Andrea Aglić-Aljinović

Lana Horvat Dmitrović

Ana Žgaljić Keko

1.

Funkcije više varijabla

1.1. Euklidski prostor $\mathbf{R}^n$

Prisjetimo se, vektorski prostor je skup X čije elemente nazivamo vektorima i na kojem su definirane dvije operacije: zbrajanje sa svojstvima (V1-V4) i množenje skalarom sa svojstvima (V5-V8) navedenim u poglavlju 1.1.

Skup $\mathbf{R}^n$ je skup svih uređenih n-torki realnih brojeva:

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbf{R}\}.$$

Kraći zapis za $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ je $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Na ovom skupu definirana je operacija zbrajanja $+ : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ na sljedeći način: za $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ i $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ je

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Kažemo da u $\mathbf{R}^n$ zbrajamo po komponentama. Osim zbrajanja definirana je i operacija množenja skalarom $\cdot : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ na način:

$$\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n), \qquad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Ovako definirano zbrajanje na $\mathbf{R}^n$ zadovoljava svojstva (V1-V4). Osim toga vrijede i sljedeća svojstva (vidi (V5-V8)):

(1) kompatibilnost množenja: $(\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R})$ $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n)$ $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$

(2) distributivnost množenja prema zbrajanju u $\mathbf{R}^n$: $(\forall \alpha \in \mathbf{R})$ $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n)$ $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$

(3) distributivnost množenja prema zbrajanju u $\mathbf{R}$: $(\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R})$ $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n)$ $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$

(4) netrivijalnost množenja: $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n)$ $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Drugim riječima, zbrajanje i množenje skalarom na skupu $\mathbf{R}^n$ zadovoljava svojstva (V1-V8), odnosno $(\mathbf{R}^n, +, \cdot)$ je **vektorski prostor**.

Da bismo mogli u potpunosti spoznati vektorski prostor $\mathbf{R}^n$ nisu nam dovoljne samo dvije navedene operacije, nego su nam potrebni i skalarni produkt, norma i metrika. Krenimo redom, općom definicijom skalarnog produkta.

Skalarni produkt

Definicija 1. Svaka funkcija $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ koja ima sljedeća svojstva:
(S1) pozitivnost: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$
(S2) distributivnost prema zbrajanju: $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$
(S3) homogenost: $\langle \alpha\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$
(S4) komutativnost: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$
naziva se **skalarni produkt**.

www.element.hr

Primjer 1. **Euklidski (ili standardni) skalarni produkt** na $\mathbf{R}^n$ definira se na sljedeći način:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

gdje je $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Lako se provjeri da je ovo dobro definiran skalarni produkt, tj. da za njega vrijede svojstva (S1)–(S4).

Euklidski prostor je vektorski prostor s euklidskim skalarnim produktom. Dakle, $\mathbf{R}^n$ je euklidski prostor s euklidskim skalarnim produktom. Nadalje, za skalarni produkt vrijedi sljedeći teorem:

Nejednakost Cauchy-Schwartz-Buniakowskog

Teorem 1. *Za bilo koje* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ *vrijedi*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle . \tag{1}$$

Dokaz. Za $\mathbf{x} = 0$ ili $\mathbf{y} = 0$ nejednakost (1) se svodi na $0 \leq 0$. Uz pretpostavke $\mathbf{x} \neq 0$ i $\mathbf{y} \neq 0$ definiramo realnu funkciju jedne varijable

$$f(t) = \langle t\mathbf{x} + \mathbf{y}, t\mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle .$$

Zbog svojstva (S1) za svaki $t \in \mathbf{R}$ vrijedi $\langle t\mathbf{x} + \mathbf{y}, t\mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle \geq 0$, odnosno $f(t) \geq 0$ za svaki realni broj t. Raspisivanjem gornjeg skalarnog umnoška dobijemo

$$f(t) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle t^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle t + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle .$$

Dakle, f je kvadratna funkcija u varijabli t koja poprima samo nenegativne vrijednosti pa slijedi da njena diskriminanta nije pozitivna, tj.

$$D = 4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 - 4\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \leq 0$$

iz čega direktno slijedi nejednakost iz teorema. □

Prije nego što definiramo euklidsku normu na prostoru $\mathbf{R}^n$, normu definiramo općenito na sljedeći način:

Norma

Definicija 2. Preslikavanje $\|\cdot\| : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ je **norma** u $\mathbf{R}^n$ ako vrijede sljedeća svojstva

(N1) pozitivnost: $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$
(N2) pozitivna homogenost: $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$, $\alpha \in \mathbf{R}$
(N3) nejednakost trokuta: $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Ako imamo definiran skalarni produkt, normu je moguće definirati s pomoću njega. O tome govori sljedeći teorem.

Skalarni produkt i norma

Teorem 2. *Za bilo koji skalarni produkt* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *na* $\mathbf{R}^n$*, formulom*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

definirana je norma na $\mathbf{R}^n$.

Dokaz. (N1) slijedi zbog (S1): zbog $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ je $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \geq 0$. Također vrijedi: $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$.

(N2) slijedi zbog (S3) i (S4):

$$\begin{aligned} \|\alpha\mathbf{x}\| &= \sqrt{\langle \alpha\mathbf{x}, \alpha\mathbf{x} \rangle} \overset{(S3)}{=} \sqrt{\alpha \langle \mathbf{x}, \alpha\mathbf{x} \rangle} \overset{(S4)}{=} \sqrt{\alpha \langle \alpha\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \\ &\overset{(S3)}{=} \sqrt{\alpha^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|. \end{aligned}$$

(N3) slijedi zbog (S2), (S4) i CSB nejednakosti (1):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle \\ &\overset{(S2)}{=} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &\overset{(S4)}{=} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &\overset{(CSB)}{\leq} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2. \qquad \square \end{aligned}$$

Primjer 2. **Euklidska norma** vektora $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ izvedena je iz euklidskog skalarnog produkta, odnosno definirana na način:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Normirani prostor je vektorski prostor s definiranom normom. Dakle, $\mathbf{R}^n$ je normirani prostor s euklidskom normom.

Koristeći teorem 2, nejednakost Cauchy-Schwartz-Buniakowskog možemo zapisati u ekvivalentnom obliku:

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|.$$

Konkretno, nejednakost CSB za euklidski skalarni produkt i euklidsku normu glasi

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n| \leq \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Općenito **metrika**, odnosno, udaljenost između dviju točaka iz $\mathbf{R}^n$ definira se na sljedeći način:

Metrika

Definicija 3. Preslikavanje $d : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ je **metrika** na $\mathbf{R}^n$ ako vrijede sljedeća svojstva
(M1) pozitivnost: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$
(M2) simetričnost: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$
(M3) nejednakost trokuta: $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.

Ako imamo definiranu normu, s pomoću nje je moguće dobiti metriku. O tome govori sljedeći teorem.

Norma i metrika

Teorem 3. *Za bilo koju normu* $\|\cdot\|$ *na* $\mathbf{R}^n$, *formulom*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

definirana je metrika na $\mathbf{R}^n$.

Dokaz. (M1) slijedi zbog (N1): zbog $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq 0$ je $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq 0$. Također vrijedi: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{y} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

(M2) slijedi zbog (N2):

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \overset{(N2)}{=} |-1| \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = d(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

(M3) slijedi zbog (N3):

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) &= \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{z}\| \\ &\overset{(N3)}{\leq} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \qquad \square \end{aligned}$$

Primjer 3. Euklidska udaljenost (metrika) na $\mathbf{R}^n$ dobije se iz euklidske norme, odnosno:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Dakle, $\mathbf{R}^n$ je metrički prostor s euklidskom metrikom.

Otvoreni i zatvoreni skup u $\mathbf{R}^n$

U svakom metričkom prostoru možemo definirati i pojmove otvorene i zatvorene kugle, te otvorenog i zatvorenog skupa u $\mathbf{R}^n$.

Otvorena kugla u $\mathbf{R}^n$ sa središtem u točki $S \in \mathbf{R}^n$ i radijusom ε je skup

$$K_\varepsilon(S) = \{T \in \mathbf{R}^n : d(S, T) < \varepsilon\}.$$

Slično, **zatvorena kugla** u $\mathbf{R}^n$ sa središtem u točki $S \in \mathbf{R}^n$ i radijusom ε je skup

$$\overline{K_\varepsilon(S)} = \{T \in \mathbf{R}^n : d(S, T) \leq \varepsilon\}.$$

Za skup A, $A \subseteq \mathbf{R}^n$ kažemo da je **otvoren** ako za svaku njegovu točku $x \in A$ postoji otvorena kugla sa središtem u x sadržana u A, tj.

$$(\forall x \in A)\,(\exists \varepsilon > 0)\quad K_\varepsilon(x) \subset A.$$

Otvorena okolina točke $x \in \mathbf{R}^n$ je svaki otvoreni skup koji sadrži tu točku. Za skup $B \subseteq \mathbf{R}^n$ kažemo da je **zatvoren** ako je njegov komplement $\mathbf{R}^n \setminus B$ otvoren. Definicija otvorenog i zatvorenog skupa ne ovisi o izboru metrike d kojom definiramo otvorenu kuglu $K_\varepsilon(x)$. U primjerima ćemo pokazati da geometrijski oblik kugle $K_\varepsilon(x)$ ovisi o izboru metrike d.

Primjer 4. Otvoren prsten $\left\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 : 1 < \|\mathbf{x}\| < 2\right\}$ je otvoren skup. Zatvoren prsten $\left\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq \|\mathbf{x}\| \leq 2\right\}$ je zatvoren skup.

Ostale norme i metrike *

Osim euklidske norme i metrike na $\mathbf{R}^n$ postoje i mnoge druge norme i pripadne metrike. Među najvažnijima su **beskonačno-norma** i **jedan-norma** koje definiramo s

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_\infty &= \max\nolimits_{k \in \{1,..,n\}} |x_k| \\ \|\mathbf{x}\|_1 &= |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \end{aligned} .$$

Obje norme su posebni slučaj takozvane **p-norme**

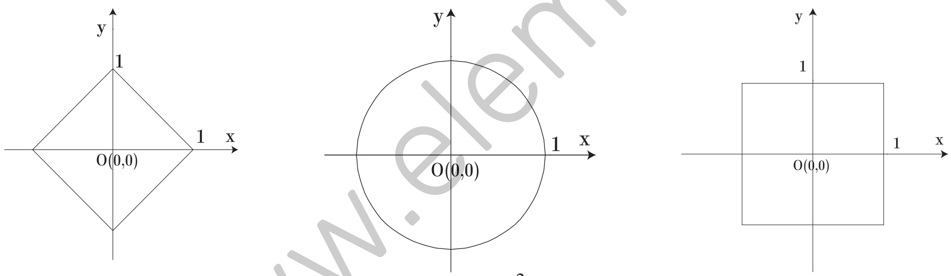
$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

za $p = 1$ i $p = \infty$. Vidimo da za $p = 2$ dobijemo standardnu euklidsku normu. Jedan-norma zove se još i *Manhattan*-norma [1], a njom inducirana metrika $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|$ *Manhattan*-metrika (negdje i taksi-metrika).

Hoće li jedinične kugle u pravokutnom koordinatnom sustavu zaista imati oblik "kugle" kako je mi zamišljamo, ovisi o izboru metrike d. Za slučajeve $p = 1$, $p = 2$ i $p = \infty$ metrike su redom

$$\begin{aligned} d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n| \\ d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \\ d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty = \max_{k \in \{1,..,n\}} |x_k - y_k| . \end{aligned}$$

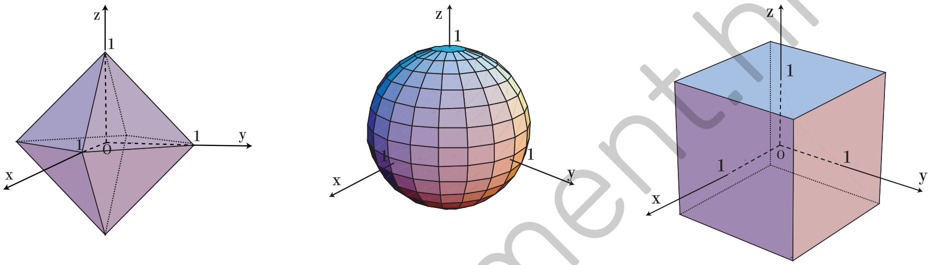
U $\mathbf{R}^2$ jedinične zatvorene kugle sa središtem u ishodištu izgledaju ovako:



Sl. 3.1. Slike jediničnih kugla u $\mathbf{R}^2$ *u metrici* d_1, d_2, d_∞

[1] Zašto Manhattan? Na Manhattanu promet je organiziran pravokutnom mrežom avenija i bulevara, pa ova metrika opisuje "stvarne" udaljenosti u tako organiziranom prometnom sustavu.

U $\mathbf{R}^3$ jedinične zatvorene kugle sa središtem u ishodištu izgledaju ovako:



Sl. 3.2. Slike jediničnih kugla u $\mathbf{R}^3$ *u metrici* d_1, d_2, d_∞

Primijetimo da u slučaju $n = 1$ za sve tri metrike jedinična zatvorena kugla sa središtem u ishodištu je zatvoreni interval $[-1, 1]$.

1.2. Vektorska funkcija. Prostorna krivulja

U kolegiju Matematika 1 proučavali smo realne funkcije realne varijable, tj. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Sada ćemo promatrati funkcije $\mathbf{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ koje realnom broju $t \in \mathbf{R}$ pridružuju vektor $\mathbf{f}(t) \in \mathbf{R}^n$ te ih zato i zovemo vektorske funkcije realne varijable ili skraćeno **vektorske funkcije**. Dakle, vektorska funkcija $\mathbf{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ je zadana sa

$$\mathbf{f}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)),$$

gdje su $x_1, x_2, \dots, x_n$ realne funkcije jedne realne varijable. Specijalno, vektorska funkcija $\mathbf{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ je zadana sa $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t))$, gdje su $x, y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Odnosno vektorska funkcija $\mathbf{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ je zadana sa $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, gdje su $x, y, z : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Vektorsku funkciju možemo zapisati i u obliku vektora

$$\mathbf{f}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

gdje su komponente vektora $\mathbf{f}(t)$ realne funkcije realne varijable, a $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ jedinični koordinatni vektori.

Primjer 5. Vektorska funkcija

$$\mathbf{f}(t) = (\ln t)\mathbf{i} + \sqrt{t^2 + 2}\,\mathbf{j} + (\cos t\pi)\mathbf{k}$$

ima komponente $x(t) = \ln t$, $y(t) = \sqrt{t^2 + 2}$ i $z(t) = \cos(t\pi)$. Vrijednosti $t = 1$ pridružen je vektor $\mathbf{f}(1) = (\ln 1)\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j} + (\cos \pi)\mathbf{k} = \sqrt{3}\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Funkcija je definirana za $t > 0$, tj. $\mathscr{D}(f) = \langle 0, \infty \rangle$.

Općenito, područje definicije vektorske funkcije je skup koji sadrži sve realne brojeve za koje su definirane sve komponente. Dakle, domena vektorske funkcije je presjek domena komponenata.

Vektorska funkcija se može shvatiti kao kompaktniji zapis parametarskih jednadžbi krivulje $\mathscr{C}$. Naime, prisjetimo se da krivulju $\mathscr{C}$ u ravnini možemo zadati u parametarskom obliku

$$\mathscr{C}\ldots\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in D$$

S druge strane, krivulju $\mathscr{C}$ možemo zapisati u vektorskom obliku koristeći vektorsku funkciju $\mathbf{r} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ gdje je

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}.$$

Time smo dobili vektorsku jednadžbu ravninske krivulje $\mathscr{C}$.

U slučaju prostorne krivulje, odnosno krivulje $\mathscr{C} \subset \mathbf{R}^3$, njena parametarska jednadžba glasi

$$\mathscr{C}\ldots\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \in D$$

Ako funkcije x, y, z shvatimo kao komponente vektorske funkcije $\mathbf{r} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, tada dobijemo vektorsku jednadžbu krivulje

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Dakle, parametarske jednadžbe krivulje možemo izraziti u vektorskom obliku i obrnuto, svaku vektorsku funkciju možemo zapisati kao sustav parametarskih jednadžbi. U skladu s tim je graf vektorske funkcije $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ zapravo krivulja zadana sustavom parametarskih jednadžbi. S druge strane je krivulja $\mathscr{C}$ graf vektorske funkcije $\mathbf{r}$.

Primjer 6. Opišite grafove sljedećih vektorskih funkcija:

a) $\mathbf{r}(t) = (-2 + t)\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + (5 - 4t)\mathbf{k}$ **b**) $\mathbf{r}(t) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
c) $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$ **d**) $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

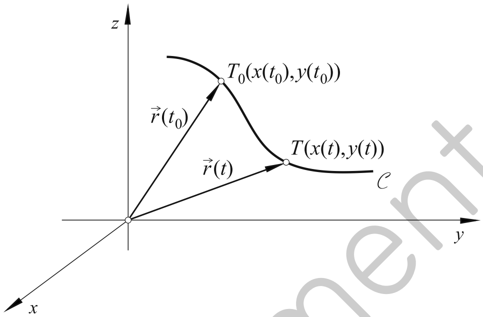
Rješenje.
(a) Graf je pravac kroz točku $T(-2, 0, 5)$ s vektorom smjera $\vec{c} = (1, 3, -4)$.

(b) Graf je točka $T(2, 3, -1)$.

(c) Graf je kružnica sa središtem u ishodištu radijusa 1, tj. $x^2 + y^2 = 1$.

(d) Graf je kružnica sa središtem u ishodištu radijusa 1 koja leži u ravnini $z = 2$.

Sada ćemo opisati kako se graf vektorske funkcije može promatrati bez razlaganja na parametarske jednadžbe. Označimo sa $\mathscr{C}$ graf vektorske funkcije $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Ako početna točka vektora $\mathbf{r}(t)$ leži u ishodištu, tada njegova krajnja točka leži na krivulji $\mathscr{C}$ i vektor $\mathbf{r}(t)$ je zapravo radijus-vektor te točke na krivulji. Promjenom parametra t, krajnja točka radijus-vektora $\mathbf{r}(t)$ pomiče se po krivulji. Možemo zaključiti: ako parametar t predstavlja vrijeme, tada vektorska funkcija $\mathbf{r}(t)$ opisuje gibanje točke po krivulji u ovisnosti o vremenu. To je tzv. fizikalna interpretacija vektorske funkcije. Vidi sl. 3.3. U literaturi se za vektorsku funkciju, odnosno krivulju, mogu javiti sljedeće oznake: $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{c}(t)$, $\mathbf{k}(t)$, $\gamma(t)$ i sl.



Sl. 1.3. Krivulja C je krivulja gibanja opisanog vektorskom funkcijom $\mathbf{r}$

1.3. Derivacija vektorske funkcije. Tangenta na prostornu krivulju

Prije definicije derivacije vektorske funkcije, potrebno je definirati limes vektorske funkcije. Kao što ćemo vidjeti u definiciji, limes vektorske funkcije je vektor čije su komponente limesi komponenata početne vektorske funkcije.

U nastavku ovog teksta pod pojmom vektorske funkcije smatrat ćemo $\mathbf{r} : D_r \to \mathbf{R}^3$, gdje je D_r otvoreni interval u $\mathbf{R}$.

Limes vektorske funkcije

Definicija 4. Za vektorsku funkciju $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ definiramo limes na sljedeći način:

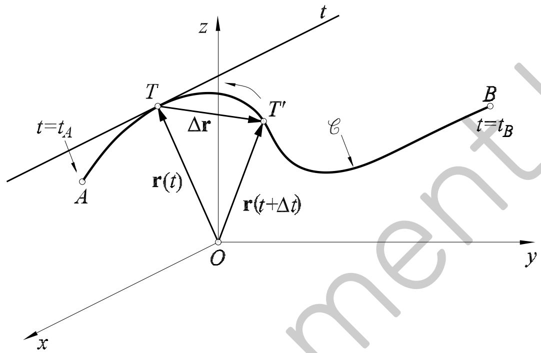
$$\begin{aligned} \lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) &= \lim_{t\to a}(x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}) = \\ &= (\lim_{t\to a} x(t))\mathbf{i} + (\lim_{t\to a} y(t))\mathbf{j} + (\lim_{t\to a} z(t))\mathbf{k} \end{aligned}$$

Derivacija vektorske funkcije

Definicija 5. **Derivacija vektorske funkcije** $\mathbf{r}(t)$ definirana je sa:

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\triangle t\to 0} \frac{\triangle \mathbf{r}}{\triangle t} = \lim_{\triangle t\to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\triangle t) - \mathbf{r}(t)}{\triangle t},$$

ako taj limes postoji.



Sl. 1.4. Geometrijska interpretacija derivacije vektorske funkcije

Geometrijska interpretacija derivacije vektorske funkcije. Promotrimo sl. 3.4. Vidimo da kad $\triangle t \to 0$, onda $T' \to T$, te se spojnica $\overline{TT'}$ općenito sve bolje poklapa s dijelom krivulje $\overset{\frown}{TT'}$. Ako postoji granični smjer pri tom približavanju, kažemo da je to smjer tangente. Budući da je vektor $\triangle \mathbf{r}$ kolinearan s vektorom $\dfrac{\triangle \mathbf{r}}{\triangle t}$, slijedi da je vektor smjera tangente određen vektorom $\mathbf{r}'(t)$.

Derivacija vektorske funkcije

Teorem 4. *Ako je $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ vektorska funkcija s komponentama $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$ koje su diferencijabilne, tada je*

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

Dokaz. Koristeći definiciju derivacije vektorske funkcije dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle \mathbf{r}}{\triangle t} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\triangle t) - \mathbf{r}(t)}{\triangle t} \\
&= \lim_{\triangle t \to 0} \left[\frac{x(t+\triangle t)-x(t)}{\triangle t}\mathbf{i} + \frac{y(t+\triangle t)-y(t)}{\triangle t}\mathbf{j} + \frac{z(t+\triangle t)-z(t)}{\triangle t}\mathbf{k} \right] \\
&= x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

$\square$

Neka je prostorna krivulja $\mathscr{C}$ zadana u obliku:

$$\mathscr{C} \ldots \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

ili s pomoću vektorske funkcije $t \mapsto \mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Već smo spomenuli da vektorska funkcija opisuje gibanje točke po krivulji. Dakle, ako je položaj točke koja se giba po krivulji zadan vektorskom funkcijom

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

tada je vektor brzine točke u trenutku t dan derivacijom $\mathbf{r}'(t)$, tj.

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Iznos brzine je norma vektora brzine $\|\mathbf{v}(t)\|$. Također, vektor akceleracije je dan s

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

Ako definiramo oskulatornu ravninu Π kao ravninu u kojoj leže vektori brzine i akceleracije, tada je njen vektor normale dan s

$$\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{a}.$$

Budući da u oskulatornoj ravnini leže vektori brzine i akceleracije, to je ravnina u kojoj promatramo gibanje točke.

Vidjeli smo da je vektor smjera tangente na graf vektorske funkcije određen vektorom $\mathbf{r}'$ te sada možemo uvesti jednadžbu tangente na sljedeći način:

Jednadžba tangente

Definicija 6. Neka je $T(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{C}$ točka krivulje kojoj odgovara vrijednost parametra $t = t_0$. **Jednadžba tangente** t na krivulju $\mathscr{C}$ u točki $T(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{C}$ je:

$$t \ldots \frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

Napomena. Primijetimo da u slučaju krivulje u $\mathbf{R}$ zadane sa $\vec{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ tangenta ima jednadžbu $\dfrac{x - x_0}{x'(t_0)} = \dfrac{y - y_0}{y'(t_0)}$ odnosno $y - y_0 = \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x_0)$ što je ekvivalentno jednadžbi $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$ koju znamo iz kolegija Matematika 1.

Primjer 7. Treba naći jednadžbu tangente na zavojnicu $\mathscr{C}$:

$$\mathscr{C} \ldots \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$$

u točki krivulje kojoj odgovara parametar $t_0 = \frac{\pi}{4}$. Vidi sl. 3.5.

Rješenje. Dobije se $T_0(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b\pi}{4})$, i

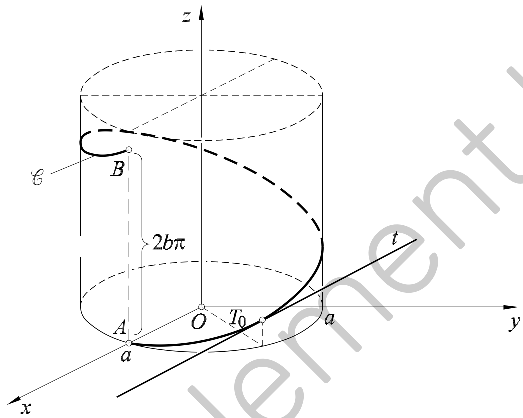
$$x'(t_0) = -a\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{a}{\sqrt{2}},\ y'(t_0) = a\cos\frac{\pi}{4} = \frac{a}{\sqrt{2}},\ z'(t_0) = b.$$

Odakle slijedi

$$t \ldots \frac{x - \frac{a}{\sqrt{2}}}{-\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{y - \frac{a}{\sqrt{2}}}{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{z - \frac{b\pi}{4}}{b}$$

ili

$$t \ldots \frac{x - \frac{a}{\sqrt{2}}}{-1} = \frac{y - \frac{a}{\sqrt{2}}}{+1} = \frac{z - \frac{b\pi}{4}}{\frac{b\sqrt{2}}{a}}.$$



Sl. 1.5.

Primjer 8. Treba naći točke u kojima je tangenta na krivulju $\mathscr{C}$:

$$\mathscr{C}\ldots\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 4t^2 \\ z = -2t^2 \end{cases}$$

paralelna s ravninom $4x - 3y + 7 = 0$.

Rješenje. Dobije se

$$x'(t_0) = 3,\ y'(t_0) = 8t_0,\ z'(t_0) = -4t_0,$$

te je

$$t\ldots\frac{x - x_0}{3} = \frac{y - y_0}{8t_0} = \frac{z - z_0}{-4t_0}$$

, odnosno

$$\mathbf{c}_p = (3, 8t_0, -4t_0).$$

Pravac je paralelan s ravninom, pa mora vrijediti $\mathbf{c}_p \cdot \mathbf{n} = 0$, te dobijemo da je $t_0 = \frac{1}{2}$. Tražena točka je $T(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$.

Primjer 9. Vektorska jednadžba gibanja točke u prostoru je $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$, $t \in \mathbf{R}$.
(a) Odredite iznos brzine točke u trenutku $t = 0$, tj. izračunajte $\|\mathbf{v}(0)\|$.
(b) Odredite jednadžbu tangente na krivulju u točki koja odgovara parametru $t = 0$.

Rješenje. (a) Dobijemo $\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$, te je $\|\mathbf{v}(0)\| = \sqrt{2}$.
(b) Parametar $t = 0$ odgovara točki $T(0, 0, 1)$. Vektor smjera tangente je $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ te je

$$t \equiv \frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z - 1}{1}.$$

www.element.hr