# 1.

# Općinsko natjecanje

Općinska i gradska natjecanja održana su u svim gradovima i naseljima naše domovine 2. ožujka 2001.

## Osnovna škola

### 4. razred

**4.1.** Koliko parnih a koliko neparnih brojeva $x$ zadovoljava nejednakost

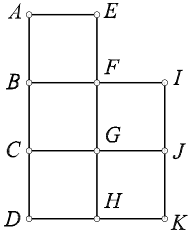
$$9872 : 8 - 77 \cdot 13 < x < 7020 : 45 + 1001 : 11?$$

**4.2.** Ante, Mate i Jure imali su ukupno 1200 kuna i odlučili kupiti video igru. Nakon što je Ante za video igru dao 210, Mate 186, a Jure 174 kune, svakome od njih ostala je jednaka svota novaca. Koliko je novaca prije kupovine imao svatko od njih?

**4.3.** Koliko ima dvoznamenkastih brojeva kojima je umnožak znamenki najviše 4?

**4.4.** Ivan je sudjelovao u lutriji u kojoj je svaka srećka označena nekim troznamenkastim brojem. Kupio je sve srećke označene brojevima kojima je umnožak znamenke desetica i znamenke jedinica jednak 12 a zbroj te dvije znamenke za 1 se razlikuje od znamenke stotica. Koliko je srećki i s kojim brojevima kupio Ivan?

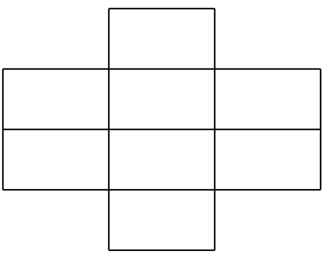
**4.5.** Na slici je istaknuto 11 točaka $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, $H$, $I$, $J$ i $K$. Koliko ima dužina, nacrtanih na slici, kojima su krajevi ove točke? Napiši sve takve dužine.




*Sl. 1.1.*

## 5. razred

**5.1.** Koliko ukupno ima pravokutnika na slici?



*Sl. 1.2.*

**5.2.** Odredi sve četveroznamenkaste brojeve oblika $\overline{abba}$ djeljive s 45.

**5.3.** Marko, Borna i Zlatko imaju određen broj pikula. Borna ima dva puta više pikula od Marka, a Zlatko ima dva puta više pikula od Borne. Zbroj Markovih i Zlatkovih pikula za 153 je veći od broja Borninih pikula. Koliko pikula ima svaki od dječaka?

**5.4.** Na dvjema policama ima ukupno 90 knjiga. Kad bi se šest knjiga premjestilo s prve na drugu policu, tada bi na prvoj polici bilo dvostruko više knjiga nego na drugoj. Koliko ima knjiga na svakoj polici?

**5.5.** Anica ima troje djece. Najstarije je tri puta starije od najmlađeg, a umnožak godina svo troje djece je 864. Koliko godina ima svako dijete?

## 6. razred

**6.1.** Izračunaj

$$\frac{0.725+1-1:40-40\cdot 0.032}{\frac{115}{3}-\frac{5}{3}\cdot 7+1\frac{5}{6}:0.3\cdot 0.75}.$$

**6.2.** Koliko ima troznamenkastih brojeva kojima je zbroj znamenki dvoznamenkasti broj koji se dobije tako da se tom troznamenkastom broju ispusti znamenka jedinica?

**6.3.** Odredi ona dva troznamenkasta broja čiji je količnik 7, a zbroj im je djeljiv s 336.

**6.4.** Voćar je donio na tržnicu 258 kg jabuka od čega je dio prodao. Da je prodao 15 kg više ostala bi mu samo šestina od ukupne količine jabuka. $\frac{3}{8}$ prodanih jabuka i još 5 kg jabuka prodao je po cijeni 3.5 kn za kilogram. Za ostatak jabuka dobio je $\frac{15}{7}$ puta više novaca nego za jabuke prodane po 3.5 kn/ kg. Po kojoj cijeni je prodao ostatak jabuka?

**6.5.** U pravokutniku $ABCD$ je $|AD|=12$ cm. Na pravcu $CD$ preko vrha $C$ odabrana je točka $E$ tako da je zbroj svih stranica lika $ABED$ 123 cm, a opseg trokuta $CBE$ je 64 cm. Kolika je površina pravokutnika $ABCD$?

## 7. razred

**7.1.** Izračunaj vrijednost izraza

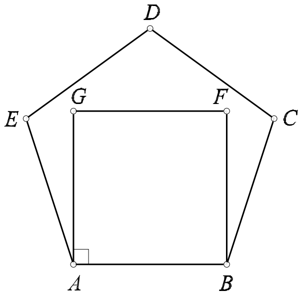
$$\frac{\left(1\frac{3}{25}-1.87\right)\cdot 1.2-1.25:1\frac{7}{18}}{1.4:0.01-50}.$$

**7.2.** Koliko ima četveroznamenkastih brojeva u kojima postoje znamenke koje se ponavljaju?

**7.3.** Ako se posuda puni prvom slavinom, napunit će se za 18 minuta, a ako se puni drugom slavinom napunit će se za 27 minuta. Otvorimo li obje slavine, koliko će vremena proći dok u posudi bude $\frac{5}{9}$ njezine zapremine?

**7.4.** Unutarnji kut pravilnog mnogokuta 12 je puta veći od pridruženog vanjskog kuta. Koliko dijagonala ima taj mnogokut?

**7.5.** Unutar pravilnog mnogokuta $ABCDE$ nacrtan je kvadrat $ABFG$ kao na slici. Koliki je kut $\sphericalangle ACF$?




*Sl. 1.3.*

## 8. razred

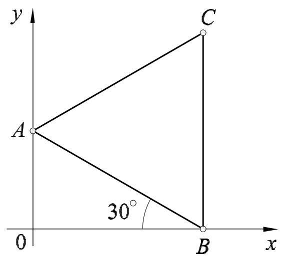
**8.1.** Odredi vrijednost razlomka $\dfrac{3y^2 - 2xy + x^2}{x^2 + xy + y^2}$ ako je $\dfrac{y}{x} = 3$.

**8.2.** Izračunaj vrijednost izraza

$$\frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{7}{2\sqrt{2}+1} - \left(11 - 5\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{5}\right).$$

**8.3.** Ostatak pri dijeljenju cijelog broja $a$ s 4 je 3. Koliki je ostatak pri dijeljenju broja $a^2 - a$ s 4?

**8.4.** U pravokutnom koordinatnom sustavu nacrtan je jednakostranični trokut $ABC$, kao na slici, kome je $|AB| = a$. Odredi koordinate vrhova $A$, $B$ i $C$ tog trokuta.




*Sl. 1.4.*

**8.5.** U danu kružnicu upisan je četverokut $ABCD$ kome se dijagonale sijeku u točki $M$ pod pravim kutom. Točkom $M$ nacrtan je pravac $p$ okomit na stranicu $\overline{AB}$. Dokaži da pravac $p$ raspolavlja stranicu $\overline{CD}$.

# Srednja škola

## 1. razred

**1.1.** Između znamenki 4 i 9 broja 49 umetnuto je nekoliko četvorki, a iza njih isto toliko osmica. Dokažite da je tako dobiveni broj potpuni kvadrat.

**1.2.** Na koliko načina možemo izabrati dva različita broja iz skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 2001\}$ tako da njihov zbroj bude paran?

**1.3.** Iz polovišta svake stranice šiljastokutnog trokuta spuštene su okomice na ostale dvije stranice. Dokažite da je površina šesterokuta omeđenog tim okomicama jednaka polovini površine trokuta.

**1.4.** Ako su $x$, $y$ i $z$ pozitivni realni brojevi takvi da je $xyz = 1$, dokažite da je vrijednost izraza

$$\frac{x+1}{xy+x+1} + \frac{y+1}{yz+y+1} + \frac{z+1}{zx+z+1}$$

konstantna.

## 2. razred

**2.1.** Brojevi $x$ i $y$ zadovoljavaju sustav jednadžbi:

$$x + y + \frac{x}{y} = 19,$$
$$\frac{x(x+y)}{y} = 60.$$

Koje sve vrijednosti može poprimiti $x + y$?

**2.2.** Trokutu $ABC$ sa stranicama duljina $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ opisana je kružnica. Tangenta na tu kružnicu u točki $C$ okomita je na stranicu $\overline{AB}$. Dokažite da je

$$(a^2 - b^2)^2 = c^2(a^2 + b^2).$$

**2.3.** Izračunajte vrijednost produkta

$$\left(1 + \frac{1+i}{2}\right)\left(1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^2\right)\left(1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^2}\right)\cdots$$
$$\left(1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^k}\right)\cdots\left(1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^{2001}}\right).$$

**2.4.** Riješite sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= 9, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} &= 1, \end{aligned}$$

gdje je $n$ prirodan broj, a $x_1$, $x_2, \ldots,$ $x_n$ su pozitivni realni brojevi.

## 3. razred

**3.1.** Riješite nejednadžbu

$$x^{1+\log_a x} > a^2 x, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

**3.2.** Sfera sadrži vrhove donje baze kocke brida $a = 8$ cm i dodiruje gornju bazu. Koliki je njezin polumjer?

**3.3.** U ravnini su dane dvije različite točke $A$ i $B$. Dokažite da se skup točaka $M$, takvih da je

$$\left| |MA|^2 - |MB|^2 \right| = kP(\triangle MAB),$$

gdje je $k > 0$ dana konstanta i $P(\triangle MAB)$ površina trokuta $MAB$, sastoji od dva pravca.

**3.4.** Kvadrat je upisan u kružni isječak $OAB$ sa središnjim kutom $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$, tako da su mu dva vrha na polumjeru $\overline{OA}$, treći na luku $\overset{\frown}{AB}$ i četvrti na polumjeru $\overline{OB}$. Nađite omjer površina kružnog isječka i kvadrata.

## 4. razred

**4.1.** Točka $(0, 3)$ je na paraboli $f(x) = x^2 + px + q$. Tangenta parabole u toj točki ima koeficijent smjera $k = -1$. Odredite njezinu jednadžbu.

**4.2.** Zadan je niz $0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21, \ldots$, kod kojeg se razlika susjednih članova uvećava za 1.

a) Odredite opći član niza.

b) Odredite zbroj prvih $n$ članova niza, za prirodan broj $n$.

**4.3.** Nađite sve funkcije $f : \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbf{R}$ koje zadovoljavaju jednadžbu

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) = x.$$

**4.4.** Oko okruglog stola sjedi $m$ žena i $n$ muškaraca ($m + n \geq 3$). Kada, u ovisnosti o $m$ i $n$, možemo sa sigurnošću tvrditi da postoji osoba koja sjedi između dva muškarca?

# Rješenja

## Osnovna škola

**4.1.** Izvršimo li naznačene računske operacije, nejednakost postaje $1234 - 1001 < x < 156 + 91$, odnosno $233 < x < 247$. Svi prirodni brojevi $x$ koji zadovoljavaju ovu nejednakost su: 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246. Među njima ima 7 parnih brojeva. Neparnih brojeva koji zadovoljavaju tu nejednakost ima 6.

**4.2.** Ante, Mate i Jure platili su video igru ukupno $210+186+174 = 570$ kuna. Prema tome, od ukupne svote novaca koju su imali na početku, nakon kupovine video igre dječacima je ostalo $1200 - 570 = 630$ kuna. Svima su ostali jednaki iznosi, i to svakome po $630 : 3 = 210$ kuna. Dakle, prije kupovine Ante je imao $210 + 210 = 420$ kuna, Mate $186 + 210 = 396$ kuna, a Jure $174 + 210 = 384$ kune.

**4.3.** Umnožak znamenki može biti 0, 1, 2, 3 ili 4. Umnožak znamenki jednak 0 imaju jedino dvoznamenkasti brojevi 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 i 90, ukupno njih 9. Jedini dvoznamenkasti broj s umnoškom znamenki jednakim 1 je 11. Budući da je $2 = 1 \cdot 2 = 2 \cdot 1$, jedini dvoznamenkasti brojevi s umnoškom znamenki jednakim 2 su 12 i 21, tj. 2 broja. Slično, iz $3 = 1 \cdot 3 = 3 \cdot 1$ slijedi da su 13 i 31 jedina dva dvoznamenkasta broja kojima je umnožak znamenki jednak 3. Konačno, iz $4 = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2 = 4 \cdot 1$ slijedi da umnožak znamenki jednak 4 imaju samo dvoznamenkasti brojevi 14, 22 i 41, tj. 3 broja. Prema tome, postoji 17 dvoznamenkastih brojeva sa zadanim svojstvom.

**4.4.** Prema uvjetima zadatka, umnožak znamenke desetice i znamenke jedinice jednak je 12 pa su mogući parovi $(D, J)$ ($D$ je znamenka desetica a $J$ znamenka jedinica): $(2, 6)$, $(6, 2)$, $(3, 4)$ i $(4, 3)$. Zbroj $D + J$ u prva dva para jednak je 8 pa su u tom slučaju moguće znamenke stotica 7 i 9. Prema tome, Ivan je kupio srećke s brojevima 726, 762, 926 i 962. Zbroj $D + J$ u druga dva para jednak je 7 pa su moguće znamenke stotica u tom slučaju 6 i 8. To znači da je Ivan kupio i srećke s brojevima 634, 643, 834 i 843. Ivan je kupio ukupno 8 srećki.

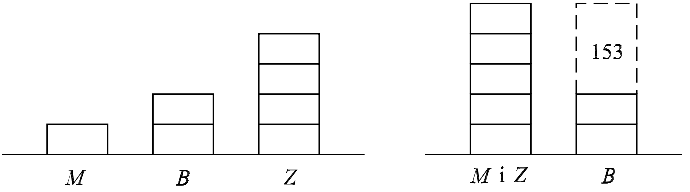
**4.5.** Uočavamo ove dužine jedinične duljine: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{IJ}$, $\overline{JK}$, $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{FI}$, $\overline{CG}$, $\overline{GJ}$, $\overline{DH}$ i $\overline{HK}$. Ima ih ukupno 15. Na slici su i ove dužine dvostruke duljine: $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{EG}$, $\overline{FH}$, $\overline{IK}$, $\overline{BI}$, $\overline{CJ}$ i $\overline{DK}$. Njih je 8. Preostale su još samo dvije dužine trostruke duljine: $\overline{AD}$ i $\overline{EH}$. Na slici je nacrtano ukupno 25 dužina kojima su krajevi istaknute točke.

* * *

**5.1.** Pravokutnika koji se sastoje od jednog osnovnog pravokutnika ima 8. Pravokutnika koji se sastoje od dva osnovna pravokutnika ima 9. Pravokutnika koji se sastoje od tri osnovna pravokutnika ima 4. Pravokutnika koji se sastoje od četiri osnovna pravokutnika ima 3. Pravokutnika koji se sastoje od šest osnovnih pravokutnika ima 1. Na slici je ukupno 25 pravokutnika.

**5.2.** Ako je broj $\overline{abba}$ djeljiv s 45, tada je djeljiv s 5 i s 9. Iz djeljivosti s 5 slijedi da je $a$ jednako 0 ili 5. Ali, $a = 0$ ne može biti jer tada broj $\overline{abba}$ nije četveroznamenkast. Dakle, $a = 5$. Iz djeljivosti s 9 slijedi da je zbroj znamenaka broja $\overline{abba}$ djeljiv s 9, tj. $10 + 2b$ je djeljivo s 9. Dakle, $10 + 2b$ može biti jednako 18 ili 27. Ako je $10 + 2b = 27$, tada je $2b = 17$, a to nije moguće jer je $b$ znamenka. Ako je $10 + 2b = 18$, tada je $b = 4$. Traženi broj $\overline{abba}$ koji je djeljiv s 45 je 5445.

**5.3.** *1. način.*




*Sl. 1.5.*

Znači, jednom pravokutniku odgovara broj $153 : 3 = 51$. Marko ima 51 pikulu, Borna ima $2 \cdot 51 = 102$ pikule, a Zlatko ima $4 \cdot 51 = 204$ pikule.

*2. način.* Neka je $x$ broj Markovih pikula. Tada Borna ima $2x$ pikula, a Zlatko $4x$ pikula. Vrijedi $(x + 4x) - 2x = 153$, $3x = 153$, $x = 51$. Marko ima 51 pikulu, Borna ima $2 \cdot 51 = 102$ pikule, a Zlatko ima $4 \cdot 51 = 204$ pikule.

**5.4.** Ukupan broj knjiga nakon premještanja jednak je broju knjiga prije premještanja. Budući da bi nakon premještanja na prvoj polici bilo 2 puta više knjiga nego na drugoj, a ukupno ih ima 90, to znači da bi na drugoj bilo $90 : 3 = 30$, a na prvoj $2 \cdot 30 = 60$ knjiga. Dakle, na prvoj polici ima 6 knjiga više nego što bi ih bilo nakon premještanja, tj. na prvoj polici ima 66 knjiga. Na drugoj polici ima $30 - 6 = 24$ knjige.

**5.5.** Označimo s $a$ broj godina najmlađeg djeteta, a s $b$ broj godina djeteta srednjeg po uzrastu. Tada je $3a$ broj godina najstarijeg djeteta. Vrijedi $a \cdot b \cdot 3a = 864$, tj. $a \cdot a \cdot b = 288$. Dakle, broj 288 treba napisati u obliku umnoška $a \cdot a \cdot b$, gdje je $a < b < 3a$. Rastavimo 288 na faktore: $288 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$. Sljedeći su umnošci oblika $a \cdot a \cdot b$: $2 \cdot 2 \cdot 72$, $4 \cdot 4 \cdot 18$, $3 \cdot 3 \cdot 32$, $6 \cdot 6 \cdot 8$. Jedino u posljednjem umnošku vrijedi $a < b < 3a$ pri čemu je $a = 6$ i $b = 8$. Djeca imaju 6, 8 i 18 godina.

* * *

**6.1.**

$$\frac{0.725 + 1 - 1 : 40 - 40 \cdot 0.032}{\frac{115}{3} - \frac{5}{3} \cdot 7 + 1\frac{5}{6} : 0.3 \cdot 0.75} = \frac{0.725 + 1 - 0.025 - 1.28}{\frac{115}{3} - \frac{35}{3} + \frac{11}{6} : \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1.725 - 0.025 - 1.28}{\frac{80}{3} + \frac{11}{6} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{1.7 - 1.28}{\frac{80}{3} + \frac{55}{12}} = \frac{0.42}{\frac{320 + 55}{12}}$$

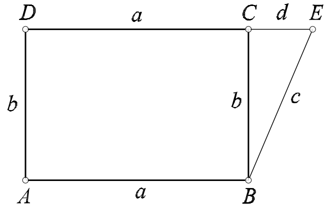
$$= \frac{\frac{42}{100}}{\frac{375}{12}} = \frac{12 \cdot 42}{100 \cdot 375} = \frac{42}{3125}.$$

**6.2.** Označimo s $\overline{abc}$ traženi troznamenkasti broj. Tada je $a+b+c=\overline{ab}$; $a+b+c=10a+b$, tj. $c=9a$. Iz $c=9a$ i činjenice da su $a$ i $c$ znamenke i $a$ različito od 0, slijedi da je $a=1$ i $c=9$. Znamenka desetica može biti bilo koja znamenka: 0, 1, 2,. . . , 9. Dakle, to su brojevi 109, 119, 129,. . . , 199, i ima ih 10.

**6.3.** Ako je količnik dva troznamenkasta broja 7, tada je jedan broj 7 puta veći od drugog, tj. $a$ i $7a$ su promatrani brojevi. Njihov zbroj je $a+7a=8a$ i djeljiv je s 336. Dakle, $8a=336k$, gdje je $k$ neki prirodan broj. Podijelimo tu jednakost s 8: $a=42k$. $a$ i $7a$ su troznamenkasti brojevi, a to vrijedi samo za $k=3$. Dakle, to su brojevi 126 i 882.

**6.4.** $\frac{1}{6}$ ukupne količine jabuka je $\frac{1}{6} \cdot 258 = 43$ kg jabuka. Dakle, da je prodao 15 kg više ostalo bi mu 43 kg jabuka. Drugim riječima, voćar je prodao $258-(15+43)=200$ kg jabuka. Po cijeni od 3.5 kn prodao je $\frac{3}{8}$ od 200 kg jabuka i još 5 kg, tj. ukupno 80 kg jabuka. Za taj dio jabuka dobio je $3.5 \cdot 80 = 280$ kuna. Dakle, ostatak od 120 kg jabuka je prodao po cijeni $\frac{15}{7} \cdot \frac{280}{120} = 5$ kn/ kg.

**6.5.** Uvedimo oznake: $|AB|=|CD|=a$, $|BC|=|AD|=b$, $|BE|=c$, $|CE|=d$.




*Sl. 1.6.*

Tada imamo $a+c+(d+a)+b=123$, $b+c+d=64$. Tada se dva zbroja s lijeve strane razlikuju za $2a$. Dakle, $2a=123-64$, $2a=59$, $a=29.5$ cm. Tada je $P(ABCD)=a \cdot b = 29.5 \cdot 12 = 354$ cm$^2$.

* * *

**7.1.** Vrijednost razlike u zagradama u brojniku je $-0.75$, vrijednost umnoška u brojniku $-0.9$, a vrijednost količnika u brojniku također $-0.9$. Dakle, vrijednost brojnika je $-1.8$. Vrijednost nazivnika je 90, te je vrijednost razlomka $\frac{-1.8}{90} = -\frac{1}{50} = -0.02$.

**7.2.** Četveroznamenkastih brojeva ukupno ima 9000. Odredimo broj četveroznamenkastih brojeva u kojima se znamenke ne ponavljaju. Neka je $\overline{abcd}$

četveroznamenkasti broj. Znamenku $a$ možemo izabrati na 9 različitih načina (to je bilo koja od znamenki $1,2,3,4,5,6,7,8,9$). Nakon što smo izabrali znamenku $a$, znamenku $b$ možemo izabrati na $10-1=9$ načina (to je bilo koja od 10 mogućih znamenki $0,1,2,\ldots,9$, različita od $a$). Za već izabrane znamenke $a$ i $b$, znamenku $c$ možemo izabrati na $10-2=8$ načina (to je bilo koja od 10 mogućih znamenki, različita od $a$ i $b$), i slično, za izbor znamenke $d$ ima $10-3=7$ mogućnosti.

Zato četveroznamenkastih brojeva kojima se znamenke ne ponavljaju ima $9\cdot 9\cdot 8\cdot 7=4536$. Prema tome, traženih četveroznamenkastih brojeva ima $9000-4536=4464$.

**7.3.** Za 1 minutu vodom iz prve slavine napuni se $\frac{1}{18}$ posude. Isto tako, za 1 minutu vodom iz druge slavine napuni se $\frac{1}{27}$ posude. Ako su obje slavine otvorene, u jednoj minuti napuni se $\frac{1}{18}+\frac{1}{27}=\frac{5}{54}$ zapremnine posude. Neka je $t$ vrijeme (u minutama) za koje će se napuniti $\frac{5}{9}$ posude. Tada je $\frac{5}{54}t=\frac{5}{9}$. Zato je $t=\frac{5}{9}\cdot\frac{54}{5}=6$. Dakle, $\frac{5}{9}$ posude bit će puno za 6 minuta.

**7.4.** Označimo s $n$ broj stranica pravilnog mnogokuta. Mjeru jednog unutarnjeg kuta pravilnog $n$-terokuta računamo po formuli $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$. Budući da je zbroj vanjskih kutova svakog mnogokuta jednak $360^\circ$ a mjere svih vanjskih kutova pravilnog mnogokuta međusobno su jednake, mjera jednog vanjskog kuta pravilnog $n$-terokuta iznosi $\frac{360^\circ}{n}$. Zato vrijedi jednakost $\frac{(n-2)\cdot 180}{n}=12\cdot\frac{360}{n}$, odnosno, nakon množenja jednakosti s $n$, redom: $(n-2)\cdot 180=12\cdot 360$, $n-2=12\cdot 2$, $n-2=24$, $n=26$. Dakle, pravilni mnogokut ima 26 stranica.

Broj dijagonala $n$-terokuta izražen je formulom $\frac{(n-3)n}{2}$, što u slučaju 26-terokuta znači $\frac{(26-3)\cdot 26}{2}=23\cdot 13=299$. Konačno, zadani pravilni mnogokut ima 299 dijagonala.

**7.5.** Odredimo najprije mjeru jednog unutarnjeg kuta pravilnog peterokuta $ABCDE$. Iz jednakosti $\sphericalangle ABC=\frac{(n-2)\cdot 180}{n}$ za $n=5$ dobivamo $\sphericalangle ABC=108^\circ$. Iz $\sphericalangle ABF=90^\circ$ slijedi da je $\sphericalangle CBF=108^\circ-90^\circ$, tj. $\sphericalangle CBF=18^\circ$. Trokut $BCF$ je jednakokračan jer je $|BF|=|BC|$. To znači da je $\sphericalangle BCF=\sphericalangle BFC$, tj. $\sphericalangle BCF=\frac{180^\circ-18^\circ}{2}=81^\circ$. Budući da je $|AB|=|BC|$, trokut $ABC$ također je jednakokračan. Zato je $\sphericalangle BCA=\sphericalangle BAC$, tj. $\sphericalangle BCA=\frac{180^\circ-108^\circ}{2}=36^\circ$. Konačno, $\sphericalangle ACF=\sphericalangle BCF-\sphericalangle BCA=81^\circ-36^\circ$, odnosno, $\sphericalangle ACF=45^\circ$.

* * *

**8.1.** Iz $\frac{y}{x} = 3$ slijedi da je $y = 3x$, pa supstitucijom u zadani razlomak dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{3y^2 - 2xy + x^2}{x^2 + xy + y^2} &= \frac{3 \cdot (3x)^2 - 2x \cdot 3x + x^2}{x^2 + x \cdot 3x + (3x)^2} = \frac{3 \cdot 9x^2 - 6x^2 + x^2}{x^2 + 3x^2 + 9x^2} \\ &= \frac{27x^2 - 6x^2 + x^2}{13x^2} = \frac{22x^2}{13x^2} \\ &= \frac{22}{13}.\end{aligned}$$

**8.2.** Racionalizacijom nazivnika prvog i drugog razlomka u zadanom izrazu dobijemo

$$\begin{aligned}\frac{1 - \sqrt{10}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} &= \sqrt{5} - 2\sqrt{2}, \\ \frac{7}{2\sqrt{2} + 1} &= 2\sqrt{2} - 1,\end{aligned}$$

dok je umnožak izraza u zagradama jednak $\left(11 - 5\sqrt{5}\right)\left(2 + \sqrt{5}\right) = -3 + \sqrt{5}$. Konačno, vrijednost zadanog izraza jednaka je $\sqrt{5} - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 1 + 3 - \sqrt{5} = 2$.

**8.3.** Iz uvjeta zadatka slijedi $a = 4k + 3$, pri čemu je $k$ cijeli broj. Supstituiramo li to u zadani izraz, dobivamo redom:

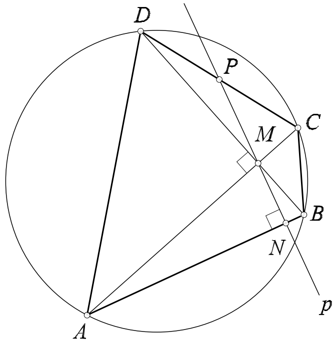
$$\begin{aligned}a^2 - a = (4k + 3)^2 - (4k + 3) &= 16k^2 + 24k + 9 - 4k - 3 \\ &= 16k^2 + 20k + 6 = 16k^2 + 20k + 4 + 2 \\ &= 4\left(4k^2 + 5k + 1\right) + 2 \\ &= 4n + 2,\end{aligned}$$

gdje je $n = 4k^2 + 5k + 1$ cijeli broj. Dakle, ostatak pri dijeljenju broja $a^2 - a$ s 4 je 2.

**8.4.** Neka je točka $O$ sjecište koordinatnih osi. Trokut $AOB$ je pravokutan, a jedan mu je kut jednak $30^\circ$. Prema tome, on je polovica jednakostraničnog trokuta kome je dužina $\overline{AB}$ osnovica. Zato je $|AO| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}a$, pa točka $A$ ima koordinate $A\left(0, \frac{a}{2}\right)$. Također, kateta $\overline{OB}$ visina je jednakostraničnog trokuta sa stranicom $\overline{AB}$, te je $|OB| = \frac{|AB| \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Zbog toga točka $B$ ima koordinate $B\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}, 0\right)$. Budući da je $\sphericalangle OBA = 30^\circ$ a $\sphericalangle ABC = 60^\circ$, slijedi $\sphericalangle OBC = 90^\circ$. Zato je $C\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}, a\right)$.

**8.5.** Neka su točke $N$ i $P$ presjeci pravca $p$ i stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ redom. Kutovi $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle BDC$ obodni su kutovi nad tetivom $\overline{BC}$ pa je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$.

Također, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BMN$ jer su to šiljasti kutovi s okomitim kracima. Prema tome, $\sphericalangle BMN = \sphericalangle BDC$. Nadalje, $\sphericalangle BMN = \sphericalangle DMP$ (vršni kutovi) pa zaključujemo da je $\sphericalangle BDC = \sphericalangle MDP = \sphericalangle DMP$, što znači da je $\triangle DMP$ jednakokračan. Stoga je $|PD| = |PM|$.




*Sl. 1.7.*

Slično zaključujemo i u slučaju tetive $\overline{AD}$: $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$ (obodni kutovi nad tetivom $\overline{AD}$) i $\sphericalangle ABD = \sphericalangle AMN$ (šiljasti kutovi s okomitim kracima), te je $\sphericalangle AMN = \sphericalangle ACD$. Zbog $\sphericalangle AMN = \sphericalangle CMP$ (vršni kutovi) imamo i $\sphericalangle ACD = \sphericalangle MCP = \sphericalangle CMP$, pa je $\triangle CMP$ jednakokračan trokut i $|PM| = |PC|$.

Zajedno je $|PD| = |PM| = |PC|$, te je točka $P$ polovište stranice $\overline{CD}$.

**Srednja škola**

**1.1.** *Prvo rješenje.* Promotrimo najprije nekoliko prvih brojeva:

$$49 = 7^2$$

$$4489 = 67^2$$

$$444889 = 667^2$$

Pokazat ćemo da je

$$\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9 = \underbrace{66\ldots6}_{n-1}7^2.$$

Ovo je ekvivalentno s

$$\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n} = \underbrace{66\ldots6}_{n-1}7^2 - 1,$$

odnosno

$$\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n} = \underbrace{66\ldots6}_{n-1}8 \cdot \underbrace{66\ldots6}_{n}.$$

Kako je

$$\underbrace{66\ldots6}_{n-1}8\cdot 6 = 4\underbrace{00\ldots0}_{n-1}8,$$

slijedi da je produkt $\underbrace{66\ldots6}_{n-1}8 \cdot \underbrace{66\ldots6}_{n}$ jednak $\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n}$.

*Drugo rješenje.* Dobiveni broj je oblika $\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9$. Neka je

$$x = \underbrace{11\ldots1}_{n} = \frac{1}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{n} = \frac{1}{9}\cdot(10^n-1) \implies 10^n = 9x+1.$$

Sada je

$$\begin{aligned}\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9 &= \underbrace{44\ldots4}_{n}\cdot 10^n + \underbrace{88\ldots8}_{n}+1\\ &= 4x\cdot 10^n + 8x + 1\\ &= 4x(9x+1)+8x+1\\ &= 36x^2+12x+1 = (6x+1)^2.\end{aligned}$$

**1.2.** Zbroj dva broja iz danog skupa je paran ako i samo ako su oba parna ili oba neparna. U danom skupu ima 1000 parnih brojeva, pa možemo izabrati $\frac{1000\cdot 999}{2} = 499\,500$ parova parnih brojeva. Isto tako, ima 1001 neparnih brojeva, pa ima $\frac{1001\cdot 1000}{2} = 500\,500$ parova neparnih brojeva. Dakle, broj svih parova brojeva čija je suma paran broj je $499\,500 + 500\,500 = 1\,000\,000$.

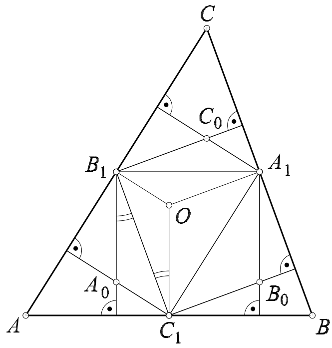
**1.3.** Konstruirajmo srednjice $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$, $\overline{C_1A_1}$ trokuta $ABC$. Tada je

$$P(\triangle A_1B_1C_1) = \frac{1}{4}P(\triangle ABC).$$

Dovoljno je pokazati da je (uz oznake kao na slici 1.8) zbroj površina trokuta $A_0C_1B_1$, $B_0A_1C_1$, $C_0B_1A_1$, jednak površini trokuta $A_1B_1C_1$. Iz točaka $A_1$, $B_1$, $C_1$ povucimo okomice na stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. To su simetrale stranica i one se sijeku u središtu $O$ opisane kružnice trokuta $ABC$.

Dovoljno je pokazati da vrijedi:

$$\begin{aligned}\triangle A_0C_1B_1 &\cong \triangle OB_1C_1,\\ \triangle B_0A_1C_1 &\cong \triangle OC_1A_1,\\ \triangle C_0B_1A_1 &\cong \triangle OA_1B_1.\end{aligned}$$




*Sl. 1.8.*

Dokažimo prvu relaciju (ostale se dokazuju analogno). Zbog

$$\begin{aligned} A_0B_1 &\parallel OC_1 \qquad (\text{okomiti na } AB), \\ A_0C_1 &\parallel OB_1 \qquad (\text{okomiti na } AC), \end{aligned}$$

je $\sphericalangle A_0B_1C_1 = \sphericalangle OC_1B_1$ i $\sphericalangle A_0C_1B_1 = \sphericalangle OB_1C_1$. Kako je stranica $\overline{B_1C_1}$ zajednička, trokuti $A_0C_1B_1$ i $OB_1C_1$ su sukladni.

**1.4.** Pomnožimo li drugi član s $\dfrac{x}{x}$, a treći s $\dfrac{xy}{xy}$, dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{xy+x+1} + \frac{xy+x}{xyz+xy+x} + \frac{xyz+xy}{x^2yz+xyz+xy} \\ = \frac{x+1}{xy+x+1} + \frac{xy+x}{1+xy+x} + \frac{1+xy}{x+1+xy} \\ = \frac{2xy+2x+2}{xy+x+1} = 2. \end{aligned}$$

Dakle, izraz je konstantan i jednak 2.

* * *

**2.1.** Izrazimo li $\dfrac{x}{y}$ iz druge jednadžbe i uvrstimo u prvu, dobivamo

$$x + y + \frac{60}{x+y} = 19.$$

Pomnožimo li ovu jednadžbu s $x+y$, dobivamo kvadratnu jednadžbu s nepoznanicom $x+y$,

$$(x+y)^2 - 19(x+y) + 60 = 0.$$

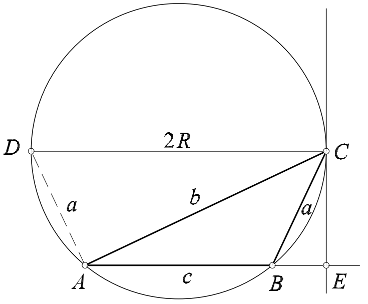
Njezina rješenja su $(x+y)_1 = 4$ i $(x+y)_2 = 15$.

Treba još vidjeti da li se ove vrijednosti zaista mogu postići. Za $x+y=4$ je $\dfrac{x}{y}=\dfrac{60}{x+y}=15$, odakle dobivamo $x=\dfrac{15}{4}$, $y=\dfrac{1}{4}$. Za $x+y=15$ je $\dfrac{x}{y}=\dfrac{60}{x+y}=4$, odakle dobivamo $x=12$, $y=3$.

Dakle, $x+y$ može poprimiti vrijednosti 4 i 15.

**2.2.** Neka je $\overline{CD}$ promjer kružnice. Tada je $CD \parallel AB$ i četverokut $ABCD$ je jednakokračan trapez, pri čemu je $|AD|=|BC|=a$. Trokut $ACD$ je pravokutan, pa je

$$a^2+b^2=4R^2. \tag{1}$$




*Sl. 1.9.*

Neka je $E$ presjek tangente u točki $C$ s pravcem $AB$. Tada je $|BE|=R-\dfrac{c}{2}$, $|AE|=R+\dfrac{c}{2}$, a iz pravokutnih trokuta $AEC$ i $BEC$ dobivamo:

$$|AC|^2-|AE|^2=|BC|^2-|BE|^2=|CE|^2,$$

$$b^2-\left(R+\frac{c}{2}\right)^2=a^2-\left(R-\frac{c}{2}\right)^2,$$

odakle se dobiva

$$R=\frac{b^2-a^2}{2c}. \tag{2}$$

Uvrštavanjem (2) u (1) dobiva se tražena jednakost.

**2.3.** Izračunajmo najprije produkt prva dva člana:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1+i}{2}\right)\left(1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^2\right)&=\left(\frac{3+i}{2}\right)\left(\frac{2+i}{2}\right)\\&=\frac{5(1+i)}{4}\\&=(1+i)\left(1+\frac{1}{2^2}\right).\end{aligned}$$

Zatim izračunajmo produkt prva tri člana:

$$\begin{aligned}(1+i)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^2}\right) &= (1+i)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\\ &= (1+i)\left(1-\frac{1}{2^{2^2}}\right).\end{aligned}$$

Za $k \geq 3$ izračunajmo

$$\begin{aligned}1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^k} &= 1+\left[\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^2}\right]^{2^{k-2}}\\ &= 1+\left[-\frac{1}{2^2}\right]^{2^{k-2}}\\ &= 1+\frac{1}{2^{2^{k-1}}}.\end{aligned}$$

Sada produkt poprima oblik:

$$(1+i)\left(1-\frac{1}{2^{2^2}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2^2}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2^3}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2^4}}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2^{2^{2000}}}\right).$$

Kako je $2^{2^k}\cdot 2^{2^k} = 2^{2\cdot 2^k} = 2^{2^{k+1}}$, produkt je jednak

$$(1+i)\left(1-\frac{1}{2^{2^{2001}}}\right).$$

**2.4.** *Prvo rješenje.*

$$\begin{aligned}9 &= (x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\\ &= \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}+\underbrace{\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\right)}_{\geq 2}+\ldots+\underbrace{\left(\frac{x_n}{x_{n-1}}+\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)}_{\geq 2}\\ &\geq n+2\cdot\frac{n(n-1)}{2} = n^2.\end{aligned}$$

Odavde je $n \in \{1,2,3\}$.

Za $n=1$ nema rješenja.

Za $n=2$ iz $x_1+x_2=9$ i $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=1$, dobivamo $x_1x_2 = x_1+x_2 = 9$, pa su $x_{1,2}$ rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2-9x+9=0.$$

Njezina rješenja su $x_{1,2} = \dfrac{9\pm 3\sqrt{5}}{2}$.

Za $n = 3$ iz gornje nejednakosti dobivamo

$$6 = \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) + \left(\frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_2}\right) + \left(\frac{x_3}{x_1} + \frac{x_1}{x_3}\right) \geq 6,$$

pa mora vrijediti jednakost. Zato je

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 2, \quad \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_2} = 2, \quad \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_1}{x_3} = 2.$$

Iz prve jednadžbe slijedi $(x_1 - x_2)^2 = 0$, tj. $x_1 = x_2$. Isto tako je $x_2 = x_3$. Dakle, $x_1 = x_2 = x_3 = 3$.

*Drugo rješenje.* Nejednakost između harmonijske i aritmetičke sredine daje

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

$$\frac{n}{1} \leq \frac{9}{n},$$

tj. $n^2 \leq 9$, odnosno $n \in \{1, 2, 3\}$. Dalje se nastavi kao u prvom rješenju.

* * *

**3.1.** Moramo promatrati dva slučaja: $1^\circ$ $a > 1$ i $2^\circ$ $0 < a < 1$.

$1^\circ$ $a > 1$:

$$\begin{aligned} & x^{1+\log_a x} > a^2 x \quad / \log_a \\ \iff\ & (1 + \log_a x) \log_a x > 2 + \log_a x \\ \iff\ & (\log_a x)^2 > 2 \\ \iff\ & |\log_a x| > \sqrt{2} \\ \iff\ & \log_a x < -\sqrt{2} \quad \text{ili} \quad \log_a x > \sqrt{2} \\ \iff\ & x \in (0, a^{-\sqrt{2}}) \cup (a^{\sqrt{2}}, \infty). \end{aligned}$$

$2^\circ$ $0 < a < 1$:

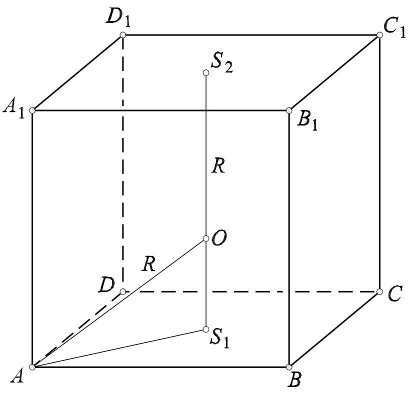
$$\begin{aligned} & x^{1+\log_a x} > a^2 x \quad / \log_a \\ \iff\ & (1 + \log_a x) \log_a x < 2 + \log_a x \\ \iff\ & (\log_a x)^2 < 2 \\ \iff\ & |\log_a x| < \sqrt{2} \\ \iff\ & -\sqrt{2} < \log_a x < \sqrt{2} \\ \iff\ & x \in (a^{\sqrt{2}}, a^{-\sqrt{2}}). \end{aligned}$$

**3.2.** *Prvo rješenje.* Neka je $S_1$ središte donje, $S_2$ središte gornje baze kocke, $O$ središte sfere i $R$ njezin polumjer. Zbog simetrije jasno je da je središte sfere na spojnici $\overline{S_1S_2}$. Sfera prolazi točkama $A$, $B$, $C$, $D$ i $S_2$. Vrijedi:

$$|OS_1| + |OS_2| = a,$$
$$|OS_1| + R = a,$$

te (iz pravokutnog trokuta $\triangle AS_1O$):

$$|OS_1|^2 = |AO|^2 - |AS_1|^2,$$
$$|OS_1|^2 = R^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2,$$
$$(a-R)^2 = R^2 - \frac{a^2}{2}.$$




*Sl. 1.10.*

Odavde dobivamo $R = \dfrac{3a}{4}$, tj., kako je $a = 8$ cm, $R = 6$ cm.

*Drugo rješenje.* Neka je $S_1$ središte donje, a $S_2$ središte gornje baze kocke. Trokut $ACS_2$ je jednakokračan, a polumjer tražene sfere je polumjer njemu opisane kružnice. Duljina dijagonale kvadrata $ABCD$ je $|AC| = 8\sqrt{2}$ cm. Visina $\triangle ACS_2$ je $|S_1S_2| = 8$ cm. Iz pravokutnog trokuta $S_1CS_2$ je $|CS_2| = \sqrt{|S_1S_2|^2 + |CS_1|^2} = 4\sqrt{6}$. Polumjer opisane kružnice trokuta stranica $a$, $b$, $c$ i površine $P$ je $R = \dfrac{abc}{4P}$. U našem slučaju je

$$a = |AC| = 8\sqrt{2}, \qquad b = c = |CS_2| = 4\sqrt{6},$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |S_1S_2| = 32\sqrt{2}, \quad \text{i konačno} \quad R = 6 \text{ cm}.$$

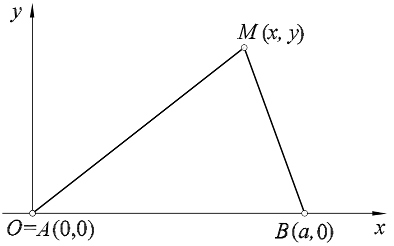
**3.3.** Promatrajmo zadatak u koordinatnoj ravnini u kojoj je $A(0,0)$, $B(a,0)$, ( $a > 0$ ), $M(x,y)$. Tada je

$$|MA|^2 = x^2 + y^2, \quad |MB|^2 = (x-a)^2 + y^2,$$

$$\Big||MA|^2 - |MB|^2\Big| = a|2x-a|.$$

Visina trokuta $MAB$ je jednaka apsolutnoj vrijednosti ordinate točke $M$. Dakle,

$$P(\triangle MAB) = \frac{1}{2}a|y|.$$




*Sl. 1.11.*

Iz uvjeta slijedi

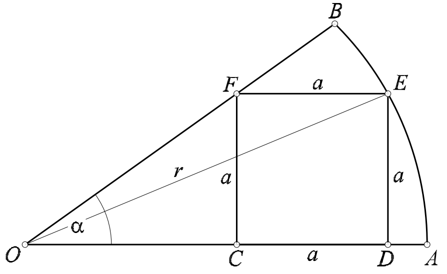
$$a|2x-a| = \frac{k}{2}a|y| \qquad \text{tj.} \qquad |2x-a| = \frac{k}{2}|y|.$$

Odavde je

$$2x - a = \frac{k}{2}y \qquad \text{ili} \qquad 2x - a = -\frac{k}{2}y,$$

a to su jednadžbe dvaju pravaca.

**3.4.** Iz trokuta $OCF$ je $|OC| = a \text{ ctg } \alpha$.




*Sl. 1.12.*

U trokutu $ODE$ je $|OE| = r$,

$$(|OC| + |CD|)^2 + |DE|^2 = r^2$$
$$(a \text{ ctg } \alpha + a)^2 + a^2 = r^2$$
$$1 + (1 + \text{ctg } \alpha)^2 = \left(\frac{r}{a}\right)^2.$$

Ako je kut $\alpha$ izražen u radijanima, površina kružnog isječka je $P_1 = \dfrac{r^2\alpha}{2}$, a kvadrata $P_2 = a^2$, a njihov omjer je

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{r}{a}\right)^2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} \cdot [1 + (1 + \operatorname{ctg}\,\alpha)^2].$$

*Napomena.* Ako je kut $\alpha$ izražen u stupnjevima, onda je $P_1 = \dfrac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2\pi$. Tada je

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot [1 + (1 + \operatorname{ctg}\,\alpha)^2)]\pi.$$

* * *

**4.1.** Prema podacima je $3 = f(0) = q$. Jednadžba tangente je oblika

$$y - 3 = -1 \cdot (x - 0) \qquad \text{tj.} \qquad y = -x + 3.$$

Kako tangenta s parabolom ima jedinstvenu zajedničku točku dodira, diskriminanta kvadratne jednadžbe $x^2 + px + 3 = -x + 3$ tj. $x^2 + (p + 1)x = 0$, mora biti jednaka nuli. Dakle, $D = (p+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 0$, tj. $p = -1$. Jednadžba parabole je $f(x) = x^2 - x + 3$.

*Napomena.* Može se riješiti i pomoću derivacije. (Koeficijent smjera tangente u točki $(0, 3)$ je $\left(\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0} = (2x + p)_{x=0} = p$, pa iz danog uvjeta slijedi $p = -1$.)

**4.2.** a) Vrijedi:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ a_2 - a_1 &= 1, \\ a_3 - a_2 &= 2, \\ &\vdots \\ a_{n-2} - a_{n-3} &= n - 3, \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= n - 2, \\ a_n - a_{n-1} &= n - 1. \end{aligned}$$

Zbrojimo li ove jednakosti, dobijemo

$$a_n = 1 + 2 + \ldots + (n - 3) + (n - 2) + (n - 1) = \frac{(n-1)n}{2}.$$

b) Nadalje,

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (k^2 - k) = \frac{1}{2} \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right), \end{aligned}$$

a odatle,

$$s_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{6} = \frac{n(n^2-1)}{6}.$$

**4.3.** Stavimo li $t = \dfrac{x-3}{x+1}$, dobivamo $x = \dfrac{3+t}{1-t}$, i

$$f(t) + f\left(\frac{t-3}{t+1}\right) = \frac{3+t}{1-t}. \tag{1}$$

Neka je sada $t = \dfrac{3+x}{1-x}$. Tada je $x = \dfrac{t-3}{t+1}$, i

$$f\left(\frac{3+t}{1-t}\right) + f(t) = \frac{t-3}{t+1}. \tag{2}$$

Zbrajanjem (1) i (2), dobivamo

$$2f(t) + \underbrace{f\left(\frac{t-3}{t+1}\right) + f\left(\frac{3+t}{1-t}\right)}_{=t} = \frac{8t}{1-t^2}.$$

Odavde je

$$f(t) = \frac{4t}{1-t^2} - \frac{t}{2}.$$

**4.4.** Neka je $a$ broj osoba koje sjede između dva muškarca, $b$ broj osoba koje sjede između dvije žene, $c$ broj osoba koje sjede između muškarca i žene. Tada je $2a + c = 2n$ i $2b + c = 2m$ (svaka osoba je susjed dvjema). Kada ne bi bilo osobe između dva muškarca ($a = 0$), onda bi svaka osoba imala najviše jednog susjeda muškarca i bilo bi $c = 2n$. Odatle slijedi $b = m - n$. Kako mora biti $b \geq 0$, zaključujemo $m \geq n$.

Dakle za $m < n$ možemo sa sigurnošću tvrditi da postoji osoba koja sjedi između dva muškarca.

Ako je $m > n$, ne mora postojati osoba koja sjedi između dva muškarca, što se vidi na primjeru

MMŽŽMMŽŽ...MMŽŽM(M)ŽŽŽ...,

zavisno o tome da li je broj muškaraca paran ili neparan.

Ostaje još razmotriti slučaj $m = n$.

Ako je $m = n = 2k$, onda ne mora postojati takva osoba. Tada postoji ovakav raspored

MMŽŽMMŽŽ....

Neka je $m = n$ neparan broj. Neka su stolice obojene naizmjence crvenom i plavom bojom. Pretpostavimo da na plavim stolicama (ima ih neparno mnogo) ima više muškaraca nego žena (inače bi to bio slučaj s crvenim stolicama). Tada sigurno na neke dvije “susjedne” plave stolice (između kojih je jedna crvena stolica) sjede dva muškarca. Stoga i u ovom slučaju možemo sa sigurnošću tvrditi da postoji osoba koja sjedi između dva muškarca.