



kvadriranje

1. Funkcija kvadriranja

Svakom broju x možemo pridružiti njegov kvadrat, umnožak $x \cdot x$:

$$x \mapsto x^2.$$

- (1) Kvadrat broja različitog od nule pozitivan je broj.
Kvadrat nule je nula.

$$x^2 \geq 0.$$

- (2) Kvadrati suprotnih brojeva međusobno su jednaki.

$$(-x)^2 = x^2.$$

**FUNKCIJA
KVADRIRANJA**

2. Kvadrat umnoška. Kvadrat zbroja i razlike

Za svaka dva broja a i b vrijedi: Kvadrat umnoška brojeva a i b jednak je umnošku njihovih kvadrata.

$$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2.$$

**KVADRAT
UMNOŠKA**

Primjer 1. Bez uporabe džepnog računala izračunaj $24^2 \cdot 25^2$.

Rješenje. Primjenjujući gornje pravilo, redom ćemo računati:

$$\begin{aligned} 24^2 \cdot 25^2 &= (24 \cdot 25)^2 = (6 \cdot 4 \cdot 25)^2 = (6 \cdot 100)^2 \\ &= 6^2 \cdot 100^2 = 36 \cdot 10\,000 = 360\,000. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Primjer 2. Koliko je $14^2 \cdot \left(\frac{5}{21}\right)^2 \cdot 33^2$?

Rješenje. Uočavamo kako su sada u umnošku tri faktora. Pomišljamo ne bismo li mogli postupati jednako kao u prethodnom primjeru:

$$(a \cdot b \cdot c)^2 = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2.$$

Uistinu, ovo pravilo vrijedi. Naime, jer je $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c$, imamo:

$$(a \cdot b \cdot c)^2 = ((a \cdot b) \cdot c)^2 = (a \cdot b)^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2.$$

Sada računamo:

$$\begin{aligned} 14^2 \cdot \left(\frac{5}{21}\right)^2 \cdot 33^2 &= \left(14 \cdot \frac{5}{21} \cdot 33\right)^2 = (10 \cdot 11)^2 = 10^2 \cdot 11^2 \\ &= 100 \cdot 121 = 12\,100. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Primjer 3. Bez uporabe džepnog računala izračunaj:

$$(-0.12)^2 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^2 \cdot (-0.75)^2 \cdot \left(-2\frac{1}{2}\right)^2.$$

Rješenje. U ovom primjeru imamo još jedan faktor više. Postupit ćemo slično prethodnom primjeru:

$$(a \cdot b \cdot c \cdot d)^2 = ((a \cdot b \cdot c) \cdot d)^2 = (a \cdot b \cdot c)^2 \cdot d^2 = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot d^2.$$

Zatim računamo:

$$\begin{aligned} (-0.12)^2 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^2 \cdot (-0.75)^2 \cdot \left(-2\frac{1}{2}\right)^2 &= \left(-\frac{6}{50} \cdot \frac{5}{9} \cdot -\frac{3}{4} \cdot -\frac{5}{2}\right)^2 \\ &= \left(-\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Za kvadriranje količnika dvaju brojeva vrijedi pravilo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Kvadrat količnika dvaju brojeva jednak je količniku kvadrata tih brojeva.

**KVADRAT
KOLIČNIKA**

Primjer 4. Pojednostavi: $\frac{52^2}{91^2}$.

Rješenje. Imamo redom:

$$\frac{52^2}{91^2} = \left(\frac{52}{91}\right)^2 = \left(\frac{4 \cdot 13}{7 \cdot 13}\right)^2 = \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{16}{49}. \quad \checkmark$$

Za svaka dva broja a i b vrijedi:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Ove nam jednakosti izriču pravila za određivanje kvadrata zbroja i kvadrata razlike dvaju brojeva.

Primjer 5. Koristeći se formulama za kvadrat zbroja i kvadrat razlike, izračunaj 42^2 i 89^2 .

Rješenje.

$$\begin{aligned} 42^2 &= (40 + 2)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 2 + 2^2 = 1\,600 + 160 + 4 \\ &= 1\,764. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 89^2 &= (90 - 1)^2 = 90^2 - 2 \cdot 90 \cdot 1 + 1^2 = 8\,100 - 180 + 1 \\ &= 7\,921. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Primjer 6. Izračunaj što brže:

$$52.7^2 + 22.7^2 - 2 \cdot 52.7 \cdot 22.7.$$

Rješenje. Odmah uočavamo kako u tom izrazu imamo tri člana, dva su kvadrati nekih brojeva, a treći je njihov dvostruki umnožak. Dakle je riječ o kvadratu razlike, $(52.7 - 22.7)^2 = 30^2 = 900$.

Primjer 7. Ako je ostatak pri dijeljenju broja a s 5 jednak 1, a ostatak pri dijeljenju broja b brojem 5 jednak 2, onda je zbroj kvadrata brojeva a i b djeljiv s 5. Dokaži!

Rješenje. Brojeve a i b ćemo zapisati u obliku $a = 5m + 1$, $b = 5n + 2$, gdje su m i n neki cijeli brojevi. Tada je $a^2 + b^2 = (5m + 1)^2 + (5n + 2)^2 = 25m^2 + 10m + 25n^2 + 20n + 5$. Svaki je od pribrojnika djeljiv s 5 pa je i zbroj djeljiv s 5.

Primjer 8. Zbroj kvadrata triju uzastopnih neparnih cijelih brojeva uvećan za 1, djeljiv je s 12. Dokaži!

Rješenje. Treba dokazati kako je broj $(2n+1)^2 + (2n+3)^2 + (2n+5)^2 + 1$ djeljiv s 12, za svaki cijeli broj n . Izačunamo:

$$\begin{aligned}(2n+1)^2 + (2n+3)^2 + (2n+5)^2 + 1 &= 12n^2 + 36n + 36 \\ &= 12(n^2 + 3n + 3).\end{aligned}$$

Očito je taj broj djeljiv s 12 za svaki cijeli broj n .

Za razliku kvadrata $a^2 - b^2$ dvaju brojeva a i b vrijedi ova jednakost:

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b).$$

Razlika kvadrata dvaju brojeva jednaka je umnošku njihova zbroja i njihove razlike.

RAZLIKA KVADRATA

Primjer 9. Skrati razlomak: $\frac{64^2 - 56^2}{32^2 - 88^2}$.

Rješenje. I u brojniku i u nazivniku ovog razlomka nalaze se razlike kvadrata pa možemo pisati:

$$\frac{64^2 - 56^2}{32^2 - 88^2} = \frac{(64 - 56) \cdot (64 + 56)}{(32 - 88) \cdot (32 + 88)} = \frac{8 \cdot 120}{-56 \cdot 120} = -\frac{8}{56} = -\frac{1}{7}. \quad \checkmark$$

Primjer 10. Bez uporabe računala, koristeći se razlikom kvadrata, izračunaj umnožak brojeva 47 i 53.

Rješenje. Broj 47 je za 3 manji od 50, a broj 53 za 3 je veći od 50. Stoga možemo pisati:

$$47 \cdot 53 = (50 - 3) \cdot (50 + 3) = 50^2 - 3^2 = 2500 - 9 = 2491. \quad \checkmark$$

Zadaci za vježbu

1. Izračunaj: $(-5)^2 \cdot (0.2)^2 \cdot (-12)^2$.
2. Izračunaj: $(-33)^2 \cdot \left(\frac{8}{11}\right)^2 \cdot \left(\frac{-1}{0.12}\right)^2$.
3. Izračunaj:
$$(0.5)^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot (-0.75)^2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)^2$$
4. Izračunaj: $\frac{42^2}{24^2} \cdot \left(\frac{16}{35}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{0.8}\right)^2$.
5. Izračunaj:
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \dots \cdot \left(\frac{99}{100}\right)^2$$
6. Odredi posljednju znamenku svakog od sljedećih brojeva:
 - 1) $((33^2)^2)^2$; 2) $(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8)^2$;
 - 3) $1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \dots 9^2$.
7. Primjenjujući formulu za kvadrat zbroja izračunaj:
 - 1) 41^2 ; 2) 92^2 ; 3) 505^2 .
8. Primjenjujući formulu za kvadrat razlike izračunaj:
 - 1) 59^2 ; 2) 88^2 ; 3) 298^2 .
9. Provjeri: $(10n + 5)^2 = 100n(n + 1) + 25$. Koristeći se ovom jednakosti, izračunaj:
 - 1) 35^2 ; 2) 45^2 ; 3) 55^2 ;
 - 4) 65^2 ; 5) 75^2 .

10. Koristeći se formulom za razliku kvadrata, izračunaj:
 - 1) $72^2 - 28^2$; 2) $133^2 - 67^2$;
 - 3) $\left(8\frac{1}{8}\right)^2 - \left(3\frac{1}{8}\right)^2$.
11. Koristeći se formulom za razliku kvadrata izračunaj:
 - 1) $51 \cdot 49$; 2) $98 \cdot 102$; 3) $152 \cdot 148$.
12. Skrati razlomak $\frac{17.5^2 - 9.5^2}{131.5^2 - 3.5^2}$.
13. Skrati razlomak $\frac{22.4^2 + 17.6^2 + 2 \cdot 17.6 \cdot 22.4}{57^2 - 27^2}$.
14. Skrati razlomak $\frac{21.3^2 + 11.3^2 - 2 \cdot 11.3 \cdot 21.3}{13.2^2 - 11.8^2}$.
15. Skrati razlomak $\frac{(57.3^2 - 52.7^2)^2}{112.2^2 + 224.4 \cdot 107.8 + 107.8^2}$.
16. Izračunaj vrijednost brojevnog izraza:
$$\frac{59^2 - 28^2 - 87 \cdot 21}{56^2 - 31^2} + \frac{64^2 - 56^2}{65^2 - 15^2}$$
17. Provedi naznačena kvadriranja:
 - 1) $\left(\frac{1}{4}p + 6q\right)^2$; 2) $(0.5a - 0.4b)^2$;
 - 3) $\left(2\frac{1}{3}m - 1\frac{1}{2}n\right)^2$.
18. Pojednostavi: $(4a - 3b)^2 - 2(3a - 2b)^2$.
19. Pojednostavi:
$$(2a - b)(a - 2b) - 2(a - b)^2 + a(a + b)$$
20. Pojednostavi:
$$(3a - y)^2 + (3a + y)^2 - 2(3a - y)(3a + y)$$
21. Ako je $a = 11.27$, $b = 8.73$, koliko je
$$(a - b)^2 + 4ab?$$

22. Ako je $a = 15.7$, $b = 8.7$, koliko je

$$(a + b)^2 - 4ab?$$

23. Ako je $x = 53.7$, $y = 46.3$, koliko je

$$(x - y)^2 + 4xy?$$

24. Provjeri:

$$\frac{(56 + 65)^2 - 4 \cdot 56 \cdot 65}{65^2 - 56^2} + \frac{56^2 - 65^2}{(56 - 65)^2 + 4 \cdot 56 \cdot 65} = 0.$$

25. Ako je ostatak pri dijeljenju broja x s 5 jednak 3, a ostatak pri dijeljenju broja y s 5 jednak 1, koliki je ostatak pri dijeljenju s 5:

- 1) kvadrata broja x ;
- 2) kvadrata broja y ;
- 3) zbroja kvadrata brojeva x i y ?

26. Ostatak pri dijeljenju broja a sa 7 jednak je 1, a ostatak pri dijeljenju broja b sa 7 jednak je 3. Koliki je ostatak pri dijeljenju sa 7:

- 1) kvadrata broja a ;
- 2) kvadrata broja b ;
- 3) zbroja kvadrata brojeva a i b ;
- 4) kvadrata zbroja brojeva a i b ;
- 5) razlike kvadrata brojeva a i b ?

27. Zbroj dvaju brojeva jednak je 30, razlika njihovih kvadrata 120. Koji su to brojevi?

28. Razlika dvaju brojeva jednaka je 2, razlika njihovih kvadrata 100. Koji su to brojevi?

29. Provjeri jednakost: $2(m - n)^2 - 2(m + n)^2 - 4(m - n)(m + n) = 4n^2 - 8mn - 4m^2$.

30. Provjeri sljedeće jednakosti:

1) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$;

2) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$.

31. Dokaži identitete:

1) $(a - b)^2 = (b - a)^2$;

2) $(-a - b)^2 = (a + b)^2$.

32. Dokaži: $(kx + ky)^2 = k^2 \cdot (x + y)^2$.

33. Dokaži: $\frac{a^2 + b^2}{2} = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a - b}{2}\right)^2$.

34. Dokaži: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$.

35. Odredi cijele brojeve x za koje je $x + 3 > 0$ i $x^2 - 9 < 0$.

36. Riješi jednačbe:

1) $x^2 - 9 = x + 3$;

2) $x^2 - 1 = (x + 1)^2$;

3) $x(x - 3) = 2(x^2 - 9)$;

4) $x(x - 1) - x^2 + 1 = 0$.

37. Riješi jednačbe:

1) $(x + 5)^2 - (x - 1)^2 = 48$;

2) $(x + 4)^2 - (x + 8)(x - 8) = 96$.

38. Jesu li točne sljedeće jednakosti:

1) $(a - b)^2 - (b - c)^2 - (c - a)^2 = 2(a - c)(c - b)$;

2) $(a + b)^2 - (b + c)^2 - (c + a)^2 = 2(ab - bc - ca)$;

3) $(a + b + c)(ab + ac + bc) = (a + b)(b + c)(c + a) + abc$;

4) $a(b + c)^2 + b(c + a)^2 + c(a + b)^2 - 4abc = (a + b)(b + c)(c + a)$?

RJEŠENJA

1. 144.
2. 40 000.
3. $\frac{1}{25}$.
4. 1.
5. $\frac{1}{100^2}$.
6. 1) 1; 2) 6; 3) 0.
7. 1) $41^2 = 1681$; 2) $92^2 = 8464$; 3) 255 025.
8. 1) $59^2 = 3\,481$; 2) $88^2 = 7\,744$;
3) $298^2 = 88\,804$.
9. 1) 1 225; 2) 2 025; 3) 3 025; 4) 4 225;
5) 5 625.
10. 1) 4 400; 2) 13 200; 3) 56.25.
11. 1) 2 499; 2) 9 996; 3) 22 496.
12. $\frac{1}{80}$.
13. $\frac{40}{63}$.
14. $\frac{20}{7}$.
15. 5.29.
16. $\frac{16}{25}$.
17. 1) $\frac{1}{16}p^2 + 32pq + 36q^2$;
2) $0.25a^2 - 0.4ab + 0.16b^2$;
3) $\left(\frac{7}{3}m - \frac{3}{2}n\right)^2 = \frac{49}{9}m^2 - 7mn + \frac{9}{4}n^2$.
18. $-2a^2 + b^2$.
19. a^2 .
20. $4y^2$.
21. 400.
22. 49.
23. 10 000.
25. 1) 4; 2) 1; 3) $x^2 + y^2$ je djeljivo s 5, ostatak je 0.
26. 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 2; 5) 6.
27. $a = 17, b = 13$.

28. $a = 26, b = 24$.

35. $-3 < x < 3$, te je $x \in \{-2, 1, 0, 1, 2\}$.

36. 1) $x_1 = -3, x_2 = 4$; 2) $x = -1$;
3) $x_1 = 3, x_2 = -6$; 4) $x = 1$.

37. 1) $x = 2$; 2) $x = 2$.

TABLICA KVADRATA BROJEVA 11–90

n	n^2	n	n^2	n	n^2	n	n^2
11	121	31	961	51	2601	71	5041
12	144	32	1024	52	2704	72	5184
13	169	33	1089	53	2809	73	5329
14	196	34	1156	54	2916	74	5476
15	225	35	1225	55	3025	75	5625
16	256	36	1296	56	3136	76	5776
17	289	37	1369	57	3249	77	5929
18	324	38	1444	58	3364	78	6084
19	361	39	1521	59	3481	79	6241
20	400	40	1600	60	3600	80	6400
21	441	41	1681	61	3721	81	6561
22	484	42	1764	62	3844	82	6724
23	529	43	1849	63	3969	83	6889
24	576	44	1936	64	4096	84	7056
25	625	45	2025	65	4225	85	7225
26	676	46	2116	66	4356	86	7396
27	729	47	2209	67	4489	87	7569
28	784	48	2304	68	4624	88	7744
29	841	49	2401	69	4761	89	7921
30	900	50	2500	70	4900	90	8100