* 76°, ali ne točno. Stoga ćemo u rješenju šiljasti kut kojeg zatvaraju $\overline{AE}$ i $\overline{BD}$ označiti s φ.

Neka je S presjek dužina $\overline{AE}$ i $\overline{BD}$.



Sl. 1.13.

Najprije uočimo da su trokuti DAB i ABE sukladni, jer su oba jednakokračna, kraka duljine $|AB|$ i kuta pri vrhu $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABE$. Stoga je $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ADB = \sphericalangle AEB = \sphericalangle BAE$.

Označimo veličinu tih kuteva s x. Tada je $\sphericalangle ASB = 180^\circ - \sphericalangle SAB - \sphericalangle SBA = 180^\circ - 2x$ i $\sphericalangle DAB = 180^\circ - \sphericalangle ADB - \sphericalangle ABD = 180^\circ - 2x$. Vidimo da je $\sphericalangle ASB = \sphericalangle DAB$, te je stoga $\sphericalangle ASB$ šiljast, tj. jednak φ.

Kutevi trokuta su $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = \varphi$, $\sphericalangle ACB = 180^\circ - 2\varphi$. (Uvrstimo li zadanu vrijednost kuta φ dobivamo 76°, 76°, 28°.)

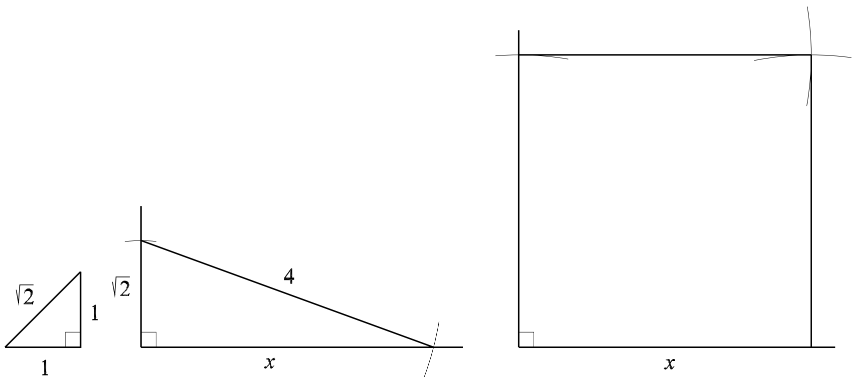
* * *

8.1. Ako u brojniku zadanog razlomka kvadriramo, pa brojnik i nazivnik rastavimo na faktore dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{8ab-(a+2b)^2}{3a^2-12b^2} &= \frac{8ab-(a^2+4ab+4b^2)}{3a^2-12b^2}\\ &= \frac{-a^2+4ab-4b^2}{3(a^2-4b^2)} = \frac{-(a^2-4ab+4b^2)}{3(a^2-4b^2)}\\ &= \frac{-(a-2b)^2}{3(a-2b)(a+2b)} = \frac{-(a-2b)}{3(a+2b)}.\end{aligned}$$

8.2. Neka je x duljina stranice traženog kvadrata. Tada je $x^2 = 14$, tj. $x = \sqrt{14}\,\text{cm}$. Dužinu duljine $\sqrt{14}\,\text{cm}$ možemo konstruirati na više načina.

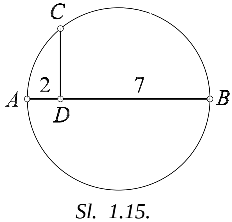
1. način.



Sl. 1.14.

Kako je $x^2 = 16-2$, tj. $x^2 = 4^2-(\sqrt{2})^2$, slijedi da je x kateta pravokutnog trokuta s hipotenuzom duljine $4\,\text{cm}$ i katetom $\sqrt{2}\,\text{cm}$. Najprije valja konstruirati dužinu duljine $\sqrt{2}\,\text{cm}$ (to je dijagonala kvadrata stranice duljine $1\,\text{cm}$).

2. način.

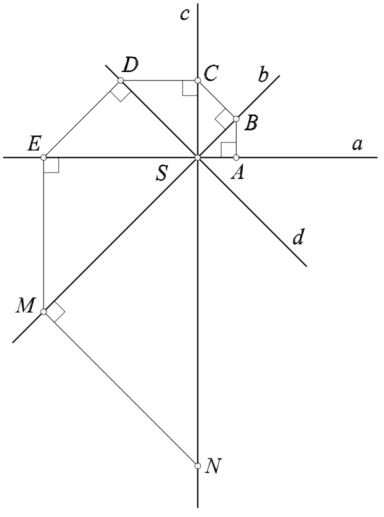


Sl. 1.15.

Dužinu duljine $\sqrt{14}$ konstruirat ćemo primjenom Euklidova poučka, koristeći $14 = 2\cdot 7$. Nacrtamo kružnicu promjera $\overline{AB}$ $(|AB| = 2+7 = 9\,\text{cm})$. Neka je D točka na promjeru za koju vrijedi $|AD| = 2\,\text{cm}$. Okomica na $\overline{AB}$ u točki D siječe kružnicu u točki C, te je prema Euklidovom poučku $|CD|^2 = |AD| \cdot |BD|$, pa je $|CD| = \sqrt{14}$, tj. $\overline{CD}$ je tražena stranica kvadrata.

3. način. Dužinu duljine $\sqrt{14}$ konstruiramo pomoću spirale kvadratnog korijena.

8.3.

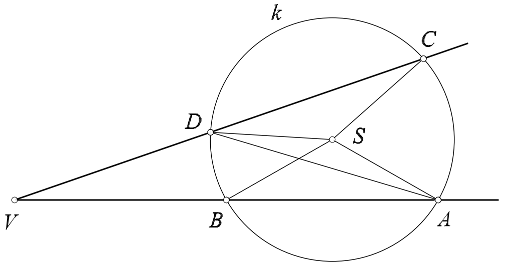


Sl. 1.16.

Kako su pravci b i d simetrale pravih kutova, pravci a i b, b i c, c i d, d i a se sijeku pod kutem od 45° u točki S. To znači da je svaki od 6 pravokutnih trokuta na slici jednakokračan, tj. polovica kvadrata kojima su stranice redom $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$, $\overline{SD}$, $\overline{SE}$, $\overline{SM}$. Iz $|SA| = 2$ slijedi $P(SAB) = 2$. Kako je $|SB| = 2\sqrt{2}$ slijedi $P(SBC) = \frac{1}{2}(2\sqrt{2})^2 = 4$. Zbog $|SC| = |SB|\sqrt{2} = 4$ dobivamo $P(SCD) = 8$. Na isti način je $P(SDE) = 16$. Analogno, $P(SEM) = 32$. I konačno $P(SMN) = 64$. Tada je $P(SABCDEMN) = 2+4+8+16+32+64 = 126$.

8.4. Neka je C mjesto u kojem je motorist sustigao autobus. Tada je $|AC| = 24\,\text{km}$. Neka je D mjesto u kojem su se motorist i autobus susreli nakon povratka motorista iz mjesta B. Tada je $|BD| = 12\,\text{km}$. Neka je $|CD| = x\,\text{km}$. Put od C do D autobus je prešao za $\frac{x}{48}$ sati. Put od C do B i od B do D, tj. $(x+12)+12$ km motorist je prešao za $\frac{x+24}{60} + \frac{1}{5}$ sati, a to je jednako vremenu za koje autobus prevali put od C do D. Zato vrijedi jednadžba $\frac{x+24}{60} + \frac{1}{5} = \frac{x}{48}$. Rješenje je $x = 144\,\text{km}$. Udaljenost mjesta A i B je $24 + 144 + 12 = 180\,\text{km}$.

8.5. Neka je $\sphericalangle AVC = \alpha$, $\sphericalangle ASC = \beta$, $\sphericalangle BSD = \gamma$. Primjenom poučka o obodnom i središnjem kutu u kružnici k vrijedi $\sphericalangle ASC = 2\sphericalangle ADC$, tj. $\sphericalangle ADC = \frac{1}{2}\beta$. Primjenom istog poučka vrijedi $\sphericalangle BSD = 2\sphericalangle BAD$, tj. $\sphericalangle BAD = \frac{1}{2}\gamma$. Kako je $\sphericalangle ADC$ vanjski kut trokuta DVA, slijedi $\sphericalangle ADC = \sphericalangle AVD + \sphericalangle VAD$, a zbog $\sphericalangle AVD = \sphericalangle AVC = \alpha$ i $\sphericalangle VAD = \sphericalangle BAD = \frac{1}{2}\gamma$, vrijedi $\frac{1}{2}\beta = \alpha + \frac{1}{2}\gamma$, pa je $\alpha = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$, što je i trebalo dokazati.



Sl. 1.17.

Srednja škola

1.1. Darko nema više od $1+9+9+9 = 28$ godina, pa je rođen u dvadesetom stoljeću, recimo $\overline{19mn}$ godine. Stoga će 2000. godine imati $2000 - (1900 + 10m + n)$ godina, što mora biti jednako zbroju znamenki godine njegova rođenja. Dakle,

$$2000 - (1900 + 10m + n) = 1 + 9 + m + n \Rightarrow 11m + 2n = 90.$$

Kako je $11m = 90 - 2n$, m mora biti paran.

Iz $0 \leq n = \frac{1}{2}(90 - 11m) \leq 9$ slijedi $m \leq \frac{90}{11}$ tj. $m \leq 8$ (jer je m cijeli broj) i $m \geq \frac{1}{11}(90 - 2 \cdot 9) = \frac{72}{11}$ tj. $m \geq 7$. Kako m mora biti paran, slijedi $m = 8$, a onda $n = 1$.

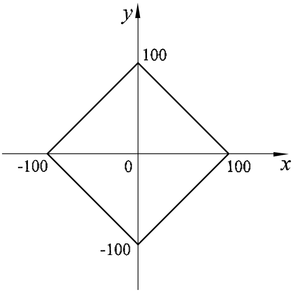
Darko je rođen 1981. godine i ove godine navršava $1 + 9 + 8 + 1 = 19$ godina.

1.2. Treba odrediti koliko ima točaka (x, y) s cjelobrojnim koordinatama unutar kvadrata (bez rubova) određenog pravcima

$$x + y = 100, \; x - y = 100, \; -x + y = 100, \; -x - y = 100.$$

Na koordinatnim osima ima ih $4 \cdot 99 + 1 = 397$. U svakom kvadrantu (bez koordinatnih osi) ima ih

$$\begin{aligned} 98 + 97 + \ldots + 2 + 1 &= (98 + 1) + (97 + 2) + \ldots + (50 + 49) \\ &= \frac{99 \cdot 98}{2} = 4851. \end{aligned}$$



Sl. 1.18.

Ukupno ih ima

$$397 + 4 \cdot 4851 = 19801.$$

1.3. *Prvo rješenje.* Stavimo $b = 1 - a$. Pokažimo da je lijeva strana jednaka desnoj:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{a}{b^3 - 1} - \frac{b}{a^3 - 1} = \frac{a}{(1-b)^3 - 1} - \frac{1-a}{a^3 - 1} \\
&= \frac{a}{1 - 3a + 3a^2 - a^3 - 1} - \frac{1-a}{(a-1)(a^2 + a + 1)} \\
&= \frac{1}{-a^2 + 3a - 3} + \frac{1}{a^2 + a + 1} \\
&= \frac{-4a + 2}{a^4 - 2a^3 + a^2 + 3}; \\
D &= \frac{2(b-a)}{a^2b^2 + 3} = \frac{2(1 - a - a)}{a^2(1-a)^2 + 3} = \frac{2 - 4a}{a^4 - 2a^3 + a^2 + 3.}
\end{aligned}$$

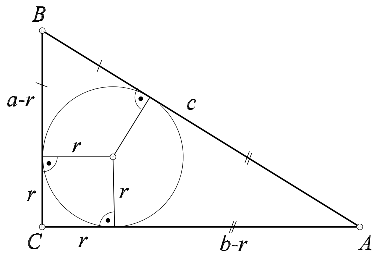
Drugo rješenje. Zbog $a + b = 1$ vrijedi $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 1$ i $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 1$.

Sada je

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b^3 - 1} - \frac{b}{a^3 - 1} &= \frac{a^4 - a - b^4 + b}{a^3b^3 - a^3 - b^3 + 1} \\
&= \frac{(b-a)[1 - (a+b)(a^2 + b^2)]}{a^3b^3 - a^3 - b^3 + (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)} \\
&= \frac{(b-a)[(a+b)^2 - 1 \cdot (a^2 + b^2)]}{a^3b^3 + 3a^2b + 3ab^2} \\
&= \frac{(b-a) \cdot 2ab}{ab[a^2b^2 + 3(a+b)]} = \frac{2(b-a)}{a^2b^2 + 3}
\end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati.

1.4. *Prvo rješenje.* U pravokutnom trokutu je $c = 2R$ i $(a-r)+(b-r) = c$, tj. $a+b = c+2r$.



Sl. 1.19.

Zbog $(a-b)^2 \geq 0$ je $2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$, odnosno $\sqrt{2}c \geq a+b$. Uvrstimo li u posljednju nejednakost jednakost $a+b = c+2r$, dobijamo

$$c+2r \leq \sqrt{2}c, \text{ odnosno } 2R+2r \leq 2\sqrt{2}R.$$

Odavde je $(\sqrt{2}-1)R \geq r$ tj. $R \geq (1+\sqrt{2})r$.

Drugo rješenje. U pravokutnom trokutu vrijedi:

$$c = 2R, \ (a-r)+(b-r) = c, \ \text{tj. } a+b-c = 2r.$$

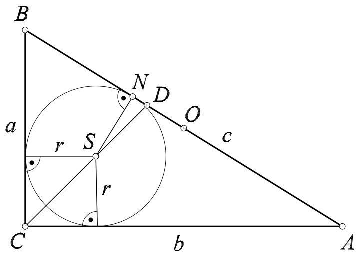
Nejednakost $R \geq (1+\sqrt{2})r$ je ekvivalentna sa sljedećim nizom nejednakosti:

$$\begin{aligned}
2R &\geq 2r(1+\sqrt{2}),\\
c &\geq (1+\sqrt{2})(a+b-c),\\
(2+\sqrt{2})c &\geq (1+\sqrt{2})(a+b),\\
c\sqrt{2} &\geq a+b,\\
2c^2 &\geq (a+b)^2,\\
2(a^2+b^2) &\geq (a+b)^2,\\
a^2+b^2 &\geq 2ab,\\
(a-b)^2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Kako je posljednja nejednakost istinita, vrijedi i polazna nejednakost.

Treće rješenje. Ako je $a = b$, trokut je jednakokračan, i lako se pokaže da vrijedi čak jednakost.

Uzmimo $a < b$. Neka je S središte upisane kružnice, O središte opisane kružnice, N diralište upisane kružnice i hipotenuze i $D = CS \cap AB$, točka u kojoj simetrala pravog kuta siječe hipotenuzu.



Sl. 1.20.

Vrijedi:

$$r(\sqrt{2}+1) = r\sqrt{2}+r = |CS|+|SN| \le |CS|+|SD| = |CD| \le |CO| = R.$$

* * *

2.1. Uvrstimo $z = x+iy$:

$$x+iy+a\sqrt{(x+1)^2+y^2}+i=0,$$

i odavde

$$y+1=0, \ x+a\sqrt{(x+1)^2+y^2}=0.$$

Slijedi, $y=-1$, $(a^2-1)x^2+2a^2x+2a^2=0$. Za $a\neq 1$ je

$$x_{1,2} = \frac{-a^2 \pm a\sqrt{2-a^2}}{a^2-1}.$$

Zbog $x_{1,2}\in\mathbf{R}$, mora biti $1\le a\le\sqrt{2}$ i tada je $z_{1,2} = \dfrac{-a^2 \pm a\sqrt{2-a^2}}{a^2-1} - i$. U ovom slučaju postoje dva rješenja.

Za $a=1$ je $2x+2=0$ tj. $x=-1$, pa je $z=-1-i$ jedino rješenje.

2.2. *Prvo rješenje.* Neka je $f(x)=ax^2+bx+c$. Tada je $f(1)=a+b+c>0$. Kako je $f(x)\neq 0$ (jer jednadžba nema realnih rješenja), slijedi $f(x)>0$ za svaki realan broj x. Zato je $f(0)=c>0$.

Drugo rješenje. Pretpostavimo da je $c<0$. Uz $a\ge 0$ jednadžba bi imala realna rješenja (jer je $b^2-4ac\ge 0$).

Uzmimo $a<0$. Iz $a<0, c<0, b^2-4ac<0, a+b+c>0,$ slijedi $b>-a-c, b^2<4ac$ i

$$b^2>(a+c)^2=a^2+c^2+2ac\ge 4ac,$$

što je kontradikcija.