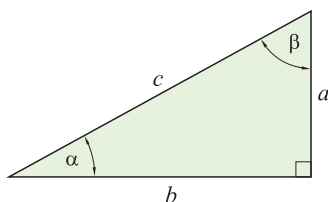


# 0.

## Temeljni pojmovi trigonometrije i vektorskog računa

### 0.1. Trigonometrijske funkcije



Sl. 0.1.

Trigonometrijske funkcije su omjeri stranica u pravokutnom trokutu. Mjerenjem je utvrđeno da međusobni omjeri stranica za jedan te isti kut daju uvijek istu vrijednost. Ta je zakonitost iskorištena kako bismo uz poznati kut i veličinu jedne stranice mogli izračunati vrijednost ostalih dviju stranica.

Omjer između katete nasuprotne oštrom kutu i hipotenuze u pravokutnom trokutu zove se **sinus** toga kuta. Prema toj definiciji za trokut na sl. 0.1 sinus kuta  $\alpha$  i  $\beta$  je:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}; \quad \sin \beta = \frac{b}{c}.$$

Omjer između katete priležeće uz oštar kut i hipotenuze u pravokutnom trokutu zove se **kosinus** dotičnog kuta. Za trokut na sl. 0.1 je:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}; \quad \cos \beta = \frac{a}{c}.$$

Omjer katete nasuprotne oštrom kutu i priležeće katete u pravokutnom trokutu je **tangens** kuta. Za trokut na sl. 0.1 tangens kuta  $\alpha$  i  $\beta$  je:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}.$$

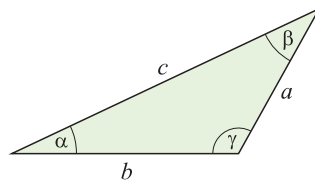
Postoji još funkcija kotangensa kuta, ali u praktičnim zadacima dovoljno je poznavati ove tri trigonometrijske funkcije.

$$\text{sinus kuta} = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{hipotenuza}}$$

$$\text{kosinus kuta} = \frac{\text{priležeća kateta}}{\text{hipotenuza}}$$

$$\text{tangens kuta} = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{priležeća kateta}}$$

Vrijednosti trigonometrijske funkcije za bilo koji kut mogu se očitati iz logaritamskih tablica ili s pomoću džepnog računala.



Sl. 0.2.

Kod trokuta koji nisu pravokutni za određivanje veličine nepoznatih stranica koristi se **kosinusov** i **sinusov poučak**. Sinusov poučak se primjenjuje kada su poznati:

- 2 kuta,
- 1 stranica trokuta.

Vrijednosti drugih dviju stranica izračunaju se primjenom sinusovog poučka koji glasi: **sinusi kutova unutar bilo kakvog trokuta odnose se isto kao stranice nasuprotne tim kutovima**, tj.

$$\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = a : b : c.$$

Kosinusov poučak može se primijeniti ako su poznati:

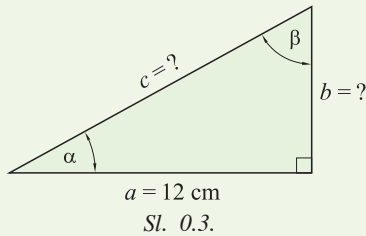
- 1 kut između nepoznatih stranica,
- 2 stranice trokuta,

a on glasi: **zbroj kvadrata nad bilo kojom stranicom jednak je zbroju kvadrata nad ostalim dvjema stranicama umanjen za dvostruki produkt tih stranica i kosinusa kuta među njima**. Za trokut na sl. 0.2 prema kosinusovom poučku vrijedi:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma. \end{aligned}$$

**Primjer 1.**

U pravokutnom trokutu (sl. 0.3) poznat je kut  $\alpha = 30^\circ$  i kateta uz kut  $a = 12$  cm. Odredite veličinu katete  $b$  i hipotenuze  $c$ .



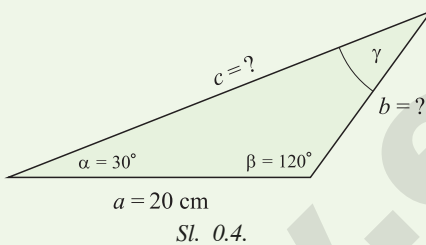
► Iz  $\cos \alpha = \frac{a}{c}$  izračuna se hipotenuza  $c$ :

$$c = \frac{a}{\cos \alpha} = \frac{12}{\cos 30^\circ} = \frac{12}{0,866} = 13,85 \text{ cm.}$$

Kateta  $b$  može se izračunati iz funkcije sinusa:  $\sin \alpha = \frac{b}{c}$ , a odatle  $b = c \cdot \sin \alpha = c \cdot \sin 30^\circ = 13,85 \cdot 0,5$ ,  $b = 6,925$  cm.

**Primjer 2.**

U trokutu na sl. 0.4 treba odrediti stranice  $b$  i  $c$  ako je zadano  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 120^\circ$  i  $a = 20$  cm.



► Rješenje se može naći primjenom sinusovog poučka:

$$\sin \gamma : \sin \beta = a : c. \quad (0.1)$$

Kut  $\gamma$  proizlazi iz:

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (30^\circ + 120^\circ), \\ \gamma &= 30^\circ. \end{aligned}$$

Rješenjem razmjera (0.1) dobije se:

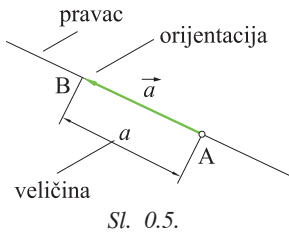
$$\begin{aligned} \sin \gamma \cdot c &= \sin \beta \cdot a / : \sin \gamma, \\ c &= \frac{\sin \beta \cdot a}{\sin \gamma} = \frac{\sin 120^\circ \cdot 20}{\sin 30^\circ} = \frac{0,866 \cdot 20}{0,5} = 34,64 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Stranica  $b$  dobije se iz omjera:

$$\begin{aligned} \sin \alpha : \sin \gamma &= b : a, \\ \sin \alpha \cdot a &= \sin \gamma \cdot b / : \sin \gamma, \\ b &= \frac{\sin \alpha \cdot a}{\sin \gamma} = \frac{\sin 30^\circ \cdot 20}{\sin 30^\circ} = \frac{0,5 \cdot 20}{0,5} = 20 \text{ cm.} \end{aligned}$$

## 0.2. Vektori

U tehničkoj mehanici služimo se skalarima i vektorima. **Skalari** su prirodne veličine koje su određene samo svojim intenzitetom (modulom) i mogu se izraziti samo realnim brojem. Skalari su temperatura, vrijeme, snaga, radnja, masa itd.



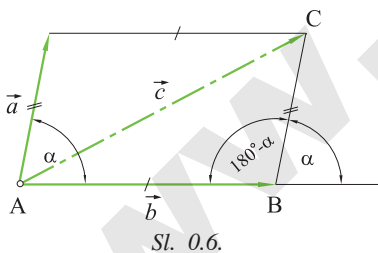
Za neke prirodne veličine nije dovoljno poznavati samo brojčanu vrijednost, već je potrebno poznavati pravac i smjer. To su npr., sila, moment, brzina, ubrzanje itd. Veličine koje su pored brojne vrijednosti određene svojim pravcem i smjerom djelovanja nazivaju se **vektori**<sup>1</sup>.

Geometrijski prikaz vektora  $\vec{a}$  dan je na sl. 0.5. Iz slike se vidi da je vektor jednoznačno određen trima veličinama:

1. pravcem,
2. intenzitetom (veličinom ili modulom),
3. orijentacijom<sup>2</sup>.

## 0.3. Vektorska algebra

### Zbrajanje vektora



Geometrijski zbroj dvaju vektora jednak je dijagonali paralelograma čije su stranice zadani vektori (sl. 0.6). Postupak se sastoji u tome da se vektor  $\vec{a}$  nanese paralelno na vrh vektora  $\vec{b}$ , a vektor  $\vec{b}$  također paralelno na vrh vektora  $\vec{a}$ . Dijagonala tako dobivenog paralelograma predstavlja geometrijski zbroj vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  koji je određen vektorskim jednadžbama:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad \text{ili} \quad \vec{c} = \vec{b} + \vec{a},$$

a naziva se **rezultirajući vektor (vektor rezultante)**.

Analički izraz za intenzitet (modul ili veličina) rezultirajućeg vektora dobije se iz trokuta ABC (sl. 0.6) prema kosinusovom poučku:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha},$$

gdje je kut  $\alpha$  kut koji zatvaraju **komponentni vektori**  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .

<sup>1</sup> Vektor se u geometriji naziva orijentirana dužina  $\overline{AB}$ , u oznaci  $\overline{AB} = \vec{a}$ .

<sup>2</sup> Ponekad se govori o smjeru vektora. Smjer objedinjuje pravac i orijentaciju.

Pri zbrajanju većeg broja vektora koji leže u istoj ravnini (sl. 0.7) postupa se po istom pravilu kao i kod geometrijskog zbrajanja dvaju vektora. Najprije se zbrajanjem vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  dobije rezultirajući vektor  $\vec{d}$ :

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b},$$

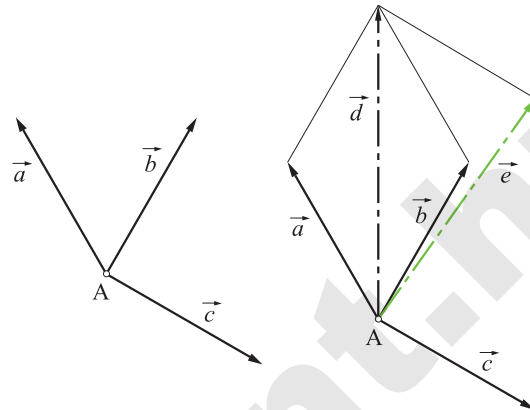
a zatim se zbroji vektor  $\vec{d}$  s vektorom  $\vec{c}$  i dobije rezultirajući vektor  $\vec{e}$ , tj.:

$$\vec{e} = \vec{d} + \vec{c}$$

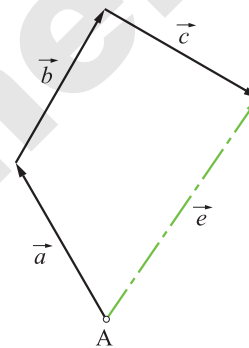
ili

$$\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

Takav postupak zbrajanja naziva se **poligon vektora**. Poligon vektora može se jednostavnije dobiti tako da se na vrh vektora  $\vec{a}$  nanese paralelno vektor  $\vec{b}$ , a na njegov vrh paralelno vektor  $\vec{c}$ , sl. 0.8. Rezultirajući vektor  $\vec{e}$  je dužina od hvatišta prvog vektora (vektor  $\vec{a}$ ) do vrha zadnjeg vektora (vektor  $\vec{c}$ ). Smjer rezultirajućeg vektora  $\vec{e}$  uvijek se sučeljava sa smjerom zadnjeg vektora, u ovom slučaju vektora  $\vec{c}$ .



Sl. 0.7.



Sl. 0.8.

## 0.4. Pojam mehanike

Zakoni klasične fizike još se u 16. stoljeću počinju primjenjivati za rješavanje tehničkih problema. Na taj način počinje razvoj posebne grane fizike koju nazivamo

**tehnička fizika.**

Grane tehničke fizike s povijesnim razvojem prikazane su tablično:

Grana	Početak razvoja
Mehanika čvrstih tijela	16. stoljeće
Mehanika tekućina i plinova (mehanika fluida)	17. stoljeće
Mehanika svjetla — optika	17. stoljeće
Mehanika zvuka — akustika	18. stoljeće
Mehanika titranja i valova	19. i 20. stoljeće
Termodinamika	19. i 20. stoljeće
Elektricitet	19. i 20. stoljeće

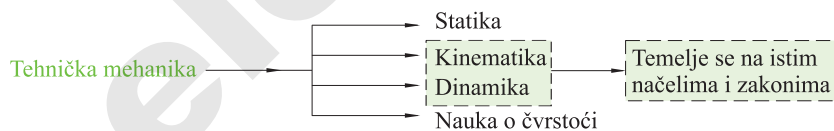
Od navedenih grana tehničke fizike u ovom udžbeniku bit će riječi o **mehanic** **čvrstih i krutih tijela** koja osobito važnu ulogu imaju u strojogradnji, gradnji različitih postrojenja i građevinskih objekata. Pritom je pažnja uvijek usmjerena na rješavanje tehničkih problema pa je taj dio tehničke fizike jednim imenom nazvan

### tehnička mehanika.

Tehnička mehanika je dio tehničke fizike čija se pravila i zakoni koriste u strojogradnji, gradnji različitih postrojenja i građevinskih objekata.

## 0.5. Podjela mehanike

U skladu s primijenjenim pravilima i zakonima tehničke fizike, kao i utjecaja različitih parametara kao što su, npr., djelovanje sile na neko tijelo, koja može narušiti njegovu ravnotežu, u drugom ga slučaju uravnotežiti, a u trećem ga deformirati, izvršena je sljedeća podjela tehničke mehanike:



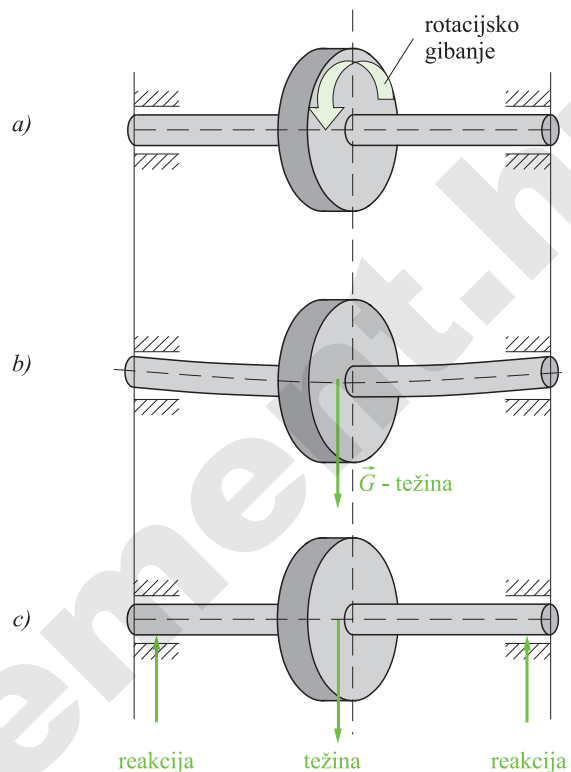
Sl. 0.9.

U pravilu dinamika sadrži sve kinematičke, kinetičke i dinamičke pojave.

### Zadatci mehanike

Nabrojena područja tehničke mehanike su međusobno povezana, pa su tako i zadatci mehanike međusobno povezani. Iako ćemo pri rješavanju tehničkih problema zakone statike, dinamike i nauke o čvrstoći primjenjivati pojedinačno i tako postupno rješavati problem, njega treba sagledati u cjelini kako bismo mogli odrediti pravilan slijed rješavanja. Zadatci mehanike i njihova povezanost vide se iz primjera jedne osovine s rotirajućim strojnim elementom (sl. 0.10). Rotirajući element može biti remenica, zupčanik, zamašnjak ili turbinsko kolo.

Zadatak statike ovdje bi bio pronaći ravnotežu između težine  $G$  rotirajućeg elementa i reakcija koje se javljaju u ležajevima osovine (sl. 0.10c)), smatrajući da osovina miruje. Dalji zadatak statike je pronaći maksimalni moment savijanja i poprečne sile potrebne za njezino dimenzioniranje. Zadatak dinamike bi bio da na osnovu poznatih zakona gibanja odredi sile koje prouzrokuju gibanje ili da na temelju poznatih sila koje djeluju na strojni element odredi zakon gibanja. Na slici 0.10b) vidi se da je težina  $G$  elementa izazvala progib osovine. Zadatak znanosti o čvrstoći je da na osnovu opterećenja koje smo definirali u statici i dinamici odredi takve dimenzije osovine (promjer) da budu zadovoljeni uvjeti **čvrstoće**, **krutosti** i **stabilnosti**. Na taj način je problem rješavan parcijalno primjenjivanjem zadataka tehničke mehanike koji su međusobno povezani i u konačnici daju rješenje problema.



Sl. 0.10.

## Pojam krutog tijela i materijalne točke

Sila može deformirati tijelo ako je veća od njegove čvrstoće. U statici se smatra da su sva tijela **apsolutno kruta** te se ne mogu deformirati ma koliko bile velike sile koje ga opterećuju.

U prirodi → ČVRSTA TIJELA — podložna deformacijama.

U statici → KRUTA TIJELA — nisu podložna deformacijama.

Da bi se pojednostavnilo rješavanje složenijih zadataka, u mehanici je uveden pojam **materijalna točka**.

Materijalna točka je tijelo čije su dimenzije zanemarene, a predstavljena je geometrijskom točkom.

## 0.6. Osnovne veličine i jedinice u mehanici

Prema SI<sup>3</sup> sustavu jedinica veličine koje se koriste u tehničkoj fizici svrstane su u dvije grupe.

Prvu grupu čine

**osnovne veličine.**

Drugu grupu čine

**izvedene veličine.**

U tablici 1 navedene su sve osnovne veličine prema SI sustavu jedinica s pripadajućom mjernom jedinicom i njezinom oznakom.

Osnovna veličina	Mjerna jedinica	Oznaka
dužina	metar	m
masa	kilogram	kg
vrijeme	sekunda	s
jakost električne struje	Amper	A
termodinamička temperatura	Kelvin	K
jakost svjetla	Candela	cd
količina tvari	Mol	mol

**Tablica 1.** Osnovne veličine

Od sedam osnovnih veličina iz tablice 1 za tehničku mehaniku veliko značenje imaju **dužina, masa i vrijeme**. Iz njih se mogu izvesti sve potrebne veličine kao sila, moment sile, brzina, ubrzanje, rad, energija, snaga itd., koje se koriste u tehničkoj mehanici. Iz toga slijedi zaključak:

Sve izvedene veličine proizlaze iz sedam osnovnih veličina

### Fizikalne veličine u statici

Za statiku posebno značenje imaju veličine kao što su **sila i moment sile**.

<sup>3</sup> međunarodni sustav jedinica (franc. *Système International d'Unites*)



## Sila

Sila i moment sile su izvedene jedinice. Sila je jedinica izvedena iz mase i ubrzanja.

Temelj za izvođenje veličine sile, a onda i za jedinicu sile, drugi je Newtonov aksiom — osnovni zakon mehanike prema kojem je:

$$\text{sil}a = \text{produkt mase } m \text{ i ubrzanja } a,$$

ili:

$$F = m \cdot a \quad m \text{ — masa, } a \text{ — akceleracija.} \quad (0.2)$$

Jedinica za silu izvodi se prema izrazu (0.2). Jedinica za masu je 1 kilogram, a za ubrzanje je izvedena u poglavlju kinematike i glasi:  $1 \text{ m/s}^2$ , pa je:

$$[F] = [m] \cdot [a] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}.$$

U čast engleskog fizičara prema čijem aksiomu je izvedena jedinica za silu,  $1 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}$  je nazvan 1 njutn /1 N/:

$$1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ /N/}.$$

Iz jedinice slijedi i definicija za silu:

Sila od 1 N je sila koja tijelu mase 1 kg daje ubrzanje od  $1 \text{ m/s}^2$ .

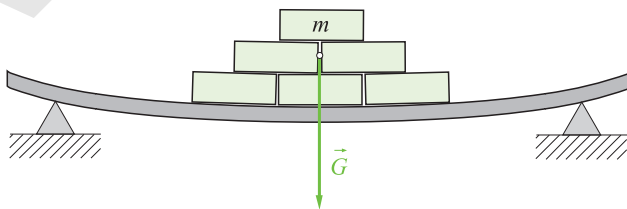
U statici se za silu rabe i veće jedinice od 1 N, kao:

$$\text{kilonjutn — } 1 \text{ kN} = 1000 \text{ N} = 10^3 \text{ N},$$

$$\text{meganjutn — } 1 \text{ MN} = 1000000 \text{ N} = 10^6 \text{ N}.$$

## Težina kao sila

Poseban oblik sile koji se javlja u tehničkoj mehanici je težina  $G$ . Posjeduje ju svako tijelo kao posljedicu djelovanja Zemljine privlačne sile koja sva tijela privlači prema središtu Zemlje.



Sl. 0.11. Težina je stalno opterećenje.

Na slici 0.11 masa opeke opterećuje podlogu svojom težinom  $G$ , uslijed čega je ona načinila progib.

S obzirom na to da je težina poseban oblik sile, drugi Newtonov aksiom vrijedi i za nju, jednadžba (0.2). No za težinu se umjesto ubrzanja  $a$  uzima u obzir gravitacijsko ubrzanje uslijed sile teže Zemlje  $g$ , pa je:

$$G = m \cdot g \quad / \text{N}/. \quad (0.3)$$

Gravitacijsko ubrzanje je ubrzanje što ga tijelo dobije pri slobodnom padu. Mjerenjem je ustanovljena njezina prosječna vrijednost na površini Zemlje:

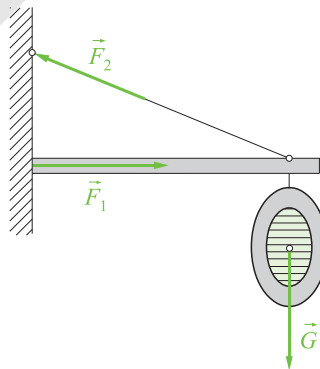
$$g = 9,80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Iz jednadžbe (0.3) je masa:

$$m = \frac{G}{g} \quad / \text{kg}/.$$

## 0.7. Djelovanje sile na tijelo

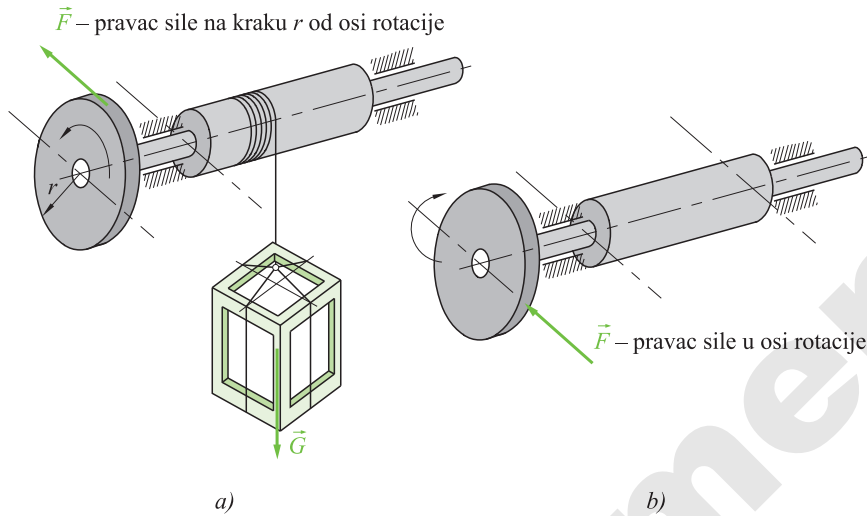
Sva tijela su podložna djelovanju sile. One mogu imati različitu **veličinu**, **pravac** i **smjer** djelovanja (sl. 0.12). **Jako je važan pravac djelovanja sile.**



Sl. 0.12. Različita veličina, pravac i smjer djelovanja sile

Na slici 0.12 prikazana je reklamna ploča težine  $G$  koja visi na štapu. Taj je štap s jedne strane učvršćen u zid, a s druge strane učvršćen užetom. Na slici se vide različiti pravci djelovanja sile. Težina  $G$  djeluje uvijek po **okomitom** pravcu. Pravac sile u štapu je **horizontalan**, a sila u užetu je na **kosom** pravcu. Učinak ili efekt sile je ovisan o pravcu njenog djelovanja. To se može vidjeti na primjeru vitla na slici 0.13 s pomoću koji se diže teret težine  $G$ . Pravac djelovanja sile je

takav da **okreće** kotač zajedno s bubnjem na kojega se namotava uže pa se **teret podiže**.



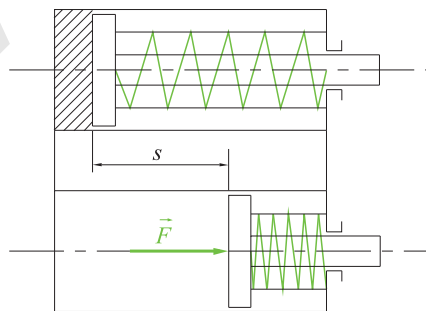
Sl. 0.13. Promjena pravca djelovanja sile — promijenjeno je njezino djelovanje: a) teret se podiže; b) teret miruje, a vratilo se savija.

Na slici 0.13b) pravac djelovanja sile je premješten u zajedničku os kotača, vratila i bubnja (os rotacije). Rezultat premještanja je da se kotač više **ne okreće**. Teret će mirovati, a sila će **savijati** vratilo oko lijevog ležaja. Iz toga proizlazi da

djelovanje sile ovisi o njezinom položaju (pravcu).

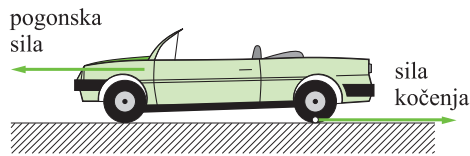
Posljedica djelovanja sile na tijelo može biti:

— deformacija tijela (sl. 0.14),



Sl. 0.14. Deformacija opruge uslijed djelovanja sile  $F$

— promjena stanja (gibanja ili mirovanja) (sl. 0.15).



Sl. 0.15. Sila ubrzava i usporava automobil.

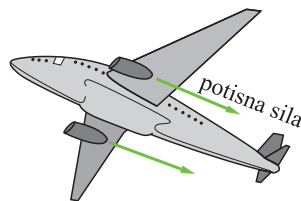
Sila može deformirati tijelo, pa je na slici 0.14 sabila oprugu, a na sl. 0.13a) nastoji usukati, a na sl. 0.13b) savinuti vratilo. Za deformaciju tijela se sila koristi kod plastične obrade metala i nemetala (kovanje, valjanje, prešanje, duboko izvlačenje) kao i kod obrade metala skidanjem strugotine.

Prema pokazanim djelovanjima sile na tijelo, pored njezine definicije prema 2. Newtonovu zakonu može se zaključiti:

sila je uzrok deformacije tijela.

Da bi se automobil na slici 0.15 pokrenuo iz stanja mirovanja i stavio u stanje gibanja, potrebna je pogonska sila. Isto tako da se zaustavi iz stanja gibanja, potrebna je sila kočenja.

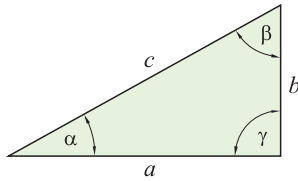
Potisna sila je važna za let aviona kao i za plovidbu broda (sl. 0.16).



Sl. 0.16. Sila potiska je važna za let (gibanje) zrakoplova.

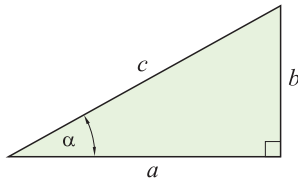
## Zadaci

1. U pravokutnom trokutu prema sl. 0.17 treba odrediti katete  $a$  i  $b$  ako je poznata hipotenuza  $c = 30$  cm i kut  $\beta = 60^\circ$ .



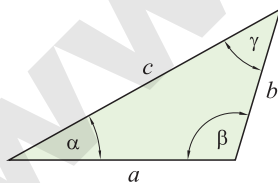
Sl. 0.17.

2. Kolika je hipotenuza  $c$  i kateta  $a$  u pravokutnom trokutu prema sl. 0.18 ako je poznata kateta  $b = 12$  cm i kut  $\alpha = 45^\circ$ ?



Sl. 0.18.

3. U trokutu prema sl. 0.19 treba odrediti kut  $\beta$  i stranice  $a$  i  $c$  ako je zadano  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\gamma = 30^\circ$  i  $b = 10$  cm.



Sl. 0.19.

4. U kojem se području tehničke mehanike primjenjuju zakoni tehničke fizike?
5. Na koja je područja podijeljena tehnička mehanika?

6. Od kojih osnovnih pretpostavki treba poći pri razmatranju ravnoteže tijela u statici?
7. U tehničkoj je mehanici uobičajeno da se pojave gibanja izučavaju zajedno. Zašto se gibanja promatraju u cjelini?
8. Navedite razliku između statike i čvrstoće.
9. Što se postiže dimenzioniranjem strojnih dijelova?
10. Na koja se dva osnovna gibanja mogu svesti gibanja tijela? Definirajte ta gibanja.
11. Koje se grupe veličina prema SI sustavu jedinica koriste u tehničkoj fizici?
12. Navedite koje su osnovne veličine značajne za tehničku mehaniku.
13. Prikažite silu 1 N u osnovnim jedinicama.
14. Koliku težinu ima masa od 2,6 t ( $1 \text{ t} = 1 \text{ tona} = 1000 \text{ kg}$ )?
15. Što znače simboli  $M_0$ ,  $M_s$  i  $M_u$ ? Kakvo djelovanje oni imaju na tijelo?
16. Navedite koje su posljedice djelovanja sile na tijelo.
17. O čemu ovisi način djelovanja sile na tijelo?







STATIKA

KRUTOG TIJELA



[www.element.hr](http://www.element.hr)

