1.

Definicija i neki primjeri matrica

Matrica je svaka pravokutna shema brojeva oblika

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

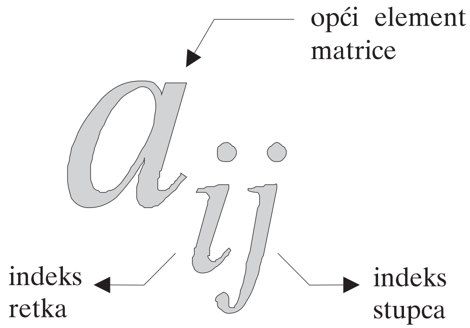
gdje su $a_{ij} \in \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$. Brojeve a_{ij} nazivamo *elementi matrice.** Matrice označavamo velikim slovima:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Matrica **A** ima dva redka i dva stupca, matrica **B** ima 3 redka i dva stupca, a matrica **C** ima 2 redka i 4 stupca.

(1) je *opći oblik matrice*. Ona ima m redaka i n stupaca. Kažemo da je *tipa* (m, n) (ili *reda* (m, n)). Elementi su joj brojevi a_{ij}, gdje indeks i predstavlja broj redka, a indeks j broj stupca u kojem se element nalazi:

* Elementi matrice mogu biti i kompleksni brojevi, ali i drugi objekti, poput funkcija, vektora, pa i samih matrica. Ako su elementi matrice realni brojevi, nazivamo ih još i *skalari*. Mi ćemo proučavati samo matrice s realnim brojevima.



Sl. 1.1.

Kraće matricu zapisujemo: $\mathbf{A} = (a_{ij})$.

Ako je broj redaka matrice jednak broju stupaca, tj. $m = n$, onda je zovemo *kvadratna matrica reda n*. Matricu tipa $(1,1)$ poistovjećujemo s realnim brojem. Matrica čiji su svi elementi jednaki nuli ($a_{ij} = 0$, $\forall i$, $\forall j$) zove se *nul matrica* i označava s $\mathbf{0}$.

Za kvadratne matrice (i samo za njih!) definiramo *dijagonalu matrice* – ona sadrži elemente s jednakim indeksima: $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. Ako su matrici svi elementi izvan dijagonale jednaki nuli, onda je zovemo *dijagonalna matrica*. Dijagonalne su matrice:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Dijagonalna matrica čiji su dijagonalni elementi jednaki 1 ($a_{ii} = 1$, $i = 1, \ldots, n$) zove se *jedinična* matrica i označava s $\mathbf{I}$. Jedinične su matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Kvadratna je matrica *gornja trokutasta* ako su svi njeni elementi ispod dijagonale jednaki nuli, kao, na primjer:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Kvadratna je matrica *donja trokutasta* ako su svi njeni elementi iznad dijagonale jednaki nuli, kao na primjer:

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Dvije matrice **A** i **B** su *jednake* ako

1) istog su tipa (jednak broj redaka i stupaca),
2) imaju jednake odgovarajuće elemente ($a_{ij} = b_{ij}, \forall i, \forall j$).

Matrica **B** je *transponirana matrica* matrice **A** ako je

$$b_{ij} = a_{ij}, \quad \text{za sve} \quad i, j.$$

Redci matrice **B** su stupci matrice **A** (u istom poretku) i obratno. Matricu **B** označavamo s $\mathbf{A}^\top$. Ako je matrica **A** tipa (m, n), onda je matrica $\mathbf{A}^\top$ tipa (n, m). Evo nekoliko primjera transponiranja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \implies \mathbf{A}^\top = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \implies \mathbf{A}^\top = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \implies \mathbf{A}^\top = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Očigledno je da vrijedi:

(i) Ako je **A** dijagonalna matrica, onda je $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$.
(ii) Ako je **A** gornja trokutasta, onda je $\mathbf{A}^\top$ donja trokutasta i obratno.
(iii) $(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}$, za svaku matricu **A**.
(iv) Za kvadratnu matricu transponiranje je isto što i zrcaljenje elemenata matrice s obzirom na dijagonalu.

Matrica **A** je *simetrična* ako je $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$ ($a_{ij} = a_{ji}, \forall i, \forall j$). Simetrična matrica je nužno kvadratna. Primjeri:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 7 & -1 & 1 & -3 \\ 8 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrica $\mathbf{A}$ je *antisimetrična* ako je $\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$ $(a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, \forall j)$. Antisimetrična matrica je kvadratna i ima nule na dijagonali jer $a_{ii} = -a_{ii} \implies a_{ii} = 0, \forall i$. Primjeri:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -4 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrica koja ima samo jedan redak naziva se *vektor–redak*, a matrica koja ima samo jedan stupac naziva se *vektor–stupac*. Svaku matricu tipa (m, n) možemo shvatiti kao da je sastavljena od m vektora–redaka ili n vektora–stupaca.

1.1. Kojeg su tipa sljedeće matrice:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 7 & -8 \\ -9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; **e)** $\begin{bmatrix} 8 & -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$; **f)** $\begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}$;

g) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$?

1.2. Kako nazivamo sljedeće matrice:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 7 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; **d)** $\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; **f)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 4 \end{bmatrix}$;

g) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$; **h)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$;

i) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$?

1.3. Odredi sve elemente matrice **A** tako da ova bude simetrična:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & \cdot \\ \cdot & 3 & -1 \\ -7 & \cdot & 0 \end{bmatrix}$; **b)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & \cdot & 8 \\ 1 & -5 & \cdot \\ \cdot & -4 & 3 \end{bmatrix}$;

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & 4 & \cdot \\ -3 & 2 & \cdot & 3 \\ \cdot & 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$; **d)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & \cdot & 1 \\ \cdot & -1 & \cdot & 4 \\ 5 & 8 & 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & 5 \end{bmatrix}$;

e) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 3 & \cdot & \log 2 \\ \cdot & \pi & -7 & \sin\alpha \\ e & \cdot & \rho & \cdot \\ \cdot & \cdot & -2 & m \end{bmatrix}$; **f)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a^2-b^2 & \cdot & -5 & \cdot \\ 3 & \pi & x+y & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cos x & 1 \\ e^x & 2 & -1 & e^\pi \end{bmatrix}$.

1.4. Odredi sve elemente matrice **A** tako da ona bude antisimetrična:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & \cdot \\ \cdot & -1 & 1 \\ -4 & \cdot & 3 \end{bmatrix}$; **b)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & \pi & \cdot \\ \cdot & -b & \cdot \\ e & \pi^e & 3 \end{bmatrix}$;

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & \cdot & x \\ \cdot & \pi & \cdot & -z \\ y & 2 & -e & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \ln 5 \end{bmatrix}$.

1.5. Odredi parametre a, b, $c \in \mathbf{R}$ tako da matrica **A** bude dijagonalna:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & b & 0 \\ a & -5 & c \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$; **b)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \log a & a^2-c \\ \log_3 c & \pi & 0 \\ 0 & e^b-1 & \operatorname{tg} 5 \end{bmatrix}$;

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2^a & \ln b & a^2-c^2 \\ c+2 & \pi^b & b^2-1 \\ a^3-8 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

1.6. Odredi parametre $a, b, c \in \mathbf{R}$ tako da matrica $\mathbf{A}$ bude gornja trokutasta:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \\ c^2 & -\pi & \ln 3 \\ 4-b & 1-a^3 & 5 \end{bmatrix}$; **b)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & \ln(3\pi) & -4 \\ \sin a & -e^2 & c \\ \operatorname{tg}(b\pi) & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x & -3 & -1 \\ 2-\ln a & x^2 & -a \\ 10+\log b & 1-c^2 & c \end{bmatrix}$.

1.7. Odredi parametre $a, b, c \in \mathbf{R}$ tako da matrica $\mathbf{A}$ bude donja trokutasta:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & a^2-4 & b^2-c^2 \\ b & a & a^2-b^2 \\ 5 & c-1 & b \end{bmatrix}$;

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & \log|a-c| & \sin b\pi \\ -1 & b^2-c & 4-c^2 \\ -c & a-b & a^2+b^2-c^2 \end{bmatrix}$.

1.8. Odredi parametre $a, b, c \in \mathbf{R}$ tako da matrica $\mathbf{A}$ bude trokutasta:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a^2+1 & \log c & a^2-c^2 \\ b & b^2-c & 1-\pi^b \\ 1-c & -3 & (ab-1)^2 \end{bmatrix}$;

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sin(b\pi) & b-a & ab+c \\ c^2-1 & e^a & -1 \\ a-\sqrt{2} & 1-a^b & \log c \end{bmatrix}$.

1.9. Nađi transponiranu matricu sljedećih matrica:

a) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 7 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; **e)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; **f)** $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$;

g) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; **h)** $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{bmatrix}$; **i)** $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ -3 & 0 & -1 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

j) $[1]$; **k)** $[4 \ -2 \ 0 \ -1]$.

1.10. Nađi transponiranu matricu sljedećih matrica:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 5 & 3 & -7 \\ -4 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 & 4 \\ -1 & -3 & 4 & -5 \\ -3 & -4 & 5 & -1 \\ 4 & -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 2 & -e & -3 & -1 \\ -e & -1 & 0 & \pi \\ -3 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & \pi & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

1.11. Jesu li jednake matrice **A** i **B**:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$;

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$?

1.12. Za koje $a, b, c \in \mathbf{R}$ su jednake matrice **A** i **B**:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & a \\ b & 2 & -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & c & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$;

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & a & 4 \\ b & 5 & c \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$;

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & a \\ b & c \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & a & 1 \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$;

d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & b \\ a & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & b \\ a & c \end{bmatrix}$?

2.

Operacije s matricama

Neka je M_{mn} skup svih matrica reda (m, n) i neka su $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_{mn}$. *Zbroj matrica* $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ definiramo sa:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}, \qquad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad \mathbf{C} \in M_{mn},$$

tj. element matrice $\mathbf{C}$ na mjestu (i, j) jednak je zbroju elemenata matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ na tom istom mjestu. Primjeri:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{bmatrix}.$$

Matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

ne možemo zbrojiti jer nisu istog reda.

Neka je $\alpha \in \mathbf{R}$, $\mathbf{A} \in M_{mn}$. *Umnožak matrice* $\mathbf{A}$ *realnim brojem* (skalarom) α definiramo sa:

$$\alpha\mathbf{A} = \mathbf{B}, \qquad b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}, \quad \mathbf{B} \in M_{mn},$$

tj. matricu množimo skalarom tako da svaki njen element pomnožimo tim brojem.

Primjeri:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}; \qquad 3 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 9 & 12 & -3 \end{bmatrix};$$

$$-1 \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}; \qquad 0 \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Matricu $(-1) \cdot \mathbf{A}$ označavamo s $-\mathbf{A}$ i definiramo *oduzimanje matrica* s:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-1) \cdot \mathbf{B}.$$

Neka je zadano n matrica $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ istog reda i n realnih brojeva $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Tada matricu

$$\mathbf{A} = \alpha_1 \mathbf{A}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{A}_n$$

zovemo *linearna kombinacija matrica* $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$.

Za zbrajanje matrica i množenje matrica skalarom na skupu M_{mn} vrijede *svojstva*:

(i) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$,

(ii) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$,

(iii) $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = -\mathbf{A} + \mathbf{A} = 0$,

(iv) $\mathbf{A} + 0 = 0 + \mathbf{A} = \mathbf{A}$,

(v) $\alpha \cdot (\beta \mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$,

(vi) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}, \quad \alpha \in \mathbf{R}$,

(vii) $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$,

(viii) $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$.*

---

* Skup svih matrica M_{mn} uz operacije zbrajanja matrica i množenja skalara i matrice čini *vektorski prostor*.

2.1. Izračunaj $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ ako je:

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$;

b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$;

c) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2a & b & -c \\ d & a & -b \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} a & -b & c \\ 2d & -a & b \end{bmatrix}$.

2.2. Provjeri da vrijedi $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ i $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ ako su zadane matrice

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -4 & -6 \end{bmatrix}.$$

2.3. Izračunaj:

a) $2\mathbf{A}+\frac{1}{3}\mathbf{B}-\mathbf{C}$ ako je

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix};$$

b) $\mathbf{A}-2\mathbf{B}+3\mathbf{C}$ ako je

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

c) $\mathbf{A}^\top+\mathbf{B}^\top-\mathbf{C}^\top$ ako je

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix};$$

d) $\mathbf{A}+\mathbf{A}^\top$ ako je $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

e) $\mathbf{A}-\mathbf{A}^\top$ ako je $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Kakve su matrice i zadatcima **d**) i **e**)?

2.4. Dokaži da za transponiranje matrica vrijedi:
(i) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^\top=\mathbf{A}^\top+\mathbf{B}^\top$, $\forall \mathbf{A},\mathbf{B}\in M_{mn}$;
(ii) $(\alpha\mathbf{A})^\top=\alpha\mathbf{A}^\top$, $\forall\alpha\in\mathbf{R}$, $\forall\mathbf{A}\in M_{mn}$;

2.5. Neka je zadana kvadratna matrica $\mathbf{A} \in M_n$. Tada vrijedi:
a) $\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top$ je simetrična; **b**) $\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top$ je antisimetrična.
Dokaži!

2.6. Svaka se kvadratna matrica **A** može rastaviti na zbroj simetrične i antisimetrične. Dokaži da su to matrice

$$\mathbf{A}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top), \qquad \mathbf{A}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top).$$

Odredi te matrice ako je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$.

2.7. Zadane su matrice: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$. Izračunaj:

a) $2\mathbf{A} + \mathbf{B}^\top$; **b)** $\mathbf{A}^\top - 2\mathbf{B}$.

2.8. Zadane su matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj:
a) $2(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + 3(\mathbf{C} - \mathbf{D})^\top$; **b)** $(\mathbf{A} - \mathbf{C}^\top) + (\mathbf{B} - \mathbf{D}^\top)$;
c) $2\mathbf{A}^\top - \mathbf{B}^\top - 3(\mathbf{C} + \mathbf{D})$; **d)** $(\mathbf{A}^\top - \mathbf{B}^\top)^\top + 3(\mathbf{C} + \mathbf{D})^\top$.

2.9. Iz matrične jednadžbe $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{I}$ odredi matricu **X** ako je:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.10. Riješi matrične jednadžbe:

a) $2\mathbf{A} - \mathbf{X} = \mathbf{I}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$;

b) $\mathbf{A} + 2\mathbf{X} = \mathbf{I}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$;

c) $3\mathbf{A} - 2\mathbf{X} = 2\mathbf{B}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$;

d) $3\mathbf{B} - \mathbf{X} = 2\mathbf{A}^\top$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

2.11. Za kvadratnu matricu $\mathbf{A}$ definiramo njen *trag* kao zbroj elemenata na dijagonali:

$$\operatorname{tr}\mathbf{A} = a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{nn}.$$

Vrijedi: $\operatorname{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \operatorname{tr}\mathbf{A} + \operatorname{tr}\mathbf{B}$ i $\operatorname{tr}\mathbf{A} = \operatorname{tr}(\mathbf{A})^\top$. Dokaži!
Nađi trag matrica:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} t & o & s & r \\ a & r & t & g \\ s & b & a & r \\ t & n & b & g \end{bmatrix}.$$

2.12. Svaku od matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ napiši kao linearnu kombinaciju matrica

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$