1.

Laplaceova transformacija

Sadržaj poglavlja

Engleski fizičar Heaviside[1] je pri rješavanju linearnih diferencijalnih jednadžbi uveo način računanja kojeg je nazvao *operatorski račun*. Pritom su simboli deriviranja i integriranja shvaćeni kao operatori s kojima se može računati po pravilima za algebarske veličine. Strogi matematički temelji koji opravdavaju njegove postupke postavljeni su u teoriji tzv. Laplaceove transformacije.

Problemi koje rješavamo u matematičkoj analizi uključuju operacije deriviranja i integriranja. Ideja operatorskog računa temelji se na tome da funkcijama koje ulaze u račun nekom *funkcionalnom transformacijom* pridružimo nove funkcije, pri čemu će operacijama deriviranja i integriranja odgovarati neke jednostavnije algebarske operacije koje se vrše na transformatima funkcija.

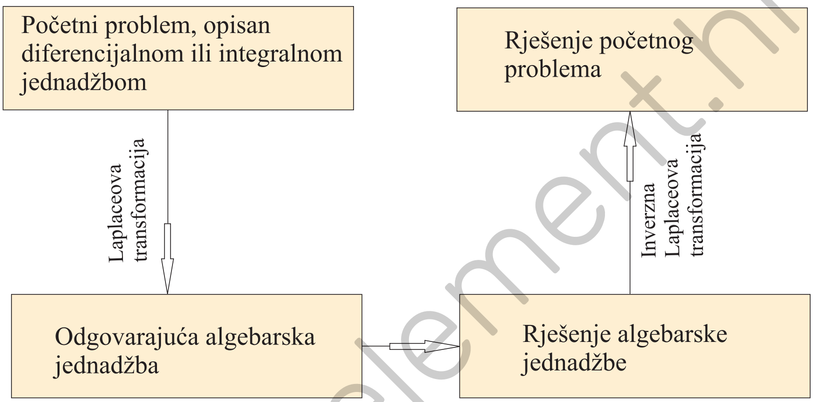
Među funkcionalnim transformacijama naročito su značajne tzv. **integralne transformacije**.

Neka su zadani interval $[a,b]$ i funkcija dviju varijabli $K(s,t)$. Tada funkciji $f(t)$ možemo pridružiti funkciju $F(s)$ formulom

$$F(s) := \int_a^b K(s,t)f(t)dt.$$

Funkcija $K(s,t)$ naziva se **jezgra** ove integralne transformacije. **Laplaceova transformacija** je integralna transformacija s jezgrom $K(s,t) = e^{-st}$ i na intervalu $[a,b] = [0,\infty\rangle$.

Laplaceova transformacija naročito je pogodna za rješavanje diferencijalnih i nekih integralnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima. Shematski postupak možemo opisati ovim dijagramom:



[1] Olivier Heaviside, (1850–1925)

1.1. Laplaceova transformacija

Laplaceov transformat

Neka je f funkcija realnog argumenta t, definirana za $t > 0$ i s vrijednostima u skupu realnih ili kompleksnih brojeva. Neka je s realni ili kompleksni parametar. **Laplaceov transformat** funkcije f je funkcija F definirana s

$$F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{1}$$

za svaki s za koji ovaj nepravi integral konvergira.

Funkcija f se naziva **original** ili **gornja funkcija**, a $F(s) = \mathscr{L}(f(t))$ **slika** ili **donja funkcija**.

Da bismo olakšali zapisivanje i razumijevanje veza između funkcija i njihovih slika, originale ćemo uglavnom označavati malim slovima poput f, g, h a njihove slike velikim slovima F, G, H. Također (iako to s matematičkog aspekta nije važno), argument originala ćemo sustavno označavati s t, a argument njihovih slika sa s.

Pridruživanje $f \mapsto F$ nazivamo **Laplaceova transformacija** i označavamo ga s $\mathscr{L}$. Dakle

$$\mathscr{L}(f) = F.$$

Obratna veza, koja slici pridružuje original, naziva se **inverzna Laplaceova transformacija** i označava s $\mathscr{L}^{-1}$:

$$\mathscr{L}^{-1}(F) = f.$$

Zbog jednostavnosti zapisivanja, koristit ćemo još jednu oznaku za ovo pridruživanje. Da je originalu f pridružena slika F zapisivat ćemo ovako:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s).$$

Obratnu vezu zapisivat ćemo na sljedeći način:

$$F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ f(t).$$

⋆ ⋆ ⋆

Laplaceov integral je nepravi integral

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ako za neki s postoji ova granična vrijednost, tada kažemo da nepravi integral konvergira. Za takav s je definirana vrijednost slike $F(s)$. Ako pak postoji

$$\lim_{M\to\infty} \int_0^M |e^{-st} f(t)|\,\mathrm{d}t,$$

tada kažemo da nepravi integral konvergira apsolutno. Nepravi integral koji konvergira apsolutno, konvergira i obično.

⋆⋆⋆

Pri različitim ocjenama često moramo izračunati apsolutnu vrijednost kompleksnog broja e^z, $z \in \mathbf{C}$. Neka je $z = x + iy$ algebarski prikaz broja z. Onda vrijedi

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Zato je

$$|e^z| = |e^x| \cdot |\cos y + i \sin y| = e^x \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x.$$

Zapamtimo:

Apsolutna vrijednost kompleksnog broja e^z

Za kompleksni broj $z = x + iy$ vrijedi

$$|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}.$$

Posebno je, za realni broj α

$$|e^{i\alpha}| = 1.$$

Ove ćemo formule često koristiti u nastavku pa ih treba upamtiti.

⋆⋆⋆

Ako podintegralna funkcija uzima vrijednosti u skupu kompleksnih brojeva, tada integral (1) možemo svesti na integral realnih funkcija.

1. Ako je $s = s_1 + is_2$ kompleksni parametar, dovoljno je eksponencijalnu funkciju prikazati preko trigonometrijskih:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{-s_1 t} \cos(s_2 t) f(t)\,\mathrm{d}t - i \int_0^{\infty} e^{-s_1 t} \sin(s_2 t) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Međutim, u računu je jednostavnije integrirati eksponencijalnu funkciju, tretirajući kompleksni broj i kao konstantu.

2. Ako je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, funkcija s vrijednostima u skupu kompleksnih brojeva, tada je možemo napisati u obliku: $f(t) = u(t) + iv(t)$, pri čemu su u i v realne funkcije. Integral se može računati ovako:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{-st} u(t)\,\mathrm{d}t + i \int_0^{\infty} e^{-st} v(t)\,\mathrm{d}t.$$

I ovdje vrijedi ista napomena, najčešće se integracija može izvesti direktno.

3. Ako su i s i $f(t)$ kompleksni, tad kombiniramo korake 1. i 2.

⋆⋆⋆

Primjer 1.

Odredimo sliku funkcije $f(t) = t$.

www.element.hr

► Prema definiciji je

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,t\,\mathrm{d}t=\begin{bmatrix} u=t & \mathrm{d}v=e^{-st}\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}t & v=-\frac{1}{s}e^{-st}\end{bmatrix}$$
$$=-\frac{t\,e^{-st}}{s}\Big|_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t$$
$$=-\frac{1}{s}\lim_{t\to\infty}(t\,e^{-st})-\frac{1}{s^2}\lim_{t\to\infty}e^{-st}+\frac{1}{s^2}.$$

Oba će limesa postojati onda i samo onda ako je $s>0$. Za takve je s definirana slika funkcije $f(t)=t$ i ona glasi $F(s)=\frac{1}{s^2}$. To ćemo jednostavnije zapisivati ovako:

$$t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2}.$$ ◄

⋆ ⋆ ⋆

Ovaj primjer pokazuje da je čak i za vrlo jednostavne originale računanje Laplaceovog transformata neugodan posao. Srećom, za sve elementarne funkcije mi ćemo to učiniti samo jednom, i nakon toga usvojiti **tablicu Laplaceovih transformata**. Pri određivanju slike složenijih funkcija, koristit ćemo tu tablicu i **pravila preslikavanja** koja ćemo u međuvremenu izvesti.

Prvo među njima je sljedeće svojstvo:

Teorem 1. ■ Linearnost Laplaceove transformacije

Ako je $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$, $g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet G(s)$, tada vrijedi

$$\alpha f(t)+\beta g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \alpha F(s)+\beta G(s). \tag{2}$$

Kažemo da je Laplaceova transformacija **linearno preslikavanje**.

Dokaz. Vrijedi

$$\mathscr{L}(\alpha f+\beta g)=\int_0^\infty e^{-st}\big(\alpha f(t)+\beta g(t)\big)\,\mathrm{d}t$$
$$=\alpha\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t+\beta\int_0^\infty e^{-st}g(t)\,\mathrm{d}t$$
$$=\alpha\mathscr{L}(f)+\beta\mathscr{L}(g).$$ ◄

1.1.1. Zadatci za vježbu

1. Računajući preko definicije Laplaceovog transformata, odredi slike sljedećih funkcija. Za svaki transformat naznači njegovo područje definicije.

A. $2t+1$; **B.** e^t; **C.** e^{-3t};
D. te^t; **E.** te^{-t}; **F.** $2\sin 3t$;
G. $e^t\sin t$; **H.** $e^t\cos t$; **I.** $1-\sin t$.

2. Računajući preko definicije Laplaceovog transformata, odredi slike sljedećih funkcija. Za svaki transformat naznači njegovo područje definicije.

A. $f(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant T,\\ 0, & t<T;\end{cases}$ **B.** $f(t)=\begin{cases}1, & t\leqslant T,\\ 0, & t>T;\end{cases}$

C. $f(t)=\begin{cases}t, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 1, & t>1;\end{cases}$ **D.** $f(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<1,\\ 1, & 1\leqslant t\leqslant 2,\\ 0, & t>2.\end{cases}$

1.1.1. Odgovori

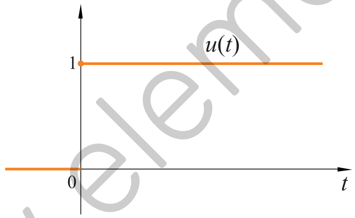
1. A. $\dfrac{2}{s^2}+\dfrac{1}{s}$. **B.** $\dfrac{1}{s-1}$. **C.** $\dfrac{1}{s+3}$. **D.** $\dfrac{1}{(s-1)^2}$. **E.** $\dfrac{1}{(s+1)^2}$. **F.** $\dfrac{6}{s^2+9}$.
G. $\dfrac{1}{s^2-2s+2}$. **H.** $\dfrac{s}{s^2-2s+2}$. **I.** $\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s^2+1}$.

2. A. $\dfrac{1}{s}e^{-Ts}$. **B.** $\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s}e^{-Ts}$. **C.** $\dfrac{1}{s^2}(1-e^{-s})$. **D.** $\dfrac{1}{s}(e^{-s}-e^{-2s})$.

1.2. Primjeri Laplaceovih transformata

1.2.1. Step funkcija

Funkcija $u(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ zove se **step funkcija** ili **jedinična funkcija**.



Njezin Laplaceov transformat iznosi

$$\mathscr{L}(u(t)) = \int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{s}, \qquad s > 0.$$

1.2.2. Eksponencijalna funkcija

Eksponencijalna funkcija $f(t) = e^{\alpha t}$ ima Laplaceov transformat

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-st} e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{(\alpha - s)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{e^{(\alpha-s)t}}{\alpha - s}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{s-\alpha}, \qquad s > \alpha. \end{aligned}$$

Identična formula vrijedi i u slučaju kad je $\alpha = \beta + i\gamma$ kompleksan broj:

$$e^{\alpha t} \circ\!\!-\!\!\bullet \int_0^\infty e^{-st} e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{(\alpha-s)t}}{\alpha - s}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{s-\alpha} + \lim_{t\to\infty} \frac{e^{(\beta+i\gamma-s)t}}{\alpha - s}.$$

Apsolutna vrijednost funkcije u brojniku ovog izraza je

$$|e^{(\beta+i\gamma-s)t}| = |e^{(\beta-s)t}|$$

pa je limes brojnika jednak nuli za svaki $s > \beta$.

Slika eksponencijalne funkcije

Za svaki realni ili kompleksni broj α vrijedi

$$e^{\alpha t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-\alpha}, \qquad s > \operatorname{Re}\alpha.$$

1.2.3. Trigonometrijske i hiperbolične funkcije

Sliku hiperboličnih funkcija dobivamo korištenjem linearnosti Laplaceove transformacije

$$\operatorname{sh}\omega t = \frac{1}{2}e^{\omega t} - \frac{1}{2}e^{-\omega t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+\omega} = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}, \qquad s > |\omega|.$$

Na identičan način dobivamo

$$\operatorname{ch}\omega t \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{s}{s^2-\omega^2}, \qquad s > |\omega|.$$

Sliku trigonometrijskih funkcija možemo dobiti iz relacije

$$e^{i\omega t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s-i\omega}, \qquad s > 0.$$

Naime, lijeva se strana može napisati u obliku

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t.$$

Zato je slika funkcije kosinus jednaka realnom dijelu izraza $\dfrac{1}{s-i\omega}$, a slika funkcije sinus jednaka je imaginarnom dijelu tog izraza. Vrijedi

$$\frac{1}{s-i\omega} = \frac{s}{s^2+\omega^2} + i\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Time smo dobili sljedeće formule:

Slike trigonometrijskih i hiperboličnih funkcija

$$\sin\omega t \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \qquad \cos\omega t \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{s}{s^2+\omega^2},$$

$$\operatorname{sh}\omega t \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{\omega}{s^2-\omega^2}, \qquad \operatorname{ch}\omega t \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{s}{s^2-\omega^2}.$$

Ove formule koristimo u oba smjera:

Primjer 2.

Odredimo original funkcije **A.** $\dfrac{1}{s^2+3}$; **B.** $\dfrac{s+3}{s^2+5}$.

► **A.** Algebarskom manipulacijom ovu sliku ćemo svesti na transformat funkcije sinus:

$$\frac{1}{s^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{s^2+(\sqrt{3})^2} \bullet\!\!-\!\!\circ\ \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}\,t).$$

B. Iskoristit ćemo linearnost inverzne transformacije:

$$\frac{s+3}{s^2+5} = \frac{s}{s^2+(\sqrt{5})^2} + \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{s^2+(\sqrt{5})^2} \bullet\!\!-\!\!\circ \cos(\sqrt{5}\,t) + \frac{3}{\sqrt{5}} \sin(\sqrt{5}\,t). \quad ◄$$

1.2.4. Polinomi

Da bismo odredili sliku polinoma, zbog svojstva linearnosti Laplaceove transformacije, dovoljno je odrediti sliku funkcije $f(t) = t^n$ za prirodni eksponent n. Vrijedi

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} t^n \,\mathrm{d}t = \frac{t^n e^{-st}}{-s}\bigg|_0^\infty + \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st} t^{n-1}\,\mathrm{d}t.$$

Za $s > 0$ prvi je član jednak nuli. Time smo dobili **rekurzivnu formulu**:

$$\mathscr{L}(t^n) = \frac{n}{s}\mathscr{L}(t^{n-1}).$$

Iteriranjem te formule dobivamo

$$\mathscr{L}(t^n) = \frac{n}{s}\mathscr{L}(t^{n-1}) = \ldots = \frac{n!}{s^n}\mathscr{L}(1) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Slika potencije t^n

Vrijedi

$$1 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}, \tag{3}$$

$$t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2}, \tag{4}$$

$$t^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad n \in \mathbf{N}. \tag{5}$$

Primjer 3.

Odredimo sliku funkcije $f(t) = (t+3)^2$.

► Koristit ćemo svojstvo linearnosti Laplaceove transformacije i formule (3)–(5):

$$(t+3)^2 = t^2 + 6t + 9 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s}. \quad ◄$$

www.element.hr

1.2.5. Postojanje Laplaceovog transformata

Za koje će funkcije postojati Laplaceov transformat? Odgovor na ovo pitanje nije jednostavan. Za većinu primjena, dovoljno se ograničiti na jednu široku klasu funkcija za koju će taj transformat postojati.

Tako ćemo u daljnjem pojam originala suziti na sljedeću klasu funkcija:

Original

Za funkciju f ćemo reći da je **original**, ako ona zadovoljava uvjete

1. $f(t) = 0$ za $t < 0$.

2. f je na svakom konačnom intervalu po dijelovima neprekinuta, a prekidi su prve vrste.

3. f je eksponencijalnog rasta, tj. postoje konstante $M > 0$ i a takve da za sve $t > 0$ vrijedi

$$|f(t)| \leqslant Me^{at}. \tag{6}$$

Infimum svih konstanti a za koje vrijedi nejednakost (6) naziva se **eksponent rasta** funkcije f i označava s a_0.

Prvi je uvjet tehničke naravi. Laplaceova transformacija definirana je integralom po intervalu $[0, \infty\rangle$, pa vrijednosti funkcije f za $t < 0$ nisu bitne.

Drugi uvjet govori o tome koliko "loša" funkcija smije biti, da bi ipak postojao njezin transformat.

Treći uvjet govori koliko brzo funkcija smije rasti.

Napominjemo da ovi uvjeti *nisu nužni* za postojanje transformata. Oni su *dovoljni*. To znači da Laplaceov transformat može postojati i onda kad neki od ovih uvjeta nije zadovoljen.

⋆ ⋆ ⋆

U nastavku ćemo za vrijednosti varijable s uzimati, zbog jednostavnosti, samo realne brojeve.

⋆ ⋆ ⋆

Teorem 2. ■ Konvergencija laplaceovog integrala

Laplaceov integral $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$ konvergira u području $s > a_0$, gdje je a_0 eksponent rasta funkcije f. Ako je $s_0 > a_0$, tada u području $s \geqslant s_0$ taj integral konvergira jednoliko.

▶ Neka je $s > a_0$. Tada postoje konstante a i M takve da je $s > a > a_0$ i $|f(t)| \leqslant Me^{at}$. Zato je

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left|e^{-st} f(t)\right| \mathrm{d}t &= \int_0^\infty |e^{-st}| \cdot |f(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^\infty e^{-ts} Me^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{M}{s-a}.\end{aligned}$$

www.element.hr

Dakle, $\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$ konvergira (apsolutno) ako je $s > a_0$. Ako je pak $s \geqslant s_0 > a_0$, tada isti a vrijedi za sve s; $a_0 < a < s_0$:

$$\int_0^\infty |e^{-st}f(t)|\,dt \leqslant \frac{M}{s-a} \leqslant \frac{M}{s_0-a}$$

i integral konvergira jednoliko po s, jer gornja međa ne ovisi o s. ◀

⋆⋆⋆

Kako ćemo provjeriti je li neka funkcija eksponencijalnog rasta? Pretpostavljat ćemo da je funkcija f u nastavku neprekinuta ili po dijelovima neprekinuta s prekidima prve vrste.

Teorem 3. ■ **Kriterij za eksponencijalni rast**

Funkcija f je eksponencijalnog rasta ako i samo ako za neku konstantu a postoji limes

$$\lim_{t\to\infty} e^{-at}|f(t)|.$$

Tada za eksponent rasta vrijedi $a_0 \leqslant a$.

▶ Neka je $K = \lim_{t\to\infty} e^{-at}|f(t)|$. Tada postoji t_0 takav da za $t > t_0$ vrijedi $e^{-at}|f(t)| < K+1$, odnosno

$$|f(t)| \leqslant (K+1)e^{at}, \qquad \text{za sve } t > t_0.$$

Odavde slijedi da je f eksponencijalnog rasta, s eksponentom koji je $\leqslant a$. Detalji su ostavljeni za vježbu u Zadatku 6. ◀

Primjer 4.

A. Funkcija $f(t) = t^n$ je eksponencijalnog rasta, uz $a_0 = 0$. Zaista, za svaki $a > 0$ je

$$\lim_{t\to\infty} e^{-at}t^n = \lim_{t\to\infty}\frac{t^n}{e^{at}} = \ldots = \lim_{t\to\infty}\frac{n!}{a^n e^{at}} = 0.$$

B. Funkcija $f(t) = e^{t^2}$ nije eksponencijalnog rasta, jer je za bilo kakav $a \in \mathbf{R}$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-at}|f(t)| = \lim_{t\to\infty} e^{t(t-a)} = \infty.$$

C. Ako je f eksponencijalnog rasta, tada je i $t^n f(t)$ eksponencijalnog rasta. Zaista, neka je a_0 eksponent rasta za f, $a > a_0$ i $b > 0$ po volji. Tada postoje M_1, M_2 takvi da vrijedi

$$|f(t)| < M_1 e^{at}, \qquad |t^n| < M_2 e^{bt},$$

i zato

$$|t^n f(t)| < M_1 M_2 e^{(a+b)t},$$

te je $t^n f(t)$ eksponencijalnog rasta s eksponentom a_0.

1.2.6. Zadatci za vježbu

1. Provjeri jesu li ove funkcije originali ili nisu. Ako jesu, odredi eksponent rasta a_0.

A. t^2; **B.** $\sin 2t$; **C.** $t^2 \sin 2t$;
D. $e^{-2t} \sin t$; **E.** $\operatorname{ch} 3t$; **F.** $e^{t\sqrt{t}}$;
G. $u(t-2)$; **H.** $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$; **I.** $\dfrac{1}{t}$;
J. $\sin(t^2)$; **K.** $3t+2$; **L.** $3 \cdot 2^{2t}$.

2. Odredi Laplaceov transformat funkcije $\cos(\omega t)$ računajući direktno prema definiciji transformata.

3. Izračunaj Laplaceov transformat funkcije $t^n e^{at}$ računajući prema definiciji.

4. Koristeći linearnost Laplaceove transformacije i tablicu elementarnih transformata, odredi slike sljedećih funkcija

A. $t^3 - 3t^2 + 2$; **B.** $(t+1)^3$; **C.** $3e^t \operatorname{sh} 2t$;
D. $\operatorname{ch} 2t \cdot \operatorname{sh} t$; **E.** $\cos^2(2t)$; **F.** $\sin t \cdot \sin 2t$;
G. $\cos 5t \cdot \sin 3t$; **H.** $\cos^3 t$.

5. Koristeći se tablicom Laplaceovih transformata, odredi originale sljedećih funkcija:

A. $\dfrac{-3}{s^2+8}$; **B.** $\dfrac{2s-3}{s^2-6}$; **C.** $\dfrac{2}{s-2} + \dfrac{4}{s^2}$;
D. $\dfrac{4s+1}{s^2+5}$; **E.** $\dfrac{1}{s^3} - \dfrac{2}{s^2}$; **F.** $\dfrac{1}{s-1} - \dfrac{2}{s+2}$;
G. $\dfrac{2s+1}{s^2-2s}$; **H.** $\dfrac{s^3-3s+2}{s^4}$; **I.** $\dfrac{1}{s^4}\left(2 + \dfrac{1}{s} - s^2\right)$.

6. Neka je funkcija f neprekinuta na $[0, \infty\rangle$. Dokaži da je ona eksponencijalnog rasta onda i samo onda ako postoje konstante a, M i broj $t_0 > 0$ takvi da vrijedi

$$|f(t)| \leqslant Me^{at}, \qquad \text{za sve } t > t_0.$$

1.2.6. Odgovori

1. A. da, $a_0 = 0$; **B.** da, $a_0 = 0$; **C.** da, $a_0 = 0$; **D.** da, $a_0 = -2$; **E.** da, $a_0 = 3$; **F.** ne; **G.** da, $a_0 = 0$; **H.** ne; **I.** ne; **J.** da, $a_0 = 0$; **K.** da, $a_0 = 0$; **L.** da, $a_0 = 2\ln 2$.

2. *Naputak.* Upotrijebi dvaput parcijalnu integraciju da dobiješ početni integral.

3. *Naputak.* Upotrijebi parcijalnu integraciju i matematičku indukciju.

4. F. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{s}{s^2+1} - \dfrac{s}{s^2+9}\right)$. **G.** $\dfrac{4}{s^2+64} - \dfrac{1}{s^2+4}$.