POGLAVLJE I

Kako ne razmišljati o brojevima

Brojevni zapisi, kao i njihovo značenje, uobičajena su svakodnevnica. Dok s druge strane, znamenka broja 6 i broj koji ona predstavlja nisu jedna te ista stvar. Tako bismo, na primjer, rimskim brojevima broj šest zapisali kao VI, svjesni da to označava isti broj kao i 6 u modernoj notaciji. Oba zapisa simboliziraju skup koji se sastoji od šest zareza: I I I I I I. Stoga ćemo prvo provesti neko vrijeme raspravljajući o različitim načinima shvaćanja i prikazivanja brojeva.

Ponekad brojevne probleme rješavamo i bez razmišljanja. Na primjer, pretpostavimo da se nalazite na sastanku i želite da svaki sudionik ima svoj primjerak dnevnog reda. Da biste bili sigurni da imate dovoljno kopija, možete na svaki primjerak staviti inicijal osobe koja će prisustvovati sastanku. Sve dok imate dovoljno primjeraka prije no što ste iscrpili sudionike, znate da će svatko dobiti svoj primjerak i da ih imate dovoljno. U ovom slučaju problem ste riješili bez računanja. Ali u pozadini ovog problema nalaze se brojevi koji nam omogućavaju uspoređivanje dvaju skupova, u ovom slučaju skupova čiji su elementi sasvim druge vrste: ljudi u jednom skupu, a dokumenti u drugom. Ono što nam brojevi omogućuju jest uspoređivanje relativnih veličina tih dvaju skupova.

U prije spomenutom scenariju nismo se zamarali točnim brojem sudionika sastanka – već problemom osiguravanja dovoljnog broja kopija dnevnog reda, a da nismo trebali odrediti točan broj kopija. S druge strane, ako naručujete ručak za petnaestero ljudi, potrebno je prebrojiti prisutne da bi se račun pravedno podijelio. U tom slučaju računanje je neizbježno pa makar koristili i kalkulator.

Moderan brojevni sustav dozvoljava nam izražavanje brojeva na vrlo učinkovit i jedinstven način, što nam dalje omogućuje jednostavno uspoređivanje dvaju brojeva te provođenje računskih operacija koje slijede iz prebrojavanja. U svakodnevnom životu koristimo dekadski brojevni sustav, što znači da brojimo desetice, vjerojatno stoga što imamo deset prstiju na rukama. Efikasnost dekadskog brojevnog sustava ne temelji se na izboru baze, već na pozicijskoj vrijednosti u brojevnom zapisu, što znači da vrijednost znamenke ovisi o njenom položaju u zapisu. Tako na primjer, 1984 je skraćeni zapis za sumu 4 jedinice, 8 desetica, 9 stotica i 1 tisućice.

Važno je razumjeti određeni brojevni zapis. U ovom poglavlju govorit ćemo o značenju brojeva, otkriti različite pristupe računanju te upoznati neke važne skupove brojeva (prosti brojevi) i na kraju predstaviti jednostavne trikove za određivanje prostih brojeva.

Kako se razvijalo računanje?

Vrijedno je odvojiti nekoliko trenutaka da bismo shvatili dvije faze razvoja brojevnog sustava koji se temelji, na primjer, na deseticama. Od djece očekujemo dvije osnovne vještine: naučiti abecedu i brojenje. Učenje čitanja i brojenja naoko su slične, ali u osnovi su vrlo različite vještine. Engleski jezik temelji se na abecedi od 26 slova te svako slovo odgovara jednom glasu koji koristimo prilikom izgovaranja riječi. U svakom slučaju možemo laički reći da se engleski jezik razvio tako da ga možemo zapisati koristeći 26 slova. Nadalje, ne možemo sastaviti rječnik ako slovima ne pridružimo neki red. S obzirom na to da ne postoji neki prirodno nametnuti slijed slova, onaj koji je udomaćen i uči se u školama kao $a, b, c, d \ldots$ izgleda kao prilično proizvoljan odabir. Zasigurno, češće korištena slova nalaze se pretežno na početku abecede, ali to nije pravilo, već gruba aproksimacija, jer na primjer vrlo česta slova s i t nalaze se pri samom kraju. Kod prirodnih brojeva situacija je upravo obrnuta. Prirodnim brojevima nazivamo brojeve 1, 2, $3\ldots$ te oni dolaze u točno zadanom poretku: na primjer simbol 3 predstavlja broj koji slijedi 2 te se mora pojavljivati kao njegov sljedbenik. Sve do nekog broja mogli bismo nastaviti izmišljati nove simbole, ali upravo zbog njihove beskonačnosti u nekom trenutku bismo brojeve trebali početi grupirati. Grupiranje brojeva u desetice predstavlja prvu fazu razvoja smislenog brojevnog sustava, te je upravo ovakav pristup bio univerzalan kroz vrijeme i prostor.

Pojavilo se nekoliko varijacija u detaljima. Na primjer, Rimljanima je draže bilo grupirati brojeve u petice umjesto u desetice, tako su se pojavili i posebni simboli V i L za pet i pedeset. Antički Grci su se strogo držali desetice kao baze. Također su koristili i posebna slova da bi označili brojeve te bi često strogo napominjali da se dotično slovo treba protumačiti kao broj. Na primjer, π je označavao 80, a γ je bio oznaka za 3, tako da je $\pi\gamma$ označavao broj 83. Ovakvo označavanje brojeva može se činiti kao jednako efikasno kao i današnja notacija, ali u suštini nije. Grci su zanemarili važnost pozicioniranja u označavanju brojeva jer se vrijednost znamenke ne mijenja s obzirom na njen položaj u prikazu broja. U dotičnom slučaju, $\gamma\pi$ još uvijek bi predstavljao isti broj $3 + 80$, dok u sadašnjoj notaciji ako promijenimo poredak znamenaka u broju 83, dobijemo drugi broj, 38.

Druga faza razvoja brojevnog prikaza proizašla je iz arapskog brojevnog sustava. Ključna ideja je bila da vrijednost znamenke ovisi o njenom položaju u zapisu. Upravo to nam je omogućilo da svaki broj možemo prikazati konačnim i strogo određenim skupom simbola. Tako je dogovoren skup od deset znamenaka 0, 1, 2, ..., 9 te je opće prihvaćeni brojevni sustav opisan kao *dekadski*, iako se brojevni sustav može opisati manjim ili većim skupom brojevnih znamenaka. Kao na primjer, možemo zamisliti brojevni sustav sa samo dvije znamenke 0 i 1, i to je upravo poznato kao *binarni* sustav, obično korišten u računarstvu. Iz toga slijedi da izbor baze nije bio revolucionarna ideja u razvoju brojevnih prikaza, već korištenje pozicije znamenke da bi se dobio jedinstven zapis broja.

Na primjer, pri zapisu broja 1905 vrijednost svake znamenke proizlazi iz njene pozicije. Tako ovdje postoji 5 jedinica, 9 stotica (što je $10 \cdot 10$) i jedna tisućica (što je $10 \cdot 10 \cdot 10$). Uloga nule je vrlo važna u zapisu broja. U slučaju broja 1905, desetice ne pridonose veličini broja ali ne možemo izostaviti mjesto desetice i napisati samo 195 jer bi u tom slučaju dobili potpuno drugačiji broj. Zaista, svaki zapis znamenaka predstavlja samo jedan broj te nam upravo to dozvoljava zapisivanje velikih brojeva relativno malim brojem znamenaka. Tako na primjer, svakom čovjeku na Zemlji možemo pridružiti jedinstven broj koristeći svega deset brojki te na taj način možemo jedinstveno identificirati svaku osobu u ovako ogromnom skupu.

U prošlosti su razne kulture koristile i različite baze za zapisivanje brojeva, no to je manje bitno od činjenice da su skoro sve zanemarile važnost pozicijskog sustava te upotrebu nule kao nositelja položaja. Zapanjujuće je, s obzirom na drevnost babilonske civilizacije, kako su upravo oni bili najbliže pozicijskom sustavu. Ali čak ni oni nisu potpuno shvatili i prihvatili ne tako prirodan broj nula te su gotovo bojkotirali zadnje mjesto u zapisu koje mi danas uvažavamo da bismo razlikovali 830 od 83.

Konceptualna prepreka koju je u konačnici trebalo prijeći je spoznaja da je nula broj. Istina, nula nije pozitivan broj, ali je broj i sve dok nije potpuno uključen u naš brojevni sustav ostajemo brojevno zakinuti. Taj presudni korak dogodio se u Indiji, otprilike u šestom stoljeću. Naš današnji brojevni sustav upravo zato i nazivamo indijsko-arapskim jer je uveden u Europu iz Indije preko Arapa.

Život sa i bez decimalnih brojeva

Nakon uvođenja dekadske baze, istu ideju proširili smo na razlomke te tako predstavili dobro nam poznati decimalni sustav. Kada primjerice pišemo 3.14, tada brojka 1 iza decimalne točke predstavlja $\frac{1}{10}$, jednu desetinu, a brojka 4 tako predstavlja $\frac{1}{100}$. Decimalni brojevi s dvjema decimalnim znamenkama dobro su nam poznati preko novčanih valuta, jer na primjer, niti dolar, ni funta, a ni euro nisu najmanje novčane jedinice, već je to peni ili cent, što je jedna stotina vrijednosti početne valute. Tako je decimalni račun zapravo prirodno proširenje dekadskog sustava te u praksi predstavlja najučinkovitiji princip za svakodnevno računanje. Usprkos prednostima, razvoj decimalnog sustava bio je spor i nesigurnog podrijetla. Zadržao se isključivo u okruženju matematičke elite sve do druge polovice 16. stoljeća kada se konačno počeo uoptrebljavati u komercijalne i javne svrhe. Grupiranje brojeva po drugim bazama zadržalo se čak i nakon što je prihvaćen decimalni sustav. Tako da Britanci nisu uveli decimalnu valutu sve do 1971. Dio engleskog govornog područja još uvijek upotrebljava jarde, stope i inče. U obranu imperijalnih jedinica, možemo reći da su one prihvatljivije svojom veličinom jer su usporedive mjerenjima ljudskim tijelom. Naše šake su dugačke šest do osam inča, a visoki smo između pet i šest stopa pa se tako i okružujemo predmetima sličnih mjera, koji su onda i mjerljivi jedinicama inča i stopa. Tako smo mogli i definirati deset inča da čini jednu stopu, na taj način bismo lakše računali u tim jedinicama koristeći kalkulatore u dekadskim bazama.

Usvajanje određene baze za brojevni sustav vrlo je slično određivanju mjerila na karti. Mjerilo nije svojstveno objektu koji prikazujemo već je srodno koordinatnom sustavu koji namećemo kao kontrolni instrument. Izbor baze brojevnog sustava je proizvoljan, a upravo isključivo korištenje dekadske baze zasjenilo nam je iskonsko shvaćanje prirodnih brojeva: 1, 2, 3, $4 \ldots$. Da bismo u biti shvatili brojeve, moramo se s njima suočiti licem-u-lice. Kada spomenemo konkretan broj, na primjer, četrdeset i devet, svi prvo stvorimo mentalnu sliku od dviju znamenaka, 49. Na neki je način to nepravedno prema zadanom broju jer ga trenutno prikazujemo kao $(4 \cdot 10) + 9$. Ali $49 = (4 \cdot 12) + 1$, i vrlo lako bismo ga mogli prikazivati i shvaćati na ovaj način. U tom slučaju, broj četrdeset i devet bi u bazi dvanaest bio zapisan znamenkama 41, gdje 4 predstavlja četiri dvanaestice. Nadalje, ono što određuje četrdeset i devet jest produkt $7 \cdot 7$, ili poznatije kao *kvadrat* od 7. Ovo svojstvo broja 49 posebno je naglašeno u bazi sedam, jer bi u toj bazi broj četrdeset i devet bio predstavljen kao 100, gdje bi sad znamenka 1 predstavljala jedan skup od $7 \cdot 7$.

Na isti način možemo koristiti bilo koju drugu bazu za naš brojevni sustav, kao što je dvanaest: civilizacija Maja koristila je bazu dvadeset, a Babilonci bazu šezdeset. U nekom pogledu, 60 je dobar izbor baze jer 60 ima mnogo pravih djelitelja, te je najmanji broj koji je djeljiv sa svim brojevima od 1 do 6. Nadalje, velik broj kao 60 ima i svojih nedostataka. Da ga se može koristiti kao bazu, trebalo bi uvesti 60 različitih simbola koji bi predstavljali sve brojeve od nula do pedeset i devet.

Djelitelj nekog broja jest broj kojim se zadani broj može u potpunosti podijeliti. Na primjer, 6 je djelitelj od 42 jer $42 = 6 \cdot 7$, ali 8 nije djelitelj od 28 jer pri dijeljenju 28 sa 8 dobivamo 3 i ostatak 4. Svojstvo posjedovanja većeg broja faktora je korisno pri odabiru baze, pa upravo zbog toga bi dvanaest možda bio bolji izbor od baze deset. Primjerice 12 ima djelitelje 1, 2, 3, 4, 6 i 12 dok je 10 djeljivo samo sa 1, 2, 5 i 10.

Učinkovitost i potpuna udomaćenost našeg brojevnog sustava ispunjuje nas lažnim samopouzdanjem te nas na neki način i ograničava. Zadovoljniji smo cijelim brojem nego matematičkim izrazom. Na primjer, većina ljudi će radije pričati o broju 5969 nego o $47 \cdot 127$, iako oba izraza predstavljaju istu veličinu. Tek nakon "dobivanja rezultata" 5969 smatramo da imamo broj s kojim se možemo uhvatiti u koštac. U tome postoji element obmane zato jer je to samo broj zapisan kao suma potencija broja deset. Općeniti oblik i svojstva broja puno bolje mogu se izlučiti iz alternativnih oblika gdje je broj prikazan kao produkt faktora. Nesumnjivo je da nam standardni prikaz, 5969, omogućuje uspoređivanje s ostalim brojevima u istom prikazu, ali nam s druge strane ne otkriva sva svojstva broja. U poglavlju 4 vidjet ćete još jedan razlog zašto je zapis broja kao umnoška puno dragocjeniji nego njegov dekadski prikaz, koji često skriva bitna svojstva.

Prednost koju su antičke civilizacije imale pred nama je u tome da nisu bili mentalno zatočeni decimalnim sustavom. Kad bi se susreli s brojevima koji se često pojavljuju, prirodno bi o njima razmišljali kroz geometrijska svojstva koja oni pokazuju ili ne pokazuju. Na primjer, brojevi 10 i 15 su takozvani trokutasti brojevi, što se vidi u trokutastom postavljanju 10 čunjeva pri kuglanju ili na primjer trokutastom početnom postavljanju od 15 kugli u bilijaru. A to je svojstvo koje nije očigledno iz zapisa broja u dekadskoj bazi. Slobodu shvaćanja brojeva, koja je postojala u antici, u naše doba možemo reproducirati tek nakon što odbacimo sve predrasude o brojevima temeljene na dekadskom sustavu i dozvolimo si slobodu razmišljanja o brojevima na prilično drugačije načine.

Nakon što se oslobodimo okova dekadskog sustava, možemo se usredotočiti na faktorizaciju brojeva, odnosno na zapis broja kao produkta manjih brojeva. Faktorizacija otkriva unutarnju strukturu broja. Ako se oslobodimo navike proučavanja brojeva u službi znanosti i gospodarstva, te odvojimo vrijeme za proučavanje brojeva bez konkretnih referenci, možemo otkriti svojstva koja bi u protivnom ostala sakrivena. Priroda nekih brojeva očituje se u uređenim ponavljanjima u prirodi, mnogo složenijim od trokutastih i kvadratnih, kao što je spiralni cvijet suncokreta, koji predstavlja Fibonaccijev broj, vrstu brojeva predstavljenih u petom poglavlju.