Abrakadabra

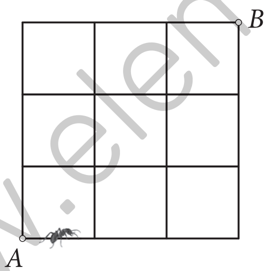
(ili nekoliko riječi o analogiji)

Čarobmatika je umjetnost — rekao je Baltazar.

— U kojem je muzeju možemo vidjeti? — upitali su mali đaci čarobmatičke škole.

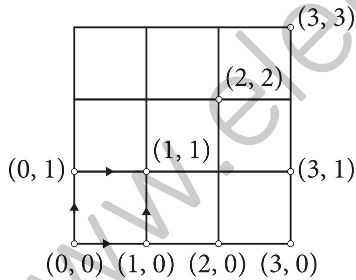
— Ne postoji muzej u kojemu možete vidjeti ta umjetnička djela. **Čarobmatičke slike slikane su idejama u našem umu. One kriju uzorke ideja koji nam govore kako misliti, zaključivati, dokazivati.** Njih ne crtamo bojama, ne zapisujemo notama, ne pjevamo glasom... Ne vidimo ih okom, ne čujemo uhom, ali vidimo umom. Čarobmatika nije samo spretno i lako korištenje formula, uputa ili brojeva. Ona je i otkrivanje novih formula, pravila, uzoraka, ideja, postupaka, sličnosti, podudarnosti, načina razmišljanja i zaključivanja — odgovorio im je Baltazar te zadao sljedeći jednostavan zadatak.

Zadatak 1. Zamislite rešetku ovakvog oblika načinjenu od žice (slika 1). Sada zamislite da po njoj mrav mora doći iz točke *A* u točku *B*. Na koliko najkraćih načina može to učiniti?



Slika 1.

Ako zamislimo da smo žičanu rešetku stavili u koordinatni sustav u kojem je ishodište u točki *A* (kao na slici 2) pa točke presjeka označimo uređenim parovima brojeva, jasno je da do točke (1, 1) možemo doći na 2 načina, do točke (3, 1) na 4 najkraća načina, do točke (2, 2) postoji 6 najkraćih putova itd.

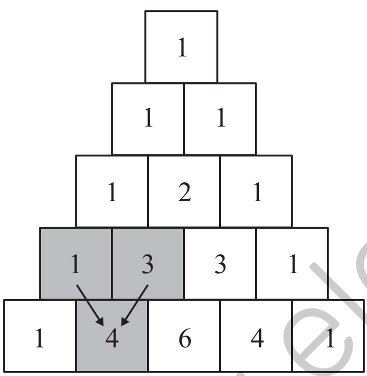


Slika 2.

1				
1	4			
1	3	6		
1	2	3	4	
1	1	1	1	1

Slika 3.

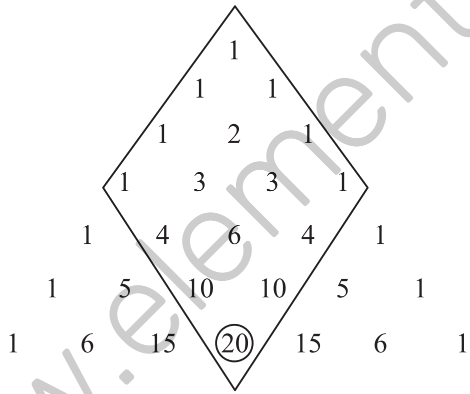
Zapišimo te brojeve u obliku tablice (slika 3), a zatim i u obliku trokuta, ali tako da nam jedinica koja označava točku (0, 0) bude gornji vrh (slika 4).



Slika 4.

Iz ove sheme brojeva možemo uočiti da je broj u nekom redu jednak zbroju brojeva koji se nalaze neposredno iznad njega. Tako je $1 + 3 = 4$, $3 + 3 = 6$ itd.

Koristeći ovo svojstvo, tablicu sada možemo proširiti, primjerice za još dva reda (slika 5).



Slika 5.

Uočavamo da je 4 + 6 = 10, 10 + 10 = 20. Položaj broja 20 odgovara točki (3, 3) na žičanoj rešetki. Dakle, mrav može na 20 najkraćih načina doći iz točke $A(0, 0)$ u točku $B(3, 3)$.

Shema brojeva na slici 5 zove se Pascalov trokut, nazvan prema matematičaru Blaisu Pascalu koji je živio u 17. stoljeću. Ovi brojevi bili su poznati već i u staroj Kini (između 10. st. i 13. st.).

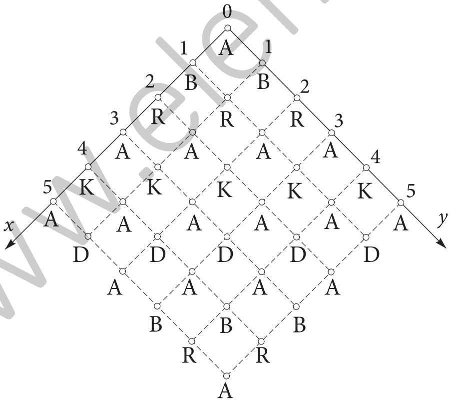
Može li se Pascalov trokut primijeniti i na sljedeći zadatak?

Zadatak 2.
Na koliko načina možete pročitati riječ ABRAKADABRA u zapisu na slici 6?

					A					
				B		B				
			R		R		R			
		A		A		A		A		
	K		K		K		K		K	
A		A		A		A		A		A
	D		D		D		D		D	
		A		A		A		A		
			B		B		B			
				R		R				
					A					

Slika 6.

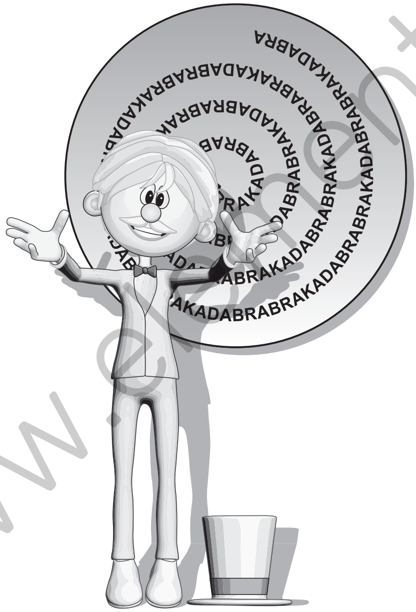
Predočimo li zadana slova točkama u koordinatnom sustavu, kao što je prikazano na slici 7, zadatak se svodi na pronalazak najkraćeg puta od slova A u točki (0, 0) do slova A u točki (5, 5). Broj nakraćih putova, kao što smo otkrili u prvom zadatku, možemo odrediti s pomoću Pascalova trokuta (slika 8).



Slika 7.

										1										
									1		1									
								1		2		1								
							1		3		3		1							
						1		4		6		4		1						
					1		5		10		10		5		1					
				1		6		15		20		15		6		1				
			1		7		21		35		35		21		7		1			
		1		8		28		56		70		56		28		8		1		
	1		9		36		84		126		126		84		36		9		1	
1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1

Slika 8.



Brojevi u tablici na slici 8 odgovaraju broju najkraćih načina na koje se od početnog slova A na vrhu može doći do nekog drugog slova. Prema tome, do zadnjeg slova A, u točki (5, 5), postoje 252 najkraća puta. Zaključujemo da se riječ ABRAKADABRA može pročitati na 252 načina.

Ovakav način razmišljanja u kojem smo uočili da sličnim zaključivanjem kao i u nekom ranije riješenom zadatku (problemu) možemo doći do rezultata, zove se **analogija**. Analogija (grč. *analogia* – sklad, razmjer, pravilnost, podudarnost, srodnost), odnosno zaključivanje prema analogiji, misaoni je postupak pri kojemu se iz opažanja da se dva objekta podudaraju u određenom broju svojstava ili odnosa izvodi zaključak da se oni podudaraju i u drugim svojstvima ili odnosima.

Međutim, tu treba biti oprezan jer se koji put, ako analogija nije potpuna, može i pogriješiti.

Analogiju možemo uočiti u objektima, svojstvima i postupcima. U prethodna dva zadatka uočili smo analogiju u postupcima i objektima. Najdublji oblik analogije, tzv. potpuna analogija, zove se izomorfizam koji dovodi do potpunih i pouzdanih zaključaka. Analogija je prisutna u svakodnevnom govoru i razmišljanju, a koristi se i u mnogim znanostima.

Do brojeva iz Pascalova trokuta može se doći na još mnogo načina i svi se uče u čarobmatičnoj školi. Pogledajmo sljedeća dva.

Zadatak 3. Zapišite u obliku tablice koeficijente koje dobijete u razvoju binoma $(a + b)^n$ tako da za eksponent n uvrstite redom brojeve 0, 1, 2, 3, 4.

Rješenje:

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
(a+b)^0 = 1 & \rightarrow & & & & & 1 & & & & \\
(a+b)^1 = a+b = 1\cdot a + 1\cdot b & \rightarrow & & & & 1 & & 1 & & & \\
(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 = 1\cdot a^2 + 2\cdot ab + 1\cdot b^2 & \rightarrow & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & \rightarrow & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
(a+b)^4 = (a+b)\cdot(a+b)^3 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\qquad\quad = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 & \nearrow & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Zadatak 4. Ako tri puta bacate novčić, primjerice od 1 kune, koje ćete sve ishode (sliku slavuja, tj. glavu ili brojku 1, tj. pismo) dobiti?

Rješenje:

broj bacanja	mogući ishodi	brojevi u Pascalovu trokutu
1	*P*, *G*	1 1
2	*PP*, (*PG*, *GP*), *GG*	1 2 1
3	*PPP*, (*PGP*, *GPP*, *PPG*), (*GGP*, *GPG*, *PGG*), *GGG*	1 3 3 1
4	Pokušajte sami naći skup ishoda za 4 bacanja novčića,	kao i pripadni red brojeva u Pascalovu trokutu.

U čarobmatičkoj školi u višim se razredima uči i kako pronaći analogiju između zadataka 3 i 4 te kako povezati brojeve iz Pascalova trokuta s dijelovima matematike koji se zovu – kombinatorika, teorija vjerojatnosti, fraktalna geometrija (trokut Sierpinskoga) i sl.

Matematičar je čovjek koji umije naći analogije među tvrdnjama, bolji matematičar je onaj koji pronalazi analogije među dokazima, najbolji matematičar je onaj koji uočava analogije teorija, no može se zamisliti i onoga koji uočava analogije među analogijama.

Banach