

# 1.

## Odabrana područja vjerojatnosti u poslovnom odlučivanju

### 1.1. Distribucija vjerojatnosti i funkcija distribucije vjerojatnosti<sup>1</sup>

#### ● ● PRIMJER 1.1. WWW

Investitor odlučuje o ulaganju vlastitih slobodnih sredstava u dva investicijska projekta. Financijski efekt (dobit odnosno gubitak) na godišnjoj razini ovisi (između ostaloga) o općim gospodarskim uvjetima u zemlji i regiji. Vrijednost investicijskog ulaganja u oba projekta je jednaka. Financijski efekti su sljedeći: ako se po završetku investicije nastavi razdoblje recesije, financijski efekt prvog projekta je  $-1,5$  milijuna kuna, ako nastupi razdoblje stagnacije očekuje se dobit od  $0,5$  milijuna kuna, a u uvjetima gospodarskog rasta očekuje se dobit od  $2,5$  milijuna kuna. Za drugi projekt u uvjetima recesije planiran je gubitak od  $3$  milijuna kuna, u uvjetima stabilnosti dobit od  $0,5$  milijuna kuna, a ako nastupi razdoblje gospodarskog rasta, planirana je dobit od  $8$  milijuna kuna. Vjerojatnost nastupa recesije procijenjena je subjektivno i iznosi  $0,55$ , dok je vjerojatnost razdoblja stabilnosti  $0,25$ .

- Kolika je vjerojatnost nastupa razdoblja gospodarskog rasta ako su uvjeti u okruženju definirani kao iscrpni događaji?
- Financijski efekti investicije definirani su kao diskretna slučajna varijabla. Distribucije vjerojatnosti obaju projekata zapišite u tabelu.
- Kolika je vjerojatnost da prvi projekt ne ostvaruje dobit?
- Kolika je vjerojatnost da drugi projekt ostvaruje dobit?
- Izračunajte vrijednosti funkcije distribucije vjerojatnosti za oba projekta.
- Kako se konkretno tumači  $F(x_2)$  u prvoj funkciji distribucije vjerojatnosti (prvi projekt)?

<sup>1</sup> Ostala područja vjerojatnosti mogu se pogledati u npr. Šošić (2006.), Pavlič (1988.), Sarapa (1992.) i dr.

## Rješenje

Za diskretnu slučajnu varijablu vrijedi:

$$a) P(X = x_i) = p(x_i) = p_i \quad p(x_i) \geq 0 \quad \sum_i p(x_i) = 1$$

$$p(x_3) = 1 - [p(x_1) + p(x_2)] = 0,2.$$

**Tabela 1.1.** Tabela financijskih efekata, varijabla cilja je dobit u milijunima kuna

Uvjeti u okruženju	Recesija	Stabilnost	Rast
Vjerojatnost	0,55	0,25	0,20
I projekt – financijski efekti, mil. kn	-1,5	0,5	2,5
II projekt – financijski efekti, mil. kn	-3,0	0,5	8,0

b)

**Tabela 1.2.** Distribucije vjerojatnosti dobiti dvaju projekata

Prvi projekt		Drugi projekt	
$x_i$	$p(x_i)$	$x_i$	$p(x_i)$
-1,5	0,55	-3,0	0,55
0,5	0,25	0,5	0,25
2,5	0,20	8,0	0,20

$$c) P(X < 0) = P(X = -1,5) = p(x_1) = 0,55$$

$$d) P(X > 0) = P(X = 0,5) + P(X = 8,0) = p(x_2) + p(x_3) = 0,25 + 0,20 = 0,45$$

$$e) F(X) = P(X \leq x)$$

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = \sum_{x \leq x_i} p(x_i)$$

**Tabela 1.3.** Funkcije distribucije vjerojatnosti dobiti dvaju projekata

Prvi projekt		Drugi projekt	
$x_i$	$F(x_i)$	$x_i$	$F(x_i)$
-1,5	0,55	-3,0	0,55
0,5	0,80	0,5	0,80
2,5	1,00	8,0	1,00

f)  $F(x_2) = 0,8$  vjerojatnost da financijski efekt prve investicije bude jednak ili manji od 0,5 je 0,80, odnosno to će se dogoditi u 80% slučajeva.

Za kontinuiranu slučajnu varijablu vrijedi

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \quad P(a \leq x \leq c) = \int_a^c f(x) dx, \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz.$$

## 1.2. Karakteristike distribucije vjerojatnosti

### ● ● PRIMJER 1.2.

- a) Za distribuciju vjerojatnosti prvog investicijskog projekta iz primjera 1.1. izračunajte očekivanu vrijednost, varijancu, standardnu devijaciju i koeficijent varijacije. Isto učinite i za distribuciju vjerojatnosti drugoga projekta.
- b) Ako investitor odlučuje po kriteriju očekivanog financijskog efekta investicije, za koji će se projekt odlučiti? Odgovor obavezno obrazložite.
- c) U koji projekt je rizičnije uložiti financijska sredstva? Odgovor obavezno obrazložite.

### Rješenje

- a) **Tabela 1.4.** Izračun očekivane vrijednosti i varijance za prvi projekt

$x_i$	$p(x_i)$	$x_i \cdot p(x_i)$	$x_i^2 \cdot p(x_i)$
-1,5	0,55	-0,8250	1,2375
0,5	0,25	0,1250	0,0625
2,5	0,20	0,5000	1,2500
Ukupno	1,00	-0,2000	2,5500

**Tabela 1.5.** Izračun očekivane vrijednosti i varijance za drugi projekt

$x_i$	$p(x_i)$	$x_i \cdot p(x_i)$	$x_i^2 \cdot p(x_i)$
-3,0	0,55	-1,6500	4,9500
0,5	0,25	0,1250	0,0625
8,0	0,20	1,6000	12,8000
Ukupno	1,00	0,0750	17,8125

Očekivana vrijednost diskretne slučajne varijable

$$E[X] = \sum_{i=1}^k x_i p(x_i) \quad E[X] \equiv \mu$$

$$E[X_I] = -0,2 \quad E[X_{II}] = 0,075$$

Varijanca diskretne slučajne varijable

$$E[(X - E[X])^2] = \sigma^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 p(x_i) - \left( \sum_{i=1}^k x_i p(x_i) \right)^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 p(x_i) - \mu^2$$

$$\sigma_I^2 = 2,51 \quad \sigma_{II}^2 = 17,8069$$

Standardna devijacija diskretne slučajne varijable

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2 p(x_i) - \left(\sum_{i=1}^k x_i p(x_i)\right)^2}, \quad \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2 p(x_i) - \mu^2}$$

$$\sigma_I = 1,5843 \quad \sigma_{II} = 4,2198$$

Koeficijent varijacije diskretne slučajne varijable

$$V = \frac{\sigma}{E[X]} \cdot 100, \quad V = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100$$

$$V_I = 792,5\% \quad V_{II} = 5626,42\%$$

b) Investitor se odlučuje za drugi projekt jer je očekivana vrijednost financijskog efekta veća (pozitivna, za razliku od prvoga gdje je negativna i gdje se očekuje gubitak, a ne dobit).

c) Ulog u drugi projekt je rizičniji jer ima veći koeficijent varijacije. (Oba projekta su visoko rizična.)

Očekivana vrijednost kontinuirane slučajne varijable je  $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ , a varijanca kontinuirane slučajne varijable je  $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - (E[X])^2$ .

### 1.3. Distribucija vjerojatnosti dviju diskretnih slučajnih varijabli

#### ● ● PRIMJER 1.3. WWW

Uređaj  $X$  ugrađuje se kao dodatak (u cilju poboljšanja funkcionalnosti) uređaju  $Y$ . Prodaja uređaja  $X$  jednim je dijelom povezana s prodajom uređaja  $Y$ . Prodaja uređaja  $X$  i uređaja  $Y$  u komadima (83 slučaja kupovine, odnosno prodaje) definirana je kao diskretna slučajna varijabla.

a) Na temelju ranije evidencije o prodaji uređaja  $X$  i  $Y$  izračunajte vrijednosti zajedničke distribucije vjerojatnosti dviju diskretnih slučajnih varijabli i prikažite je tabelarno.

**Tabela 1.6.** Tabela kontingence prodaje uređaja  $X$  i  $Y$

$X \backslash Y$	4	5	6	7	Ukupno
2	2	3	5	6	16
3	4	6	7	8	25
4	2	5	8	9	24
5	0	3	5	10	18
Ukupno	8	17	25	33	83

- b) Kako se mogu zapisati marginalne distribucije vjerojatnosti? Konkretno protumačite  $p(x_1 = 2) = 0,1928$ .
- c) Kako se može zapisati uvjetna distribucija vjerojatnosti slučajne varijable  $X$ ? Konkretno protumačite  $p(x_4 = 5|y_4 = 7) = 0,3030$ .
- d) Izračunajte očekivanu vrijednost, varijancu, standardnu devijaciju i koeficijent varijacije marginalnih distribucija vjerojatnosti.
- e) Jesu li prodaja uređaja  $X$  i prodaja uređaja  $Y$  statistički neovisne slučajne varijable? Odgovor obavezno obrazložite.
- f) Izračunajte kovarijancu slučajnih varijabli  $X$  i  $Y$  (odnosno prodaje uređaja  $X$  i  $Y$ ).
- g) Izračunajte zajedničku funkciju distribucije dvodimenzionalne slučajne varijable  $(X, Y)$ .
- h) Izračunajte očekivanu vrijednost i varijancu zajedničke slučajne varijable  $(X, Y)$ .

## Rješenje

a) Broj prodanih uređaja  $X$  je diskretna slučajna varijabla koja poprima vrijednosti 2, 3, 4 i 5. Broj prodanih uređaja  $Y$  je diskretna slučajna varijabla koja poprima vrijednosti 4, 5, 6 i 7.

**Zajednička distribucija vjerojatnosti** dviju diskretnih slučajnih varijabli  $X$  i  $Y$  je

$$(x_i, y_j; p(x_i, y_j)) \quad \text{ili} \quad (x_i, y_j; p_{ij}) \quad i = 1, 2, 3, \dots, r \quad j = 1, 2, 3, \dots, c.$$

**Tabela 1.7.** Zajednička distribucija vjerojatnosti varijabli  $X$  i  $Y$

$(x_i, y_j)$	4	5	6	7	$p(x_i) = p_i$
2	0,0241	0,0361	0,0602	0,0724	0,1928
3	0,0482	0,0723	0,0843	0,0964	0,3012
4	0,0241	0,0602	0,0964	0,1084	0,2891
5	0,0000	0,0361	0,0602	0,1206	0,2169
$p(y_j) = p_j$	0,0964	0,2047	0,3011	0,3978	1,0000

## b) Marginalne distribucije vjerojatnosti

$$(x_i; p_i) \quad p_i = \sum_{j=1}^c p_{ij} \quad i = 1, 2, 3, \dots, r$$

$$(y_j; p_j) \quad p_j = \sum_{i=1}^r p_{ij} \quad j = 1, 2, 3, \dots, c$$

**Tabela 1.8.** Marginalne distribucije vjerojatnosti varijabli  $X$  i  $Y$ 

$x_i$	$p(x_i) = p_i$	$y_j$	$p(y_j) = p_j$
2	0,1928	4	0,0964
3	0,3012	5	0,2048
4	0,2892	6	0,3012
5	0,2169	7	0,3976
$\sum_{i=1}^4 p_i$	1,0000	$\sum_{j=1}^4 p_j$	1,0000

Interpretacija:

$$p(x_1 = 2) = 0,1928.$$

Vjerojatnost da se prodaju dva uređaja  $X$  jednaka je 0,1928 odnosno 19,28%.

c) **Uvjetna (kondicionalna) distribucija vjerojatnosti slučajne varijable  $X$**

$$P(X = x_i | y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_j}$$

**Tabela 1.9.** Uvjetna distribucija vjerojatnosti varijable  $X$ 

$x_i$	$p(x_i   y_1 = 4)$	$p(x_i   y_2 = 5)$	$p(x_i   y_3 = 6)$	$p(x_i   y_4 = 7)$
2	0,2500	0,1765	0,2000	0,1818
3	0,5000	0,3529	0,2800	0,2424
4	0,2500	0,2941	0,3200	0,2727
5	0,0000	0,1765	0,2000	0,3030

Interpretacija:

$$p(x_4 = 5 | y_4 = 7) = 0,3030.$$

Vjerojatnost da se proda pet uređaja  $X$  ako se proda 7 uređaja  $Y$ , jednaka je 0,3030; odnosno 30,30%.

d) **Očekivana vrijednost slučajne varijable  $X$**

$$E[X] = \mu_x = \sum_{i=1}^r p_i \cdot x_i = 3,5305$$

**Očekivana vrijednost slučajne varijable  $Y$**

$$E[Y] = \mu_y = \sum_{j=1}^c p_j \cdot y_j = 6$$

**Varijanca slučajne varijable  $X$** 

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^r p_i x_i^2 - (E[X])^2 = 1,0673$$

**Varijanca slučajne varijable  $Y$** 

$$\sigma_y^2 = \sum_{j=1}^c p_j y_j^2 - (E[Y])^2 = 0,9880$$

**Standardna devijacija slučajne varijable  $X$** 

$$\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^r p_i x_i^2 - (E[X])^2} = 1,0331$$

**Standardna devijacija slučajne varijable  $Y$** 

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{j=1}^c p_j y_j^2 - (E[Y])^2} = 0,9940$$

**Koeficijent varijacije slučajne varijable  $X$** 

$$V_x = \frac{\sigma_x}{E[X]} \cdot 100 = 29,26\%$$

**Koeficijent varijacije slučajne varijable  $Y$** 

$$V_y = \frac{\sigma_y}{E[Y]} \cdot 100 = 16,57\%$$

e) Ako su varijable neovisne, tada su zajedničke vjerojatnosti jednake umnošku marginalnih vjerojatnosti:

$$p_{ij} = p_i \cdot p_j \quad i = 1, 2, \dots, r \quad j = 1, 2, \dots, c$$

Provjera:  $p_{11} = p_{1.} \cdot p_{.1} \quad 0,0241 \neq 0,1928 \cdot 0,0964$ .

Prodaje uređaja  $X$  i  $Y$  su međusobno ovisne. Ako su varijable međusobno neovisne, tada su i nekorelirane.

**Kovarijanca varijabli  $X$  i  $Y$** 

Budući da je  $E[X] \equiv \mu_x$  i  $E[Y] = \mu_y$ ,

$$\begin{aligned} E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] &= \text{Cov}(X, Y) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c p_{ij} x_i y_j - \mu_x \mu_y \\ &= 21,3575 - 21,183 = 0,1745. \end{aligned}$$

Koeficijent korelacije između varijabli  $X$  i  $Y$

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} \quad -1 \leq \rho \leq 1$$

$$\rho(X, Y) = \frac{0,1745}{1,0331 \cdot 0,9940} = 0,1699$$

Količine prodaje uređaja  $X$  i  $Y$  su slabo pozitivno korelirane.

**Zajednička funkcija distribucije dvodimenzionalne slučajne varijable  $(X, Y)$**

$$F_{X,Y}(x_i, y_j) = P(X \leq x_i, Y \leq y_j) = \sum_{X \leq x_i} \sum_{Y \leq y_j} p_{ij}$$

$$F_{X,Y}(3, 5) = P(X \leq 3, Y \leq 5) = \sum_{X \leq 3} \sum_{Y \leq 5} p_{ij} = 0,1807$$

**Tabela 1.10.** Zajednička funkcija distribucije

$(x_i, y_j)$	4	5	6	7
2	0,0241	0,0602	0,1204	0,1928
3	0,0723	0,1807	0,3252	0,494
4	0,0964	0,265	0,5059	0,7831
5	0,0964	0,3011	0,5179	1

**Očekivana vrijednost dvodimenzionalne slučajne varijable  $(X, Y)$**

$$E[X, Y] = \sum_i \sum_j x_i y_j \cdot p_{ij} = 21,3575$$

Ako su varijable  $X$  i  $Y$  neovisne (kovarijanca jednaka nuli), tada je očekivana vrijednost dvodimenzionalne slučajne varijable  $(X, Y)$  jednaka umnošku pojedinačnih očekivanih vrijednosti, tj.  $E[X, Y] = E[X] \cdot E[Y]$ .

**Kovarijanca dvodimenzionalne slučajne varijable  $(X, Y)$**

$$\text{Cov}(X, Y) = E[X, Y] - E[X]E[Y] = 0,1745$$



## 1.4. Očekivana vrijednost i varijanca zbroja slučajnih varijabli

### ● ● PRIMJER 1.4.

Koristeći podatke iz Primjera 1.3. izračunajte očekivanu količinu (zbroja) prodanih uređaja  $X$  i  $Y$  i varijancu zbroja prodanih uređaja  $X$  i  $Y$ .

### Rješenje

Očekivana vrijednost zbroja slučajnih varijabli  $X$  i  $Y$

$$\begin{aligned} E[X + Y] &= E[X] + E[Y] \\ E[X + Y] &= 3,5305 + 6 = 9,5305 \approx 10 \end{aligned}$$

Varijanca zbroja ovisnih slučajnih varijabli  $X$  i  $Y$

$$\begin{aligned} \text{Var}[X + Y] &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) \\ \text{Var}[X + Y] &= 1,0673 + 0,9880 + 2 \cdot 0,1745 = 2,4043 \end{aligned}$$

Ako su slučajne varijable  $X$  i  $Y$  neovisne, tada je  $\text{Var}[X+Y] = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ .

## 1.5. Analiza portfelja (dvije dionice)

### ● ● PRIMJER 1.5. WWW

S internetskih stranica Zagrebačke burze ([www.zse.hr](http://www.zse.hr)) preuzeti su podaci o zaključnim cijenama dviju dionica INA-R-A i JNAF-R-A u tri-desetodnevnom razdoblju. Za svaku od njih u promatranom razdoblju izračunan je dnevni prinos dionice (jednostavni prinos) pomoću izraza  $R_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1}} \cdot 100$ ; pri čemu je  $x_i$  zaključna cijena dionice  $X$  u razdoblju  $i$ . Zatim je izračunan prosječni dnevni prinos (očekiva-

ni prinos) dionice pomoću izraza  $E(R) = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n} = \bar{R}$ , pri čemu je  $E(R)$  prosječni (očekivani) dnevni prinos dionice za  $n$  dnevnih prinosa  $R_i$   $i = 1, 2, \dots, n$ . Varijanca prinosa dionice izračunana je pomoću izraza  $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_i - E(R))^2$ . Standardna devijacija je pozitivni drugi korijen iz varijance.

**Tabela 1.11.** Očekivani prinos i standardna devijacija dviju dionica

Dionica	Očekivani prinos, %	Standardna devijacija, %
INA-R-A	0,6768	2,238
JNAF-R-A	1,9081	3,827

Iz tabele 1.11. se uočava da dionica INA-R-A ima manji očekivani prinos, ali i manju standardnu devijaciju, odnosno manji rizik.

- Ako se portfelj sastoji od ovih dviju dionica s vrijednosnim udjelima u omjeru 3 : 1, izračunajte očekivani prinos i varijancu portfelja.
- Ako se vrijednosni udio dionica u portfelju promijeni tako da dominira rizičnija dionica JNAF-R-A sa 60% udjela, izračunajte očekivani prinos i varijancu portfelja. Što zaključujete?
- Za različite vrijednosne udjele navedenih dviju dionica (kako je dano u tabeli 1.12.) izračunajte očekivani prinos i rizik portfelja. Parove vrijednosti očekivanog prinosa i standardne devijacije prinosa portfelja prikažite grafički. Grafikon prokomentirajte.

**Tabela 1.12.** Vrijednosni udjeli dviju dionica u portfelju

$w_1$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$w_2$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0

## Rješenje

a) Očekivani prinos portfelja s dvije dionice različitih vrijednosnih udjela računa se pomoću izraza  $E(R_p) = w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2)$  pri čemu je  $w_1$  vrijednosni udio dionice INA-R-A u portfelju i  $w_2$  vrijednosni udio dionice JNAF-R-A u portfelju.

$$E(R_p) = 0,75 \cdot 0,6768 + 0,25 \cdot 1,9081 = 0,9846$$

Varijanca portfelja se izračunava formulom

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2,$$

pri čemu je  $\rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 = \text{Cov}(R_1, R_2)$ , odnosno kovarijanca prinosa dviju dionica  $R_1$  i  $R_2$ .

$$\sigma_p^2 = 0,75^2 \cdot 5,00 + 0,25^2 \cdot 14,65 + 2 \cdot 0,75 \cdot 0,25 \cdot (-0,269) = 3,62725$$

$$\sigma_p = 1,906$$

**Zaključak:** s porastom vrijednosnog udjela rizičnije dionice, povećava se rizik portfelja koji se mjeri standardnom devijacijom portfelja.

Rezultati se mogu usporediti s onima dobivenim programskom potporom PhStat2.

*PhStat2 → Decision Making → Covariance and Portfolio Analysis*

**Tabela 1.13.** Rezultati analize portfelja dobiveni primjenom programa PhStat2<sup>2</sup>

Statistics		Statistics	
E(X)	0,676754	E(X)	0,676754
E(Y)	1,908102	E(Y)	1,908102
Variance(X)	5,008833	Variance(X)	5,008833
Standard Deviation(X)	3,8042	Standard Deviation(X)	2,238042
Variance(Y)	14,64814	Variance(Y)	14,64814
Standard Deviation(Y)	3,827289	Standard Deviation(Y)	3,827289
Covariance(XY)	-0,26907	Covariance(XY)	-0,26907
Variance(X+Y)	19,11883	Variance(X+Y)	19,11883
Standard Deviation(X+Y)	4,372508	Standard Deviation(X+Y)	4,372508

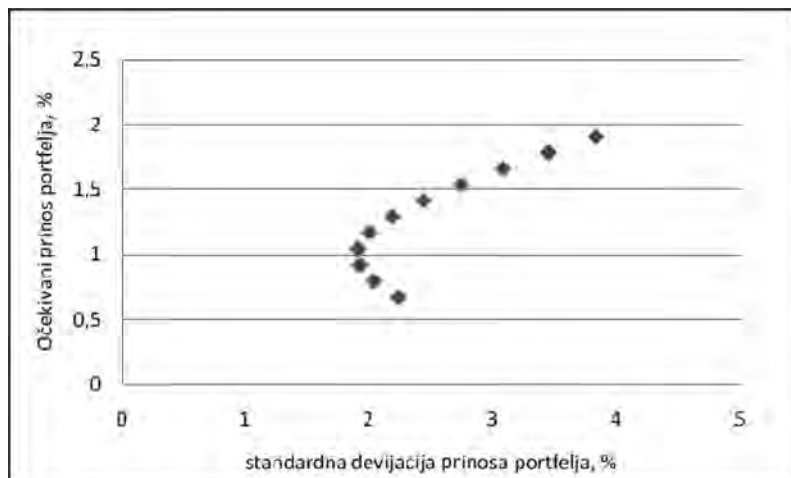
Portfolio Management		Portfolio Management	
Weight Assigned to X	0,75	Weight Assigned to X	0,4
Weight Assigned to Y	0,25	Weight Assigned to Y	0,6
Portfolio Expected Return	0,984591	Portfolio Expected Return	1,415563
Portfolio Risk	1,9058	Portfolio Risk	2,438358

c)

**Tabela 1.14.** Očekivani prinos, varijanca i standardna devijacija portfelja za različite vrijednosne udjele dviju dionica

$w_1$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$w_2$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
$E(R_p)$	1,908	1,785	1,662	1,539	1,416	1,292	1,169	1,046	0,923	0,800	0,677
$\sigma_p^2$	14,646	11,868	9,486	7,513	5,944	4,779	4,016	3,660	3,706	4,153	5,009
$\sigma_p$	3,827	3,445	3,080	2,741	2,438	2,186	2,004	1,913	1,925	2,038	2,238

<sup>2</sup> engl. *Variance* (X) – varijanca varijable X, *Standard Deviation* (X) – standardna devijacija varijable X, *Variance* (Y) – varijanca varijable Y, *Standard Deviation* (Y) – standardna devijacija varijable Y, *Covariance* (XY) – kovarijanca varijabli X i Y, *Variance* (X + Y) – varijanca zbroja varijabli X i Y, *Standard Deviation* (X + Y) – standardna devijacija zbroja varijabli X i Y, *Portfolio Management* – upravljanje portfeljom, *Weight Assigned to X* – ponder pridružen varijabli X, *Weight Assigned to Y* – ponder pridružen varijabli Y, *Portfolio Expected Return* – očekivani prinos portfelja, *Portfolio Risk* – rizik portfelja.



Slika 1.1. Očekivani prinosi i standardne devijacije portfelja za različite vrijednosne udjele dviju dionica

## 1.6. Analiza portfelja (više od dvije dionice)

### ● ● PRIMJER 1.6. [www.zse.hr](http://www.zse.hr)

U portfelju su tri dionice: INA-R-A, JNAF-R-A i ATGR-R-A (zaključne cijene dionica preuzete sa stranica Zagrebačke burze za dvadeset devet dana trgovanja, [www.zse.hr](http://www.zse.hr)). Na već objašnjen način izračunan je očekivani prinos i standardna devijacija svake dionice kako je dano u tabeli 1.15.

Tabela 1.15. Očekivani prinos i standardna devijacija triju dionica

Dionica	Očekivani prinos, %	Standardna devijacija, %
INA-R-A	0,68	2,28
JNAF-R-A	1,91	3,90
ATGR-R-A	0,41	2,48

Ako se portfelj sastoji od navedenih triju dionica s vrijednosnim udjelima u omjeru 5 : 3 : 2, izračunajte očekivani prinos portfelja i varijancu portfelja.

**Rješenje**

Očekivani prinos portfelja triju dionica je:

$$E(R_p) = w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2) + w_3 E(R_3)$$

ili općenito za  $k$  dionica u portfelju:

$$E(R_p) = \sum_{j=1}^k w_j E(R_j) \quad \sum_{j=1}^k w_j = 1 \quad w_1 = \frac{5}{10}, w_2 = \frac{3}{10}, w_3 = \frac{2}{10}$$

$$E(R_p) = 0,5 \cdot 0,68 + 0,3 \cdot 1,91 + 0,2 \cdot 0,41 = 0,995$$

Varijanca portfelja računa se izrazom:

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + w_3^2 \sigma_3^2 + 2w_1 w_2 \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 + 2w_1 w_3 \rho_{1,3} \sigma_1 \sigma_3 + 2w_2 w_3 \rho_{2,3} \sigma_2 \sigma_3$$

ili općenito za  $k$  dionica u portfelju:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^k w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k w_i w_j \text{Cov}(R_i, R_j)$$

$$\rho(R_i, R_j) = \frac{\text{Cov}(R_i, R_j)}{\sigma_i \sigma_j} \quad -1 \leq \rho \leq 1 \quad i = 1 = 1, 2, \dots, k$$

**Tabela 1.16.** Matrica kovarijanci

	INA-R-A	JNAF-R-A	ATGR-R-A
INA-R-A	5,008833		
JNAF-R-A	-0,26907	14,64814	
ATGR-R-A	2,342426	-0,38428	5,945969

**Tabela 1.17.** Korelacijska matrica

	INA-R-A	JNAF-R-A	ATGR-R-A
INA-R-A	1		
JNAF-R-A	-0,03141	1	
ATGR-R-A	0,429226	-0,04118	1

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + w_3^2 \sigma_3^2 + 2w_1 w_2 \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 + 2w_1 w_3 \rho_{1,3} \sigma_1 \sigma_3 + 2w_2 w_3 \rho_{2,3} \sigma_2 \sigma_3 \\
&= 0,5^2 \cdot 2,28^2 + 0,3^2 \cdot 3,90^2 + 0,2^2 \cdot 2,48^2 \\
&\quad + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,3 \cdot (-0,03141) \cdot 2,28 \cdot 3,90 \\
&\quad + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,2 \cdot 0,429226 \cdot 2,28 \cdot 2,48 \\
&\quad + 2 \cdot 0,3 \cdot 0,2 \cdot (-0,04118) \cdot 3,90 \cdot 2,48 \\
&= 17,19943 \\
\sigma_p &= 4,14722
\end{aligned}$$

## Zadaci za vježbu

### WWW Zadatak 1.1.

Tvrtka koja se bavi projektiranjem i instaliranjem sustava grijanja, nekoliko mjeseci prije sezone radova naručuje od dobavljača regulacijske uređaje. Narudžbu od dobavljača moguće je ostvariti u pakiranjima od 500 komada. Tvrtka naručuje između 1000 i 2500 komada uređaja za narednu sezonu. Narudžba (prodaja) prilagođena je mogućoj potražnji u sezoni. Količina naručenih uređaja je diskretna slučajna varijabla, a distribucija vjerojatnosti naručene količine uređaja (a time i potražnje) dana je u tabeli kako slijedi:

$x_i$	1000	1500	2000	2500
$p(x_i)$	0,2	0,3	0,4	0,1

- Izračunajte vrijednosti funkcije distribucije vjerojatnosti. Konkretno protumačite  $F(x_3)$ .
- Izračunajte očekivanu vrijednost, varijancu, standardnu devijaciju i koeficijent varijacije navedene diskretne slučajne varijable.
- Kolika je vjerojatnost da prodaja (narudžba) bude manja od očekivane vrijednosti?

### WWW Zadatak 1.2.

Zaključna cijena dionice bila je u 200 dana trgovanja na burzi između 150 i 155 kuna. Distribucija frekvencija zaključne cijene dionice dana je u tabeli kako slijedi:

Cijena	150	151	152	153	154	155
Broj dana	20	30	50	60	25	15

- a) Na temelju frekvencija  $f(x_i)$  izračunajte statističke vjerojatnosti  $p(x_i)$  kao relativne frekvencije. Zapišite distribuciju vjerojatnosti zaključne cijene dionice u tabelarnom obliku. Pri tome se zaključna cijena dionice tretira kao diskretna slučajna varijabla.
- b) Odredite funkciju distribucije vjerojatnosti.
- c) Izračunajte očekivanu vrijednost, varijancu, standardnu devijaciju i koeficijent varijacije distribucije vjerojatnosti.

**WWW** **Zadatak 1.3.**

U razdoblju na koje se odnosi zadatak 1.2. trgovalo se na burzi dionicom konkurentske kompanije. Distribucija vjerojatnosti zaključne cijene dionice bila je kako je dano u tabeli:

Cijena	50	52	55	57	60	61
Broj dana	0,010	0,150	0,35	0,350	0,125	0,015

Investitor se odlučuje između dionice iz prethodnog zadatka 1.2. i one iz tekućeg zadatka 1.3. U koju dionicu je poželjnije uložiti sredstva ako se želi osigurati manji rizik trgovanja na burzi? Odluku obavezno obrazložite.

**WWW** **Zadatak 1.4.**

Zaključne cijene dionica dviju kompanija  $X$  i  $Y$  (u eurima) u portfelju imaju sljedeću zajedničku distribuciju vjerojatnosti:

$X \backslash Y$	40	45	50	$p(x_i) = p_i$
12	0,06	0,08	0,15	0,29
13	0,08	0,10	0,15	0,33
14	0,09	0,13	0,16	0,38
$p(y_j) = p_j$	0,23	0,31	0,46	1,00

- a) Zapišite marginalne distribucije vjerojatnosti zaključnih cijena dionica kompanija  $X$  i  $Y$ . Protumačite značenje izraza  $p(x_2 = 13) = 0,33$ .
- b) Zapišite uvjetnu distribuciju vjerojatnosti zaključne cijene dionice kompanije  $Y$ .
- c) Izračunajte očekivanu zaključnu cijenu, varijancu, standardnu devijaciju i koeficijent varijacije marginalnih distribucija vjerojatnosti.
- d) Jesu li zaključne cijene navedenih dviju dionica statistički međusobno neovisne slučajne varijable? Odgovor obavezno obrazložite.

- e) Izračunajte kovarijancu i koeficijent korelacije zaključnih cijena dionica  $X$  i  $Y$ .
- f) Izračunajte očekivanu vrijednost zbroja zaključnih cijena dionica kompanije  $X$  i  $Y$ , odnosno izračunajte očekivanu vrijednost portfelja koji se sastoji od 30 dionica kompanije  $X$  i 70 dionica kompanije  $Y$ .
- g) Izračunajte varijancu istog portfelja.
- h) Kolika je očekivana vrijednost i varijanca portfelja (uz jednak broj dionica kao i u prethodnom podzadatku) ako je zajednička distribucija cijena dionica kompanije  $X$  i  $Y$  sljedeća:

$X \backslash Y$	40	45	50	$p(x_i) = p_i$
12	0,07	0,09	0,13	0,29
13	0,07	0,10	0,16	0,33
14	0,09	0,12	0,17	0,38
$p(y_j) = p_j$	0,23	0,31	0,46	1,00

Što zaključujete?

- i) Kako negativna koreliranost cijena dionica utječe na varijancu (odnosno rizik) portfelja?

**WWW** **Zadatak 1.5.** (prema Šošić, 2006.)

Investitor subjektivno procjenjuje vjerojatnosti nastupa gospodarskih uvjeta u narednoj godini i stope prinosa dviju dionica kojima trenutno raspolaže, kako je dano u tabeli:

Poslovni uvjeti	Vjerojatnost	Stopa prinosa dionice A	Stopa prinosa dionice B
Recesija	0,60	8	10
Stabilnost	0,25	10	7
Ekspanzija	0,15	11	5

- a) Izračunajte očekivani prinos, varijancu i standardnu devijaciju svake od dionica.
- b) Izračunajte vrijednosti kovarijanci i koeficijenta korelacije.
- c) Izračunajte očekivani prinos i varijancu portfelja. Pretpostavite jednake vrijednosne udjele dionica.
- d) Izračunajte očekivani prinos i varijancu portfelja, ako rizičnija dionica u portfelju sudjeluje s 30% vrijednosti.



- e) Što zaključujete o promjeni varijance portfelja koja je nastala smanjenjem vrijednosnog udjela rizičnije dionice?

**WWW** **Zadatak 1.6.**

Portfelj se sastoji od dvije dionice. Očekivani prinos i standardna devijacija svake od dionica dani su u tabeli kako slijedi:

Dionica	Očekivani prinos, %	Standardna devijacija, %
A	-2	1,5
B	2,5	3,5

Za različite vrijednosne udjele navedenih dviju dionica izračunajte očekivani prinos i rizik portfelja (pretpostavite da je kovarijanca jednaka nuli). Parove vrijednosti očekivanog prinosa i standardne devijacije prinosa portfelja prikazite grafički. Grafikon prokomentirajte.

$w_1$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$w_2$	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0

**WWW** **Zadatak 1.7.**

Portfelj investitora sastoji se od 50 dionica kompanije *Bloom* i 200 dionica kompanije *Techno*. Dana je zajednička distribucija vjerojatnosti cijena dionica kompanija *Bloom* i *Techno*.

Zaključna cijena dionice <i>BLO-R-A</i> , kn.	Zaključna cijena dionice <i>TEC-R-A</i> , kn.			
	300	350	400	500
200	0,05	0,05	0,00	0,00
300	0,00	0,05	0,05	0,20
400	0,20	0,10	0,00	0,05
500	0,10	0,00	0,05	0,10

- Izračunajte marginalnu distribuciju vjerojatnosti zaključne cijene dionice *TEC-R-A*.
- Jesu li zaključne cijene dionica kompanija *Techno* i *Bloom* statistički neovisne? Jesu li nekorelirane?
- Kolika je očekivana vrijednost i standardna devijacija portfelja ulagača?

**WWW** **Zadatak 1.8.**

Prinos dionice A, %	Prinos dionice B, %	
	1	3
2	0,25	0,25
4	0,25	0,25

- Za danu zajedničku distribuciju vjerojatnosti prinosa (u %) dviju dionica provjerite jesu li prinosi statistički linearno korelirani?
- Formirajte marginalne distribucije vjerojatnosti i provjerite jesu li prinosi statistički neovisni?
- Kolika je očekivana vrijednost i standardna devijacija portfelja (rizik portfelja) ulagača ako su dionice jednakih vrijednosnih udjela u portfelju?

**Zadatak 1.9.**

Portfelj se sastoji od 20 dionica prehrambene industrije Kraš d.d. (KRAS-R-A) i 16 dionica Hrvatskog telekoma d.d. (HT-R-A). S internetskih stranica Zagrebačke burze [www.zse.hr](http://www.zse.hr) preuzmite podatke o zaključnim cijenama navedenih dionica u dvadeset dana trgovanja (analizirajte isti vremenski period trgovanja za obje dionice. Ako se jednom od dionica nije trgovalo određenog dana, tada se kao nedostajuća zaključna cijena pretpostavlja zadnja zabilježena cijena u danu kada se trgovalo navedenom dionicom).

- Izračunajte očekivani prinos i standardnu devijaciju svake dionice.
- Vrijednosni udio dionica u portfelju odredite na temelju zaključnih cijena dionica zadnjeg dana trgovanja (zaključna cijena dionice množi se s brojem dionica). Izračunajte očekivani prinos portfelja i varijancu portfelja.
- Koja je dionica bila rizičnija u promatranom razdoblju?
- Ako se smanji vrijednosni udio rizičnije dionice, što će se dogoditi s rizikom portfelja?
- Sastavite portfelj od navedenih dionica kojima dodajte još dionice Instituta IGH d.d. (IGH-R-A). Dionice su u portfelju zastupljene s jednakim vrijednosnim udjelima. Izračunajte očekivani prinos portfelja i varijancu portfelja.
- U portfelju od ranije navedene tri dionice promijenite vrijednosni udio dionica i to tako da dionica s najvećom varijancom ima udio 0,25, zatim 0,35 i dionica s najmanjom varijancom 0,40. Izračunajte očekivani prinos portfelja i varijancu portfelja i usporedite je s rezultatima iz prethodnog dijela zadatka. Kako je promjena vrijednosne strukture dionica u portfelju utjecala na rizik portfelja?