1 Djeljivost

Računanje na prste

1.1. Djeljivost. Prosti brojevi

Količnik dvaju prirodnih brojeva nije uvijek prirodni broj. Tako na primjer, broj $\frac{54}{8}$ nije prirodan, jer 54 *nije djeljiv s* 8. Broj $\frac{221}{13}$ jest prirodan, jer 221 *jest djeljiv* s 13.

Djeljivost prirodnih brojeva

Kažemo da je prirodni broj b **djeljiv** prirodnim brojem a ako postoji prirodni broj k takav da je

$$b = k \cdot a.$$

Govorimo još da a dijeli b i pišemo

$$a \mid b.$$

Za broj a kažemo da je **djelitelj** ili **mjera** broja b. Broj b naziva se **višekratnik** broja a.

Primjer 1.

Neka je $b = 15$. Mjere broja b su prirodni brojevi 1, 3, 5, 15. Broj 15 višekratnik je broja 3. Skup svih višekratnika broja 3 je

$$\{3, 6, 9, \ldots\} = \{n : n = 3k, k \in \mathbf{N}\}.$$

Skup svih višekratnika broja 5 je

$$\{5,\ 10,\ 15, \ldots\} = \{n : n = 5k,\ k \in \mathbf{N}\}.$$

Pravila djeljivosti s nekoliko početnih prirodnih brojeva poznajemo iz osnovne škole.

Pravila djeljivosti

Za prirodni broj $N = a_n a_{n-1} \cdots a_3 a_2 a_1$ vrijedi:

1) N je djeljiv s 2 ako i samo ako je paran,

2) N je djeljiv s 3 ako i samo ako je zbroj njegovih znamenaka $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1$ djeljiv s 3,

3) N je djeljiv sa 4 ako i samo ako je dvoznamenkasti završetak $a_2 a_1$ djeljiv sa 4,

4) N je djeljiv s 5 ako i samo ako je $a_1 = 0$ ili 5,

5) N je djeljiv s 8 ako i samo ako je troznamenkasti završetak $a_3a_2a_1$ djeljiv s 8,

6) N je djeljiv s 9 ako i samo ako je zbroj njegovih znamenaka $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1$ djeljiv s 9.

Zadatak 1. S kojim brojevima manjim od 10 su djeljivi sljedeći prirodni brojevi: 1160, 1164, 1395, 1908, 13832?

Prosti brojevi

Svaki je prirodni broj djeljiv s 1 i sa samim sobom. Tako je, na primjer, broj 11 djeljiv s 1 i s 11. On nema nijednog drugog djelitelja u skupu prirodnih brojeva. Za njega kažemo da je **prost** ili **prim** broj. Broj 6 djeljiv je s 1 i sa 6, ali isto tako je djeljiv s 2 i s 3. On nije prost.

Prosti brojevi

Prirodni broj $n > 1$ je **prost** (ili **prim**) broj ako je djeljiv samo s 1 i sa samim sobom. Inače je broj **složen**.

Broj 1 ne smatramo ni prostim ni složenim.

Neposrednom provjerom uvjerit ćemo se da su sljedeći brojevi prosti: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Svi drugi brojevi manji od 20: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18 su složeni.

Kako ćemo utvrditi je li neki broj prost ili nije?

Primjer 2. Je li broj 91 prost ili složen?

Ako je složen, onda je djeljiv nekim prirodnim brojem manjim od sebe.
Je li 91 djeljiv s 2? Nije, jer nije paran.
Je li 91 djeljiv s 3? Ne.
Je li 91 djeljiv sa 4? Nije, *jer nije djeljiv s* 2, *pa ne može biti djeljiv ni sa 4.*
Je li 91 djeljiv s 5? Ne.
Je li 91 djeljiv sa 6? Nije, jer nije djeljiv s 2 (ni s 3).
Je li 91 djeljiv sa 7? Jest! Vrijedi $91 = 7 \cdot 13$, pa je on složen broj.

Pogledamo li još jednom postupak proveden u prethodnom primjeru, primijetit ćemo da je bilo dovoljno razmotriti *je li* 91 *djeljiv prostim brojevima*. Nije bilo nužno provjeriti je li broj djeljiv sa 4 ili 6, zato što od prije znamo da nije djeljiv s 2.

Primjer 3.

Je li 359 prost ili složen?

Da to utvrdimo, promotrit ćemo je li on djeljiv nekim prostim brojem. Dijelimo ga redom s 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 i vidimo da nije djeljiv ni s jednim od njih. Trebamo li dijeliti dalje? Ne!

Ako je prirodni broj n složen, tada za njega vrijedi

$$n = n_1 \cdot n_2,$$

pri čemu su prirodni brojevi n_1 i n_2 djelitelji (faktori) broja n, različiti od 1 i n. Možemo pretpostaviti da je $n_1 \leqslant n_2$. Onda vrijedi

$$n_1^2 \leqslant n_1 \cdot n_2 = n$$

pa mora biti $n_1 \leqslant \sqrt{n}$. Dakle, *najveći djelitelj složenog broja* n *nikad ne premašuje* $\sqrt{n}$.

Ako je 359 složen, onda on ima djelitelj koji ne premašuje $\sqrt{359} = 18.94$. Zato je bilo dovoljno provjeriti je li taj broj djeljiv s prostim brojevima od 2 do 17. Zaključak: 359 je prost.

Kriterij pronalaženja prostog broja

Prirodni broj n je prost ako i samo ako nije djeljiv nijednim prostim brojem koji je manji ili jednak od $\sqrt{n}$.

Kutak plus

PROSTI BROJEVI

U knjizi "*Tablice i formule: matematika, fizika, astronomija, kemija*" dan je popis prvih 3480 prostih brojeva (od 2 do 32 423). Ako je $\pi(n)$ broj prostih brojeva koji nisu veći od n, onda je $\pi(1000) = 168$, $\pi(10000) = 1\,229$, $\pi(10^5) = 9\,592$, $\pi(10^6) = 78\,498$, $\pi(10^7) = 664\,579$, $\pi(10^8) = 5\,761\,455$, $\pi(10^9) = 50\,847\,534$, $\pi(10^{10}) = 455\,052\,512$.

Najveći danas poznati prosti brojevi su oblika $2^m - 1$ (Merssenovi brojevi), za $m = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, \ldots, 756839$ (227 832 znamenke), 859 433 (258 716 znamenaka), 1 257 787 (378 632 znamenke), 1 398 269 (420 921 znamenka), 2 976 221 (895 932 znamenke), 3 021 377 (909 526 znamenaka), 6 972 593 (2 098 960 znamenaka).

Na internetskoj stranici **www.element.hr** možete pronaći tablicu prvih 100 000 prostih brojeva (od 2 do 1 299 709) te linkove do stranica s najnovijim otkrićima u vezi s prostim brojevima.

Faktorizacija prirodnog broja

Broj 234 nije prost, jer je paran pa je djeljiv s 2:

$$234 = 2 \cdot 117.$$

Je li 117 prost? Ne, jer mu je zbroj znamenaka djeljiv s 3, pa je i broj djeljiv s 3. Vrijedi $117 = 3 \cdot 39$. Tako imamo

$$234 = 2 \cdot 3 \cdot 39.$$

Možemo li ovaj postupak nastaviti? Da, jer 39 nije prost, on je ponovo djeljiv s 3: $39 = 3 \cdot 13$. Sad je

$$234 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13.$$

U ovom smo trenutku broj 234 rastavili na *umnožak prostih faktora*. Kažemo da smo ga *faktorizirali*.

Kutak *plus*

NEKE ZANIMLJIVOSTI I NERIJEŠENI PROBLEMI IZ TEORIJE BROJEVA

Teorija brojeva uglavnom se smatra najljepšim dijelom matematike. Ni u jednom drugom području nije moguće postaviti tako jednostavan i razumljiv problem na koji nitko ne zna odgovor!

Savršeni brojevi. Broj koji je jednak zbroju svih svojih djelitelja koji su manji od njega nazivamo savršenim. Tako je na primjer 6 savršen broj jer je $6 = 1 + 2 + 3$. Savršen je i 28, jer je $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Algoritam za nalaženje parnih savršenih brojeva dao je još Euklid prije 2500 godina: “Računamo sume $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$. Ako je zbroj prost, pomnožimo ga s posljednjim pribrojnikom i dobivamo savršeni broj. Tako su, na primjer, savršeni sljedeći brojevi:

$$1 + 2 = 3, \quad 3 \cdot 2 = 6$$
$$1 + 2 + 4 = 7, \quad 7 \cdot 4 = 28$$
$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31, \quad 31 \cdot 16 = 496$$
$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127, \quad 127 \cdot 64 = 8\,128$$

Oni su bili poznati još starim Grcima.

Danas je poznato dvadesetak savršenih brojeva. Svi su oni parni i oblika $(2^m - 1)2^{m-1}$, pri čemu je $2^m - 1$ prost (Merssenov broj), kako je i Euklid sugerirao.

Ne zna se postoji li ijedan neparan savršen broj.

Goldbachova hipoteza. “Svaki paran broj veći od 2 može se prikazati kao zbroj dvaju prostih brojeva.” Ova je tvrdnja dobila ime po njemačkom matematičaru S. Goldbachu (1690.–1764.). *Do današnjeg dana nije dokazana ni opovrgnuta*.

Prosti brojevi blizanci. Dva uzastopna neparna broja koja su prosta nazivaju se *blizanci*. Tako su blizanci 3 i 5, 5 i 7, 11 i 13, 17 i 19, 29 i 31 itd. *Ne zna se ima li beskonačno mnogo takvih blizanaca.*

Svaki se složeni prirodni broj može na ovaj način napisati kao *umnožak nekoliko prostih brojeva.* Prosti broj ima samo jedan prosti faktor, jer je djeljiv samo s 1 i sa samim sobom.

Faktorizacija prirodnog broja

Svaki se prirodni broj $n > 1$ može napisati u obliku

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k,$$

pri čemu su $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_k$ prosti brojevi.

Primjer 4.

Faktorizirajmo broj 5460.

Već na prvi pogled vidimo da je on djeljiv s 10, pa su 2 i 5 sigurno dva njegova prosta faktora. Preostale ćemo potražiti na opisani način. Čitav postupak pišemo u obliku tablice:

$$\begin{array}{r|r} 5460 & 5 \\ 1092 & 2 \\ 546 & 2 \\ 273 & 3 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \end{array}$$

S desne strane okomite crte izdvojeni su prepoznati prosti faktori zadanog broja. Na primjer, broj je djeljiv s 5 i 2 (jer je djeljiv s 10), izdvajamo prosti faktor 5 i izvršimo dijeljenje. S dobivenim količnikom nastavljamo faktorizaciju dok se u posljednjem koraku ne dobije prost broj.

Dakle, vrijedi

$$5460 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13.$$

Eratostenovo sito

Sve proste brojeve manje od neke zadane granice možemo dobiti na učinkovitiji način, korištenjem **Eratostenovog sita**.

Napišimo redom sve prirodne brojeve, recimo, do broja 100. Prvi je prosti broj 2. Prekrižimo sada svaki sljedeći koji je djeljiv s 2 (oni nisu prosti, jer su djeljivi s 2). Prvi sljedeći koji nije prekrižen je prost, to je broj 3. Zatim prekrižimo sve višekratnike od 3 (koji nisu prekriženi već prije toga). Nastavimo postupak na isti način, sa sljedećim prostim brojem, 5.

Kad prekrižimo sve višekratnike broja 7, ostat će nam na papiru neprekriženi svi prosti brojevi manji od 100 i postupak je već gotov!

Taj ćemo postupak prikazati u sljedećim tablicama. Radi bolje preglednosti novoprekrižene brojeve označit ćemo i sivom bojom.

Višekratnici broja 2

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Višekratnici broja 3

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Višekratnici broja 5

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Višekratnici broja 7

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Brojevi koji su preostali u ovoj tablici su svi prosti brojevi manji od 100:

	2	3	5	7	
11		13		17	19
		23			29
31				37	
41		43		47	
		53			59
61				67	
71		73			79
		83			89
				97	

Kutak *plus*

TABLICA PROSTIH BROJEVA MANJIH OD 1000.

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181	191	193	197
199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359	367	373	379
383	389	397	401	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541	547	557	563	569	571
577	587	593	599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743	751	757	761
769	773	787	797	809	811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977
983	991	997												

Djeljivost u skupu cijelih brojeva

Na jednak način kao i u skupu prirodnih brojeva možemo definirati i djeljivost u skupu cijelih brojeva: Cijeli broj b djeljiv je cijelim brojem a (različitim od nule) ako postoji cijeli broj k takav da je $b = ka$.

Primjer 5.

Broj 15 djeljiv je prirodnim brojevima 1, 3, 5 i 15. Isto tako, djeljiv je i s -1, -3, -5 i -15:

$$-5 \mid 15 \quad \text{jer} \quad 15 = (-3) \cdot (-5).$$

Skup svih djelitelja broja 15 je

$$\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}.$$

Ako tražimo sve djelitelje nekog prirodnog broja, vidimo da je dovoljno pronaći one koji su prirodni brojevi.

Slično tome, skup svih djelitelja broja -18 je

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}.$$

Prema definiciji djeljivosti, 0 je djeljiva svakim cijelim brojem različitim od nule. Naime, za svaki cijeli broj a vrijedi

$$a \mid 0 \quad \text{jer} \quad 0 = 0 \cdot a.$$

U različitim zadacima često moramo utvrditi je li zbroj ili razlika dvaju cijelih brojeva djeljiva trećim brojem. O tome govori sljedeći poučak.

Djeljivost zbroja i razlike

1) Ako su cijeli brojevi a i b djeljivi cijelim brojem c, tada su sa c djeljivi i njihov zbroj $a + b$ i njihova razlika $a - b$;

2) ako je a djeljiv, a b nije djeljiv brojem c, onda zbroj $a+b$ i razlika $a - b$ nisu djeljivi s c.

Dokažimo ovaj poučak. Pretpostavimo da su a i b djeljivi s c. Onda postoje cijeli brojevi k i l takvi da je $a = kc$ i $b = lc$. Sad je $a+b = kc+lc = (k+l)c$ pa je $a + b$ djeljiv s c. Također je $a - b = (k - l)c$ pa je i $a - b$ djeljiv s c. Time je prva tvrdnja dokazana.

Drugu ćemo tvrdnju dokazati tako da ćemo pretpostaviti da ona nije istinita. Pretpostavimo, dakle, da je $a+b$ djeljivo s c. Sad napišimo: $b = (a+b)-a$. Prema upravo dokazanoj tvrdnji, slijedilo bi da je broj b djeljiv s c, što je neistina. Zato $a + b$ nije djeljiv s c.

Na sličan način dokaži da ni $a - b$ nije djeljivo s c.

Primjer 6.

1) Parni broj oblika $4k+2$ nije djeljiv sa 4, jer je prvi pribrojnik djeljiv sa 4, a drugi nije.

2) Napišimo pet uzastopnih prirodnih brojeva: $5k$, $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$, $5k+4$. Samo jedan (prvi) djeljiv je s 5, preostali brojevi nisu, jer drugi pribrojnik nije djeljiv s 5.

Dijeljenje s ostatkom

Ako cijeli broj b nije djeljiv cijelim brojem a, tada će se u postupku dijeljenja *pojaviti ostatak.*

Podijelimo 233 s 5. Dobivamo:

$$\begin{array}{rcccc} 233 & : & 5 & = & 46 \\ 33 & & & & \\ 3 & & & & \end{array}$$

Rezultat dijeljenja zapisat ćemo ovako:

$$233 = 46 \cdot 5 + 3.$$

Količnik pri dijeljenju je 46, a ostatak 3.

Navedimo još jedan primjer. Podijelimo -376 sa 7. Dobivamo:

$$\begin{array}{rcccc} 376 & : & 7 & = & 53 \\ 26 & & & & \\ 5 & & & & \end{array}$$

Rezultat dijeljenja možemo zapisati ovako:

$$376 = 53 \cdot 7 + 4$$

pa je

$$-376 = -53 \cdot 7 - 4.$$

Količnik pri dijeljenju je -53, a ostatak -4. Želimo li da ostatak ne bude negativan, onda rezultat ovog dijeljenja možemo napisati ovako:

$$-376 = -53 \cdot 7 - 7 - 4 + 7 = -54 \cdot 7 + 3$$

Dijeljenje cijelih brojeva

Rezultat dijeljenja cijelog broja b prirodnim brojem a možemo napisati u obliku:

$$b = qa + r.$$

Cijeli broj q je **količnik** (**kvocijent**) dijeljenja, a r **ostatak** dijeljenja. Za ostatak r uvijek vrijedi $0 \leqslant r < |a|$.

Dokažimo ovaj važni poučak. Promotrimo niz cijelih brojeva

$$\ldots, b-2a, b-a, b, b+a, b+2a, \ldots$$

Izaberimo među njima najmanji nenegativni broj, neka je to $b - qa$ i označimo ga s r. Time smo dobili

$$b - qa = r$$

i pritom je $r < a$. U suprotnom, kad bi bilo $r > a$, tada $a - qb$ ne bi bio najmanji nenegativni broj u gornjem nizu: $b - qa - a = b - (q+1)a$ bi još uvijek bio nenegativan.

Time smo pokazali da brojevi q i r postoje. Dokažimo još i jedinstvenost ovog prikaza.

Pretpostavimo da postoje dva međusobno različita prikaza:

$$b = q_1 a + r_1 = q_2 a + r_2.$$

Tada bi bilo

$$(q_2 - q_1)a = r_1 - r_2.$$

Odavde čitamo: a dijeli razliku $r_1 - r_2$. Kako su i r_1 i r_2 manji od a, to je moguće samo onda ako je $r_1 - r_2 = 0$, tj. $r_1 = r_2$. U tom slučaju dobivamo $q_1 = q_2$.

Uočimo: ako je ostatak r jednak nuli, onda je $b = qa$, pa je prema definiciji djeljivosti b djeljiv s a.

Primjer 7.

Neka je, na primjer, $a = 3$. Onda se svaki cijeli broj b može napisati u obliku $b = 3q$, ili $b = 3q + 1$, ili $b = 3q + 2$. Time se skup cijelih brojeva raspada na tri disjunktna podskupa

$$A_0 = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\},$$
$$A_1 = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\},$$
$$A_2 = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}.$$

U svaki podskup ulaze oni cijeli brojevi koji pri dijeljenju s 3 daju isti ostatak. Očito je:

$$\mathbf{Z} = A_0 \cup A_1 \cup A_2.$$

Kutak plus

DIJELJENJE CIJELIH BROJEVA

Kako pomoću džepnog računala možemo odrediti količnik i ostatak u postupku dijeljenja cijelih brojeva? Pogledajmo sljedeća dva primjera.

Kad se broj $b = 2090$ podijeli s $a = 403$, dobije se rezultat $5.186\cdots$. To znači da je cjelobrojni količnik q ovih dvaju brojeva jednak 5. Sad je dovoljno od 2090 oduzeti $5 \cdot 403$ da bi se dobio ostatak $r = 75$. Dakle, $2090 = 5 \cdot 403 + 75$.

Pri dijeljenju broja $b = -3126$ s $a = 47$ dobit ćemo rezultat $-66.510\cdots$. Za količnik uzimamo *prvi cijeli broj manji od ovog decimalnog broja*. To je broj $q = -67$. Ostatak je onda $r = b - qa = -3126 - (-67) \cdot 47 = 23$.

Primjer 8.

Odredimo sve cijele brojeve koji su djeljivi s 3, a pri dijeljenju s 5 daju ostatak 1.

Svi brojevi djeljivi s 3 čine skup

$$A=\{3k : k\in\mathbf{Z}\}=\{\cdots,-6,-3,0,3,6,9,12,15,18,21,24\ldots\}.$$

Svi brojevi koji pri dijeljenju s 5 daju ostatak 1 čine skup

$$B=\{5n+1 : n\in\mathbf{Z}\}=\{\cdots,-9,-4,1,6,11,16,21,26,31,36,\ldots\}.$$

Treba odrediti $A\cap B$. Tom presjeku pripada broj 6. Pripadaju mu i svi brojevi koji su veći ili manji od 6 za višekratnik broja 15. Traženi je skup:

$$A\cap B=\{\cdots,-9,6,21,36,\ldots\}=\{15m+6 : m\in Z\}.$$

Zadaci 1.1.

1. Svi troznamenkasti brojevi kojima su sve znamenke jednake djeljivi su s 37. Dokaži! Dokaži da isto vrijedi i za šesteroznamenkaste brojeve kojima su prve i posljednje tri znamenke jednake!

2. Dokaži:

1) Zbroj bilo koja tri uzastopna cijela broja djeljiv je s 3.

2) Zbroj bilo kojih pet uzastopnih cijelih brojeva djeljiv je s 5.

3) Zbroj bilo koja četiri uzastopna prirodna broja nikad nije djeljiv s 4.

Poopći ove tvrdnje!

3. Dokaži da je umnožak dvaju uzastopnih parnih prirodnih brojeva djeljiv s 8.

4. Dokaži da je umnožak triju uzastopnih prirodnih brojeva koji su djeljivi s 3 djeljiv sa 162.

5. Zamijeni zvjezdice znamenkama tako da broj $74*3*$ bude djeljiv s 36.

6. Koliko ima četveroznamenkastih brojeva djeljivih s 45, a čije su dvije srednje znamenke 41?

7. Nađi najmanji prirodni broj djeljiv s 36 u zapisu kojega se nalazi svih 10 znamenki.

8. Dokaži da je četveroznamenkasti broj oblika $abba$ djeljiv s 11.

9. Dokaži da su šesteroznamenkasti brojevi oblika $aabbcc$, $abaccb$ i $abccba$ djeljivi s 11.

10. Dokaži da je šesteroznamenkasti broj oblika $abcabc$ djeljiv sa 7, 11 i 13.

11. Dokaži da je šesteroznamenkasti broj oblika $ababab$ djeljiv sa 3, 7, 13 i 37.

— ◆ —

12. Provjeri koji je od sljedećih brojeva prost:

1) tvoj redni broj u imeniku;

2) godina tvojeg rođenja;

3) tvoj kućni broj;

4) telefonski broj tvoje obitelji.

13. Brojevi 23 i 29 su uzastopni prosti brojevi. Između njih je pet složenih brojeva. Odredi prva dva uzastopna prosta broja između kojih je sedam složenih brojeva.

14. Kojom znamenkom završava umnožak prvih 100 prostih brojeva?

15. Odredi proste brojeve a i b za koje je $a+b=91$.

16. Provjeri, pomoću tablice prostih brojeva manjih od 100, da je Goldbachova hipoteza istinita za parne brojeve manje od 100. Koji među tim brojevima ima najviše različitih prikaza?

17. Može li zbroj četiri uzastopna prirodna broja biti prost broj?

18. Koji je najveći troznamenkasti prosti broj?

19. Koji prirodni brojevi imaju točno tri prirodna djelitelja?

— ◆ —

20. Zapiši općenito:

1) prirodni broj koji je višekratnik broja 5;

2) prirodni broj koji pri dijeljenju s 3 daje ostatak 2;

3) prirodni broj koji pri dijeljenju sa 7 daje ostatak 1.

21. Koji su prirodni brojevi dani sljedećim zapisima, u kojima je n bilo koji prirodni broj:
1) $3n$; **2)** $15n$; **3)** $5n+1$; **4)** $4n-1$?

22. Odredi najmanji troznamenkasti prirodni broj koji pri dijeljenju s 8 daje ostatak 1.

23. Odredi najveći troznamenkasti broj koji pri dijeljenju s 5 daje ostatak 2.