

PRVI DIO

CILJEVI I ZADACI NASTAVE MATEMATIKE

MATERIJALNI ZADACI

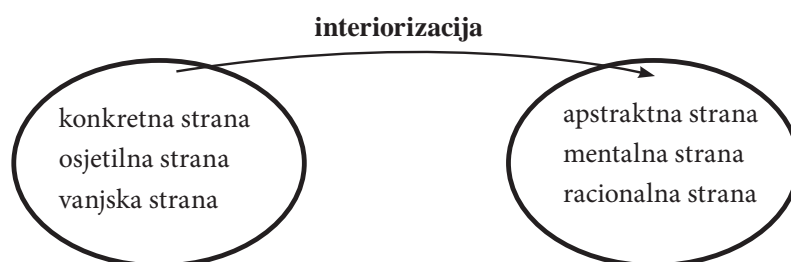
Materijalni ciljevi i zadaci matematičkog obrazovanja nastave matematike u osnovnoj školi proizlaze iz nastavnog programa. Ostvarivanjem pojedinih **materijalnih zadataka** u nastavi matematike realiziramo nastavni program..

Ostvarivanjem nastavnog programa matematike učenici stječu znanja iz osnovne matematičke pismenosti. Može se reći da učenici uče matematičku pismenost tako da svladavaju (uče) **matematički jezik** (jezik matematike). Učenje matematičkog jezika sastoji se u učenju **matematičkih pojmova**, **matematičkog nazivlja** (jezika matematičkog nazivlja) i **matematičkih znakova** (jezika matematičkih znakova).

Matematički pojmovi

Matematički su pojmovi svi odreda apstraktni, odnosno dostupni samo razumu. Ne možemo ih vidjeti, čuti, dodirnuti ili na bilo koji način osjetiti. **Jezikom matematičkih pojmova** ne možemo komunicirati, jer je to **unutarnji jezik (jezik u sebi)**. Matematički pojmovi u drugom razredu su: pojam dužine, pojam množenja, pojam dijeljenja, pojam broja 21, pojam broja 22, stranica kvadrata itd. Svi su ti pojmovi apstraktni, dostupni samo racionalnoj sferi (razumu) i upravo je u tome težina učenja matematičkih pojmova. Imajući u vidu da djeca te dobi nemaju razvijenu sposobnost apstrakcije, radi uspješnog ostvarivanja materijalnog zadatka nastave u dijelu koji se odnosi na usvajanje matematičkih pojmova, polazište mora biti u **sferi konkretnosti (materijalna strana, vanjska strana, osjetilna strana)**. Učenici u dobi od 7 do 11 godina nalaze se u konkretno–operativnom stadiju razvoja, odnosno znaju misliti samo ako je to mišljenje potkrijepljeno nečim konkretnim. Taj se period približno podudara s periodom dobi učenika prvih pet razreda osnovne škole.

U izgradnji nekog matematičkog pojma, koji je uvijek apstraktan, moramo poći, kao što je rečeno, od konkretnog (sl. 1). Taj proces transformacije od vanjske radnje (konkretnog) do unutarnje radnje (misaone radnje) u psihologiji se zove **interiorizacija (pounutrašnjivanje)**, a to je proces koji dugo traje.

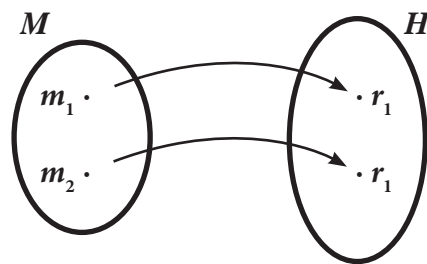


Sl. 1.

U skladu s tim, želimo li u učenikovoju svijesti izgraditi pojam glavnog (kardinalnoga) broja, polazimo od konkretnih skupova. Manipuliranjem skupovima učenici zapažaju da je broj količinsko svojstvo skupa i da broj ne ovisi o kakvoći elemenata skupa; nije važno jesu li ti elementi veliki, mali, tvrdi, metalni, zvučni, tekući itd. Svi skupovi koji su međusobno ekvivalentni imaju istu brojnost elemenata, tj. imaju isti kardinalni broj. Slična je situacija i s ostalim matematičkim pojmovima. Njihovo formiranje počinje u konkretnoj sferi, a završava u misaonoj sferi.

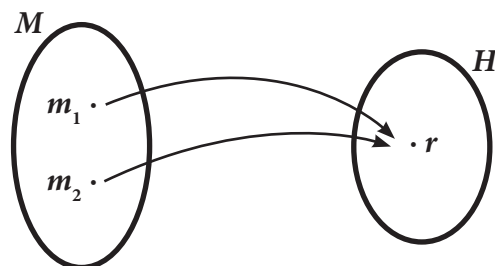
Jezik matematičkog nazivlja

Kao što je već navedeno, jezikom matematičkih pojmova ne možemo komunicirati jer je to unutarnji jezik (jezik u sebi). Za razliku od toga **jezikom matematičkog nazivlja** (**matematičkih termina**) možemo komunicirati, izgovorenu riječ možemo čuti, napisanu riječ možemo vidjeti. Dakle, jezikom matematičkog nazivlja možemo komunicirati i preko osjetila sluha (audiokomponenta) i preko osjetila vida (videokomponenta). Postoje različiti govorni jezici, a u hrvatskim je školama u službenoj uporabi hrvatski jezik. Da bismo o matematičkim pojmovima mogli komunicirati na hrvatskom jeziku, moramo imati za te pojmove i odgovarajuće nazive na tom jeziku. Idealno bi bilo da je između skupa matematičkih pojmova M i skupa hrvatskih riječi H uspostavljeno **injektivno preslikavanje**, tj. takvo preslikavanje (pridruživanje) koje različitim matematičkim pojmovima pridružuje i različite hrvatske riječi (sl. 2).



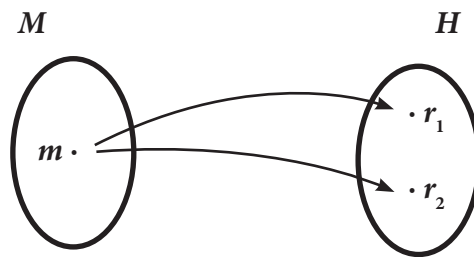
Sl. 2.

Na sl. 2 prikazana su dva matematička pojma: m_1 i m_2 iz skupa M matematičkih pojmova. Njima su pridružene dvije riječi, r_1 i r_2 iz skupa hrvatskih riječi H . Takvo je preslikavanje injektivno preslikavanje (različiti se elementi preslikavaju u različite elemente). Ono je dobro jer omogućuje jasnu komunikaciju o matematičkim pojmovima m_1 i m_2 preko riječi r_1 i r_2 . Kada kažemo riječ r_1 , tada mislimo na pojam m_1 i onaj komu je upućena riječ r_1 točno zna na koji se matematički pojam ta riječ odnosi.



Sl. 3.

Na sl. 3 dva se elementa m_1 i m_2 iz skupa matematičkih pojmova M preslikavaju u isti element r iz skupa hrvatskih riječi H . Takvo preslikavanje nije injektivno (različiti elementi m_1 i m_2 preslikavaju se u isti element r). U ovom slučaju komuniciranje riječju r je dvosmisleno, ona se može shvatiti i kao pojam m_1 i kao pojam m_2 .



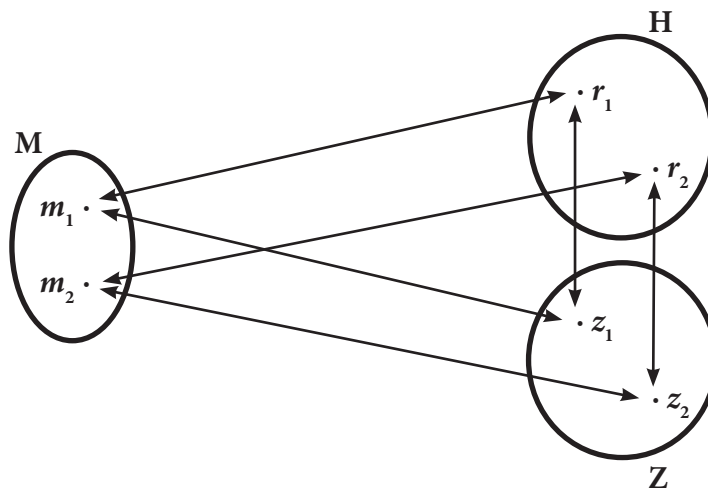
Sl. 4.

Na sl. 4 se matematički pojam m preslikava u dvije različite riječi, r_1 i r_2 . Za takve riječi (r_1 i r_2), koje predstavljaju nazivlje istih pojmova općenito kažemo da su sinonimi (riječi istog značenja). Takav način preslikavanja matematičkih pojmova (M) u skup hrvatskih riječi (H) nije najbolje rješenje jer riječima ne postupamo ekonomično. Najbolje preslikavanje skupa M u skup H je injektivno preslikavanje.

Jezik matematičkih znakova

Da bismo mogli dobro komunicirati u nastavi matematike **jezikom matematičkih znakova** u vezi s matematičkim pojmovima, za svaki matematički pojam moramo imati određeni matematički znak. To preslikavanje matematičkih pojmova iz skupa M u skup matematičkih znakova Z mora biti injekcija, tj. različiti matematički pojmovi moraju se preslikavati u različite matematičke znakove.

Uspostavom injektivnih preslikavanja iz skupa M u H i iz skupa M u Z (sl. 5) ujedno je uspostavljeno i injektivno preslikavanje iz skupa Z u skup H i obratno, iz skupa H u skup Z . Injektivno preslikavanje iz Z u H pridružuje različitim znakovima iz skupa Z različito nazivlje iz skupa H , a injektivno preslikavanje iz skupa H u skup Z pridružuje različitim riječima (terminima, nazivima) različite znakove (oznake).



Sl. 5.

U nastavi matematike susrećemo znakove za brojeve (znamenke, brojke), znakove za računске operacije, znakove za relacije itd. Prednost jezika matematičkih znakova pred jezikom matematičkog nazivlja jest njegova internacionalnost; njega podjednako razumiju Hrvat, Englez, Nijemac, Slovenac, Francuz itd. No, jezik matematičkih znakova ima i jednu drugu veliku prednost, a to je da se mnogi

problemi, kada se prevedu na jezik matematičkih znakova, mogu riješiti mnogo jednostavnije nego kada su zadani jezikom matematičkog nazivlja (retorički, verbalno).

Zapis " $3 \cdot 2 = 6$ " napisan je jezikom matematičkih znakova i sastoji se od pet matematičkih znakova. Napisan na hrvatskom jeziku glasi: "Tri više dva jednako je šest". Pojedini matematičkim znakovima: 3, \cdot , 2, =, i 6, odgovaraju hrvatski nazivi: *tri*, *puta*, *dva*, *jednako je* i *šest*.

Redosljed učenja pojedinih matematičkih jezika u početnoj nastavi matematike mora biti takav da se prvo uči matematički pojam, a tek onda se za taj pojam uvodi nazivlje i znak. Ne smije se prijeći na učenje matematičkog nazivlja, a da se nije usvojio odgovarajući pojam. Znanje matematičkog termina bez odgovarajućeg matematičkog pojma možemo usporediti s orahovom ljuskom bez jezgre (praznom ljuskom).

B) FUNKCIONALNI (FORMALNI) ZADACI NASTAVE MATEMATIKE

Ostvarivanjem materijalnih zadataka u nastavi matematike u učenika se mogu razvijati i neke sposobnosti kao što su mišljenje, pažnja i pamćenje. Sposobnost mišljenja (zaključivanja) vrlo je važna funkcija. Samo poznavanje nastavne građe (materije, činjenica) predviđene nastavnim programom ne znači i sposobnost snalaženja u različitim životnim situacijama. Uzmimo kao primjer dvije osobe koje poznaju iste dvije činjenice, tj. usvojile su isto nastavno gradivo. Ako prva osoba iz tih dviju činjenica ne zna ništa više zaključiti, a druga ima i sposobnost da iz tih dviju činjenica mišljenjem zaključi da vrijedi i treća činjenica, iz novih triju činjenica da vrijedi i četvrta itd., očito je da druga osoba posjeduje mnogo veće znanje od prve.

Ovaj drugi zadatak nastave (razvijanje sposobnosti) naziva se **funkcionalnim** ili **formalnim** zadatkom nastave. Tom zadatku u nastavi matematike treba posvetiti mnogo pažnje. Od učenika osnovne škole treba uvijek zahtijevati da na određen način obrazlože svoje tvrdnje govornim jezikom ili jezikom matematičkih znakova. Iza svih takvih učenikovih obrazloženja (zaključivanja) uvijek stoje njegove misli. Stalnom prisutnošću mišljenja u nastavi matematike osnovne škole mozak se "brusi", a to znači da se u učenika neprekidno razvija funkcija mišljenja. Primjerice, ako učenik u drugom razredu zna da je $9 \cdot 2 = 18$ i pravilo da se umnožak ne mijenja ako faktori zamijene mjesta, mišljenjem može zaključiti da je onda i $2 \cdot 9 = 18$.

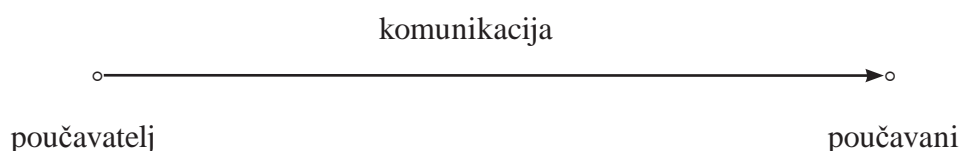
C) ODGOJNI ZADACI NASTAVE MATEMATIKE

U nekim didaktikama se materijalni i funkcionalni zadaci jednim imenom zovu obrazovni zadaci. Nastava matematike je nastavni predmet preko kojeg se učenici matematički odgajaju i obrazuju. No, do sada smo govorili o matematičkom obrazovanju, odnosno o obrazovnim (materijalnim i funkcionalnim) ciljevima i zadacima. Matematika je nastavni predmet u čijem se programu nalaze isključivo obrazovni zadaci, ali se kroz usvajanje tih sadržaja učenici i odgajaju. Savladavanjem matematičkog gradiva tog predmeta (matematičkim obrazovanjem) učenici se i odgajaju. Matematičkim obrazovanjem u učenika se i te kako razvijaju neke pozitivne osobine ličnosti, kao što su upornost, preciznost, istinoljubivost, ekonomičnost, točnost, urednost, pravednost i slično. Dakle, iako je matematika ponajprije obrazovni predmet, učitelj će na satu matematike i te kako nastojati odgojno djelovati da učenici budu uredni, da se lijepo ponašaju, da budu precizni u crtanju, da budu ekonomični s vremenom i prostorom itd.

NAČINI KOMUNICIRANJA U POČETNOJ NASTAVI MATEMATIKE

U didaktičkoj literaturi se spominje didaktički trokut, koji čine učenik, učitelj i nastavno gradivo. U početnoj nastavi matematike didaktički bi trokut trebalo proširiti za još jedan element, a to je komuniciranje. Bez bilo kojeg od navedenih elemenata (faktora) nema nastave.

U nastavnom procesu učitelj je poučavatelj, a učenik poučavani. Poučavatelj (učitelj) posjeduje matematička znanja koja treba prenijeti na poučavanog (učenika). Da bi došlo do prijenosa znanja (transfera znanja) od poučavatelja do poučavanog, mora postojati komuniciranje (sl. 1.).

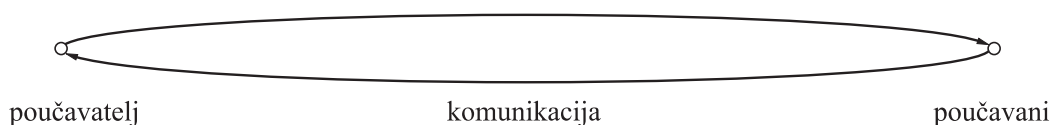


Sl. 1.

Bez komuniciranja nema poučavanja. Da bi poučavatelj mogao poučavanom poslati informaciju, on je sam mora posjedovati. Zatim, tu informaciju (poruku) mora prevesti kodiranjem na jezik komuniciranja preko kojeg poučavani može primiti poruku i koju nakon dekodiranja može razumjeti. Nakon što učenik primi informaciju, on mora na njoj raditi. Učenik ne usvaja informacije u obliku u kakvom ih prima, nego ih radom, svojom aktivnošću preoblikuje (prerađuje, transformira) u skladu sa svojim predznanjem i tek tako transformirane usvaja. Glavni zadatak učitelja je zaposliti i aktivirati učenike nakon što ispredaje izvjesno nastavno gradivo. Dakle, kako ističu neki didaktičari, znanje se ne može darivati, nego se mora radom zaraditi. Jedan od osnovnih zadataka u početnoj nastavi matematike je aktivirati učenike. Oni trebaju stalno biti uposljeni, tj. neprekidno moraju računati, crtati, jednom riječju stalno rješavati matematičke zadatke.

Da bi učitelj uposlio učenika, mora mu na jednom od jezika prenijeti informaciju (poruku), mora mu nešto objasniti (ispredavati). Jezik kao sredstvo komuniciranja između učitelja i učenika, mora biti učeniku razumljiv. U početnoj nastavi matematike mogu se koristiti razni jezici. To može biti: **izvorna stvarnost**, **modeli**, **jezik slike**, **govorni jezik** ili jezik **matematičkih znakova**. U praksi se prilikom obrade pojedinog nastavnog gradiva (pojedinih matematičkog pojma) ne koristi samo jedan jezik za komuniciranje, nego više njih, jer svi učenici ne preferiraju isti jezik.

U komunikaciji između poučavatelja (učitelja) i poučavanih (učenika) dobro je uspostaviti dvosmjerno komuniciranje, tj. komuniciranje između poučavatelja i poučavanog, ali i obratno, između poučavanog i poučavatelja (sl. 2.)



Sl. 2.

U dvosmjernom komuniciranju poučavani može postavljati pitanja o onome što ne zna (ne razumije) kako bi dobio dopunsku informaciju, a poučavatelj dobiva informaciju o poučenosti poučavanog.

Koristeći dvosmjerno komuniciranje poučavani i poučavatelj postaju ravnopravniji, a nastava demokratičnija.

Za vrijeme nastave komunikacija se ne odvija samo između učenika i učitelja, jer treba dozvoliti i komunikaciju između učenika i učenika. Kod komunikacije između učenika i učenika jedan učenik je uvijek poučavatelj, a drugi poučavani.

IZVORNA STVARNOST (I)

Izvorna stvarnost (realni svijet, materijalni svijet, objektivna stvarnost, priroda, okolina) u početnoj se nastavi matematike koristi kao izvor znanja. Smatramo da priroda šalje poruke (informacije) onome koji je promatra. To komuniciranje je jednosmjerno, od prirode k čovjeku. Ta činjenica koristi se u početnoj nastavi matematike kao izvor znanja prilikom obrade pojedinog matematičkog pojma.

Kako je matematika znanost koja opisuje realni svijet, ona je i nastala na temelju promatranja realnog svijeta. To treba vrijediti i za matematičke pojmove koji se nalaze u programima početne nastave matematike. Njihovo formiranje kod učenika nižih razreda osnovne škole treba proizaći iz promatranja realne stvarnosti (realnog svijeta, prirode).

MODELI (M)

Nastavna sredstva kao izvor znanja predstavljaju didaktički oblikovanu stvarnost. U početnoj nastavi matematike koriste se nastavna sredstva (didaktički materijal) kao što su: štapići, kartončići, modeli geometrijskih likova, modeli geometrijskih tijela i sl. Uz pomoć didaktičkog materijala nastava matematike postaje zorna, a zornost nastave matematike je uvjet za njezinu uspješnost u drugom razredu osnovne škole, jer učenici tog uzrasta mogu uspješno usvajati matematičke sadržaje samo na nivou konkretnosti.

Model je za razliku od prirodnih izvora znanja umjetni izvor znanja. Jezik modela, za razliku od jezika izvorne stvarnosti, ima daleko manje smetnji. U njemu su na neki način istaknuta neka bitna svojstva matematičkog pojma koji je predstavljen tim modelom. Modeli su materijalizirani matematički pojmovi pristupačni našim osjetilima. Nalaze se u sferi konkretnosti za razliku od matematičkih pojmova koji pripadaju sferi apstraktnosti.

JEZIK SLIKE (S)

Jezik slike (slikovno pismo) sastoji se od slika. Istraživanja pokazuju da je jezik slike nastao prije jezika znaka. U svom povijesnom razvoju najprije je postojalo slikovno pismo, zatim slogovno i na kraju glasovno (abecedno). Slikovno pismo je pojmovno pismo.

Danas se slikovno pismo (jezik slike) koristi u prometu. Prometni znaci daju vozačima poruke pomoću slika. Jezik slike na prometnim znacima može pročitati pripadnik bilo kojeg naroda.

Čovjek prima informacije preko svojih osjetila. Mnogi smatraju da najveći dio tih informacija stiže preko osjetila vida. Slike, dijagrami, grafikoni i crteži olakšavaju shvaćanje matematičkih pojmova. Svaki novi matematički pojam koji se nalazi u drugom razredu, trebao bi se na izvjestan način prikazati jezikom slike. Slike imaju dvojaku ulogu, s jedne strane pomažu razumijevanju pojedinih matematičkih pojmova, a s druge strane pomažu njihovo zapamćivanje.

Informacije o matematičkim pojmovima učenici, osim iz izvorne stvarnosti (I) i modela (M), dobivaju velikim dijelom i iz slika. Matematičke pojmove kao što su pojedini brojevi učenicima prikazujemo slikovnim jezikom, a oni tim slikama pridružuju broj njihovih elemenata.

Često se kaže da neka slika predstavlja crtu ili neki drugi matematički pojam, što zapravo nije istina. Slika određenog matematičkog pojma je zapravo model tog matematičkog pojma. To je nešto konkretno, dostupno osjetilu vida. Učenicima drugog razreda za nacrtanu crtu, geometrijski lik ili geometrijsko tijelo dovoljno je reći samo da je to crta (ne model crte), geometrijski lik, odnosno geometrijsko tijelo.

GOVORNI JEZIK (G)

Govor je sredstvo komuniciranja među ljudima. Ljudski govor je jezik – govorni jezik (prirodni jezik).

Postoji jezik pojedinca i jezik kolektiva. Među kolektivne jezike spada između ostalog: jezik kojim govore stanovnici nekog kraja, pripadnici nekog plemena ili naroda, ljudi određene struke itd.

Jezik pojedinca

Čovjek se od čovjeka razlikuje po mnogočemu, pa tako i po govoru. Neki imaju razvijen govorni jezik, dok neki drugi imaju manje razvijen. Kolektiv svojim kolektivnim jezikom utječe na pojedinca, ali i pojedinac utječe na kolektiv. Naročito veliki utjecaj na kolektivni govorni jezik imaju pojedini pisci, umjetnici i općenito znanstvenici. Pojedinac, ma koliko se trudio da govori nekim kolektivnim jezikom, ponekad mora tražiti i vlastita rješenja. Ta vlastita rješenja i kolektiv može ponekad prihvatiti kao svoja, odnosno kao svoje norme u jeziku.

Jezik kolektiva

Najmanji kolektiv je obitelj. Djeca uče govoriti imitirajući roditelje. Na taj način uče jezik kakav se govori u obitelji. Osim utjecaja roditelja na djecu utječe i jezik uže okoline u kojoj žive i jezik zavičaja (dijalekt). Polaskom u školu pod utjecajem pisanog govornog jezika učenici će poprimiti jezik naroda kojemu pripadaju, a to je književni jezik ili standardni jezik tog naroda. Kolektivni jezik hrvatskog naroda je hrvatski književni jezik ili hrvatski standardni jezik

Ovdje treba svakako spomenuti još jedan jezik, a to je jezik struke. Matematika je struka i ima svoj stručni jezik – jezik matematičkog nazivlja i jezik matematičkog znakovlja.

Jezik matematike i jezik nastave matematike

Pojmovi “matematika” i “nastava matematike” su različiti pojmovi. Svaki od tih pojmova ima svoj stručni jezik. Pojmovi koji se nalaze u nastavnom predmetu matematike uzimaju se iz jezika pojmova matematičke znanosti, s tim da u nastavi matematike doživljavaju izvjesno preoblikovanje (prestrukturiranje).

U početnoj nastavi matematike nastavno gradivo se mora “atomizirati”. Nastava se mora odvijati u sitnim koracima. Zapravo, jezik pojmova u početnoj nastavi matematike mora se atomizirati, pa se i jezik matematičkog nazivlja mora uskladiti s usitnjavanjem pojmova.

Govor i mišljenje

Intelektualna razvijenost učenika kao dio opće psihičke razvijenosti najvažniji je element za učenje matematike.

Mišljenje je psihički proces pomoću kojeg uspostavljamo veze između pojedinih pojmova. Osobito je značajno ono mišljenje čije veze nisu dane u percepciji niti se nalaze u pamćenju (nisu dio prošlog iskustva). U nastavi matematike nemoguće je dati sve veze među matematičkim pojmovima koji se obrađuju u školi, nego se učenike osposobljava da putem mišljenja sami pronalaze sve ostale moguće veze među danim pojmovima.

Matematički pojmovi pripadaju sferi mišljenja (misaonoj sferi, umu, razumu, racionalnoj sferi, mentalnoj sferi, unutarljivoj sferi). Njih možemo samo na izvjestan način zamisliti.

Matematičko nazivlje (matematički termini) su elementi govornog jezika. Uloga govora u početnoj nastavi matematike sastoji se u tome da se govorom mogu prenositi misli, pa tako i matematički pojmovi koji spadaju u misaonu sferu. Govor se može transformirati u misao:

govor → **misao** (1).

Ali i misao se može transformirati u govor:

misao → **govor** (2).

Dakle, govor se može transformirati u misao, i obratno, misao se može transformirati u govor:

govor ↔ **misao** (3).

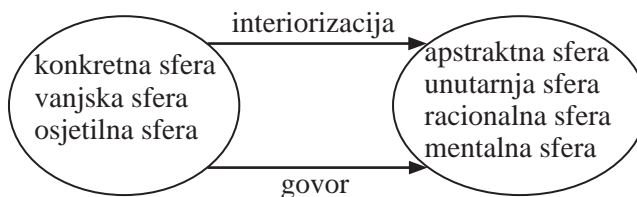
Možemo reći da su govor i misao na izvjestan način ekvivalentni. U tom smislu možemo govoriti da pomoću govora prenosimo misli. Ljudi se pomoću govora mogu sporazumijevati, mogu misaone rečenice pretvarati (transformirati) u govorne i obratno, govorne u misaone. Konstrukcije govornih i misaonih rečenica ne podliježu istim pravilima. Kod misaonih rečenica pravila su slobodnija.

Misaoni govor je govor za sebe (govor u sebi). Misaone rečenice mogu se pretvarati u rečenice usmenog i pisanog govora i obratno, rečenice usmenog i pisanog govora mogu se prevoditi u misaone rečenice.

Misaone rečenice se mogu prevoditi i u rečenice nekih drugih jezika, primjerice, u jezik matematičkih znakova. Općenito, transformiranje misli u neki jezik znakova zovemo kodiranje.

Interiorizacija

Svi matematički pojmovi nalaze se u racionalnoj sferi (mentalnoj sferi, misaonoj sferi, unutarljivoj sferi), a njihovo formiranje treba započeti u konkretnoj sferi (osjetilnoj sferi, vanjskoj sferi) (sl. 3).



Sl. 3.

Taj proces transformacije od vanjske radnje do unutarnje u psihologiji se naziva interiorizacija (pounutrašnjivanje). Put transformacije od konkretnog do apstraktnog vremenski može dugo trajati. Bitnu ulogu u toj transformaciji ima govor.

U početnoj nastavi matematike treba se služiti različitim jezicima, jer je tada veća vjerojatnost da će učenici razumjeti informaciju koju primaju. Govorni jezik treba biti prisutan u svim jezicima (jeziku izvorne stvarnosti, jeziku slike i jeziku matematičkog znakovlja).

Početna nastava matematike može se usporediti s kazališnom predstavom. U toj predstavi učitelj je često i autor teksta i glumac i redatelj. Nastava bi učenicima trebala biti zanimljiva i zabavna kako bi je sa što većom pozornošću slušali (pratili). Jer ako nema pozornosti, nema ni primanja informacija, a onda ne može doći do procesa interiorizacije (pounutrašnjavanja) vanjske radnje, tj. ne može doći do mišljenja. Ako ne dolazi do mišljenja, onda nije ostvaren materijalni zadatak u nastavi matematike.

JEZIK MATEMATIČKIH ZNAKOVA (Z)

Povijesno gledajući matematički su se znakovi počeli javljati kasno. Najprije je postojala retorička matematika (jezik matematičkog nazivlja), pa sinkopatska matematika (jezik matematičkih kratica) i tek onda su se počeli javljati matematički znakovi za pojedine matematičke pojmove. Znakovi za zbrajanje (+) i oduzimanje (–), kao što je poznato iz povijesti matematike, prvi put su upotrijebljeni u jednom djelu 1489. godine.

Jezik matematičkih znakova ima i svoju "sintaksu". Važan je poredak znakova u nekoj matematičkoj rečenici. Primjerice, rečenica " $2 \cdot x = 6$ " sastoji se od pet znakova. Ti znakovi su: 2, ·, x, = i 6. Znakovi "2" i "6" su znamenke ili brojke, "·" (puta) je znak za računsku operaciju množenja, "x" (iks) je znak za nepoznanicu (nepoznati broj) i "=" (jednako je) je znak za relaciju jednakosti. Rečenica " $2 \cdot x = 6$ " u matematici se naziva jednadžba. Jednadžba " $x \cdot 2 = 6$ " sastoji se od istih znakova kao i jednadžba " $2 \cdot x = 6$ ", ali se one razlikuju s obzirom na poredak tih znakova. Jednadžba (rečenica) " $2 \cdot 6 = x$ " također se sastoji od tih istih znakova kao i prve dvije jednadžbe. Sve tri jednadžbe razlikuju se s obzirom na redosljed znakova u njima. Prve dvije, premda imaju različite poretke znakova, su ekvivalentne, tj. imaju ista rješenja. Treća jednadžba nije s njima ekvivalentna, jer se njezino rješenje razlikuje od rješenja prvih dviju.

Jezik znakova ne koriste sve znanosti, dok, primjerice, jezik nazivlja (termina) koriste. Jezik matematičkih znakova je pogodan za rješavanje mnogih problema. Ako neki problem prevedemo na jezik matematičkih znakova, tj. na nekakav matematički model i ako je poznata metoda za rješavanje tog matematičkog modela, onda je i taj polazni matematički problem moguće riješiti. Prevođenje nekog problema na jezik matematičkih znakova zove se još i matematičko modeliranje.

Ako jezik izvorne stvarnosti označimo slovom **I**, jezik modela slovom **M**, jezik slike slovom **S**, govorni jezik slovom **G** i jezik matematičkih znakova slovom **Z**, onda se može govoriti o sustavu **I – M – S – G – Z**. U nastavi matematike služimo se sustavom **I – M – S – G – Z**, tj. prilikom obrade pojedinog matematičkog pojma služimo se izvornom stvarnošću, modelima, slikama, govorom i matematičkim znakovima.

HIBRIDNI JEZICI U POČETNOJ NASTAVI MATEMATIKE

Svladavanjem nastavnog programa matematike u nižim razredima osnovne škole, učenici se osposobljavaju u osnovnoj matematičkoj pismenosti koja obuhvaća tri matematička jezika: jezik

matematičkih pojmova, jezik matematičkog nazivlja i jezik matematičkog znakovlja.

Jezik matematičkih pojmova pripada mišljenju (misaonoj sferi), to je nijemi jezik (jezik u sebi). Rečenice tog jezika (misaone rečenice) ne podliježu istim pravilima kojima podliježe jezik matematičkog nazivlja, tj. ne podliježu pravilima gramatike.

Jezik matematičkog znakovlja ima svoja stroga pravila. S njegovim upoznavanjem učenici polaze od početka jer oni taj jezik ne znaju. Kod učenika ga treba strpljivo i temeljito izgrađivati od samog početka, jer je to jezik koji je pogodan za rješavanje mnogih problema bitnih za kvalitetniji život čovjeka.

Usmeni govorni jezik učenici razumiju i znaju se njime u izvjesnoj mjeri služiti i prije dolaska u školu. Pisani govorni jezik ne znaju. Taj će jezik tek učiti tijekom svog školovanja. Već tijekom prvog razreda nauče čitati i pisati sva slova, tako da u izvjesnoj mjeri znaju čitati i pisati rečenice standardnog govora.

Jezik izvorne stvarnosti i jezik modela učenicima su bliski, oni ih razumiju. To isto vrijedi i za jezik slike, tako da se tim jezicima možemo i trebamo služiti u početnoj nastavi matematike.







Da bi se učenici mogli matematički obrazovati, do njih moraju dolaziti matematičke informacije i oni na njima moraju raditi. Da bi od nekog izvora (učitelj, izvorna stvarnost, slika, tekst, itd.) do učenika dolazile informacije, mora postojati nekakav jezik koji će služiti kao sredstvo za prijenos tih informacija (transfer znanja). Nije bitno je li to neki čisti jezik sa strogim pravilima, kakav je, primjerice, jezik matematičkih znakova, nego je bitno da učenici primaju informacije pa makar i preko nekog hibridnog jezika.

Hibridni jezik je svaki onaj jezik koji je nastao miješanjem dvaju ili više jezika. Primjerice, hibridni jezik možemo dobiti kombinacijom jezika slike i jezika matematičkih znakova, jezika slike i pisanog govornog jezika, jezika matematičkih znakova i pisanog govornog jezika itd.

Hibridni jezik je, primjerice, i jezik koji nastaje miješanjem nekog govornog jezika i jezika geste. Jezik geste je vrlo bogat jezik, ima isto toliko različitih znakova kao i neki razvijen govorni jezik riječi.

U hibridnom jeziku svaka riječ (znak, slika, pokret) zadržava svoje značenje kakvo je imala i u jeziku iz kojeg je uzeta. Da bi se donekle shvatila uloga hibridnog jezika u početnoj nastavi matematike, najbolje je navesti nekoliko zadataka, kao primjera napisanih hibridnim jezicima.

Zadaci :

1. Ivica je kupio  i . Platilo je pet kuna. Ana je kupila  i  i platila 3 kune. Koliko stoji , a koliko  ?

Ovaj zadatak je zadan hibridnim jezikom koji je mješavina pisanog jezika i jezika slike. Slike su uključene umjesto pojedinih riječi. Ovaj bi zadatak za učenike nižih razreda osnovne škole mogao predstavljati problem. Međutim, njega je relativno lako riješiti ako ga prevedemo na hibridni jezik koji predstavlja mješavinu slike i jezika matematičkih znakova.

$$\text{pencil} + \text{eraser} = 5 \text{ kn} \quad (1)$$

$$\text{✎} + \text{gumica} = 3 \text{ kn} \quad (2)$$

Hibridne jednađbe (1) i (2) predstavljaju sustav od dviju hibridnih jednađbi s dvjema nepoznanicama. Nepoznanice su cijena olovke i cijena gumice.

Budući da dvije olovke i gumica stoje 5 kn, a olovka i gumica 3 kn, zaključujemo da sama olovka stoji 2 kn.

$$\text{✎} = 2 \text{ kn}$$

Ako olovka (= 2 kn) i gumica stoje 3 kn, onda sama gumica stoji 1 kn.

$$\text{gumica} = 1 \text{ kn}$$

2. Cigla i pola cigle stoje jednu kunu i pola cigle. Koliko stoji jedna cigla?

Ovaj zadatak je zadan pisanim jezikom. Za njegovo rješavanje podesan je jezik matematičkih znakova. Budući da učenici nižih razreda osnovne škole ne uče teoriju linearnih jednađbi, najjednostavnije je da se rješavanje ovog zadatka (i njemu sličnih) sprovede na hibridnom jeziku koji je mješavina jezika slike i jezika matematičkih znakova.

$$\text{cigla} + \text{pola cigle} = 1 \text{ kn} + \text{pola cigle} \quad (1)$$

Na lijevoj strani hibridne jednađbe (1) nalazi se cigla i pola cigle, a na desnoj 1 kn i pola cigle. Učenici intuitivno prihvaćaju činjenicu da će jednakost ostati sačuvana ako u jednakosti (jednađbi) (1) oduzmemo lijevoj i desnoj strani jednako, primjerice, pola cigle.

$$\text{cigla} = 1 \text{ kn} \quad (2)$$

Iz jednakosti (jednađbe) (2) neposredno čitamo da cigla stoji jednu kunu.

Rješavanje zadataka zadanih hibridnim jezikom pokreće učenikovo mišljenje, a samim tim ga i razvija. Već je ranije bilo govora o važnosti izgradnje jezika matematičkih pojmova u početnoj nastavi matematike. U matematičke pojmove svakako spada i ono što mnogi nazivaju matematičko mišljenje, koje je dio općeg pojma mišljenja. Mišljenje i govor su u uskoj vezi, jer govor pokreće mišljenje. Da bi se mišljenje pokrenulo, često je potrebna riječ, slika, znak, pokret i sl., a to se može postići raznim jezicima pa i hibridnim.