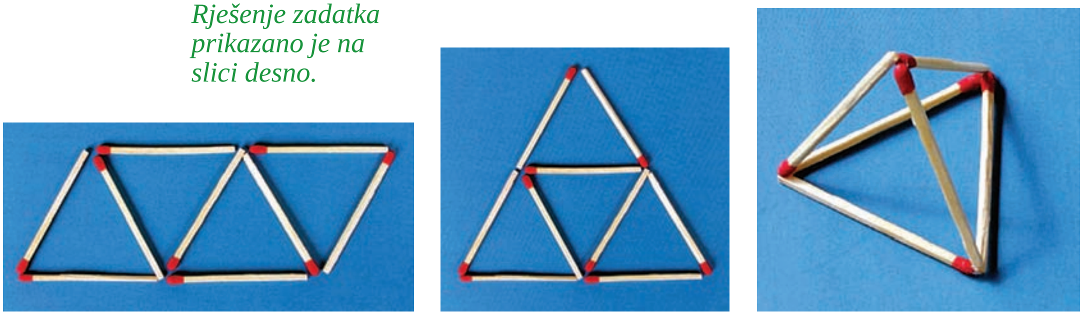
6 Geometrija prostora

Geometrijski nas oblici prate na svakom koraku.
Ova je ura lijepi primjer poliedra.

Od šest šibica bez njihovog lomljenja složite četiri jednakostranična trokuta.

Zadatak za nekog zamišljenog stanovnika ravnine uoće nije rješiv. Kako god slagao, uvijek će mu trebati devet šibica. No za onoga tko živi u prostoru triju dimenzija, nema problema.
Rješenje zadatka prikazano je na slici desno.



Ovaj zadatak uvodi nas u geometriju prostora.

Do sada smo se u srednjoj školi bavili uglavnom planimetrijom, geometrijom ravnine. Uputimo se sada iz ravnine u prostor. To će za nas možda biti i od veće praktične koristi, jer je prostor u kojem čovjek živi prostor triju dimenzija. Ili ga barem on tako doživljava.

Na osnovi svojih opažanja i praktičnih iskustava čovjek je izgradio apstraktnu sliku tog prostora - geometriju prostora. Ta geometrija opisuje našu prirodnu lokalnu okolinu i u potpunosti je usklađena s našim iskustvima i praktičnim potrebama.

A je li naše prirodno okruženje uistinu takvo? Postoje li i prostori s više dimenzija? Kako takvi prostori izgledaju, kako ih zamisliti? Kako ih zorno predočiti? Ta pitanja mogu samo zbuniti prosječnog stanovnika ovog planeta, a za njegov svakodnevni život zapravo i nisu bitna.

6.1. Točke, pravci i ravnine

Aksiomi geometrije prostora

Točka, pravac i ravnina **osnovni su pojmovi** geometrije prostora i oni se ne definiraju. Umjesto definicije njihova svojstva opisujemo **aksiomima**, tvrdnjama koje se ne dokazuju, već se prihvaćaju kao točne bez dvojbe. Aksiomi geometrije prostora uvažavaju i izriču osnovne i očite činjenice i oni su temelj na kojem se gradi geometrija prostora.

Teoremi su tvrdnje koje se moraju dokazati. Pri njihovom dokazu pozivamo se na aksiome ili već prethodno dokazane teoreme.

Izdvojimo nekoliko aksioma koji opisuju neka osnovna svojstva točaka, pravaca i ravnina.

Aksiomi geometrije prostora

A_1) Kroz dvije različite točke prolazi točno jedan pravac.

A_2) Kroz tri točke koje ne leže na jednom pravcu prolazi točno jedna ravnina.

A_3) Pravac koji prolazi kroz dvije različite točke ravnine leži u toj ravnini.

A_4) Ako dvije različite ravnine imaju zajedničku točku, onda se sijeku u pravcu.

A_5) Kroz svaku točku može se povući točno jedna paralela sa zadanim pravcem.

Određenost pravca i određenost ravnine

Pravac je jednoznačno određen dvjema svojim točkama. O tome govori Aksiom 1.

Za točke koje pripadaju jednom pravcu kažemo da su **kolinearne**.

Ravnina je zadana ili određena trima točkama koje ne leže na jednom pravcu, nisu kolinearne. Tvrdnja je sadržaj Aksioma 2.

Za točke koje leže u jednoj ravnini kažemo da su **komplanarne**. Tri nekolinearne točke uvijek su komplanarne. A četiri po volji odabrane točke prostora (ili više njih) općenito nisu komplanarne.

Ravninu, međutim, možemo zadati na više načina.

Određenost ravnine

Ravnina može biti zadana:

1) trima točkama koje ne leže na jednom pravcu;

2) pravcem i točkom koja ne leži na njemu;

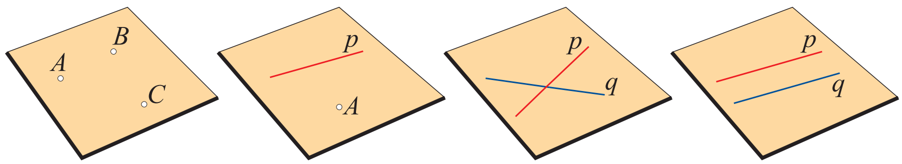
3) dvama pravcima koji se sijeku;

4) dvama paralelnim pravcima koji se ne podudaraju.

Opišimo svaku od tih situacija.

1. Tvrdnja je sadržaj aksioma A_2.

2. Ako su zadani pravac p i točka A izvan tog pravca, tad postoji točno jedna ravnina koja ih sadrži. Do toga dolazimo ovako: uzmemo dvije točke, B i C s pravca. Po aksiomu A_2 postoji samo jedna ravnina koja prolazi točkama A, B i C. Kako B i C leže na pravcu, po aksiomu A_3 i čitav pravac p leži u ravnini.



Načini zadavanja ravnine.

3. Neka su p i q pravci koji se sijeku. Uzmimo točku $A = p \cap q$ te točke B s pravca p i C s pravca q, različite od A. Postoji samo jedna ravnina koja je određena tim točkama. Ona sadrži i pravac p i pravac q jer sadrži dvije njihove točke.

Ovaj slučaj možemo iskazati i na sljedeći način: ako se dva pravca u prostoru sijeku, tada postoji ravnina koja ih sadrži.

4. Dva paralelna pravca *po definiciji paralelnosti* leže u ravnini. Jasno je da je ta ravnina jednoznačno određena jer je jednoznačno određena trima točkama, dvjema s prvog i trećom s drugog pravca.

Pravci u ravnini

Dva pravca, p i q u ravnini mogu biti u trima različitim položajima:

1) pravci se podudaraju;

2) pravci se sijeku, ali nisu istovjetni;

3) pravci se ne sijeku.

Jedna od ovih situacija mora se dogoditi, a one se međusobno isključuju.

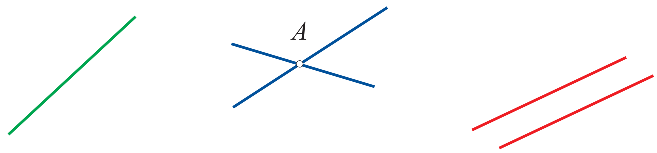
1. Prva će se situacija zbiti, na primjer, ako oba pravca prolaze kroz dvije istovjetne točke. Ako se pravci p i q podudaraju, onda pišemo: $p = q$.

2. Pokažimo da je presjek dvaju pravaca točno jedna točka. Time iskazujemo novu tvrdnju koju treba dokazati:

Teorem. Dva pravca koja nisu identična, a sijeku se, imaju samo jednu presječnu točku.

Dokaz. Označimo pravce s p i q, a presječnu točku s A. Ako bi postojala još jedna presječna točka B, tada bi točke A i B pripadale pravcima p i q. Međutim, po *aksiomu* A_1 postoji točno jedan pravac koji sadrži dvije zadane točke. Zato mora biti $p = q$, što je suprotno pretpostavci. Dakle, ne postoji druga presječna točka. Time je teorem dokazan.

Ako se pravci p i q sijeku u točki A, onda pišemo: $p \cap q = A$. Govorimo još da su pravci p i q **ukršteni**.



$p=q$ $\qquad$ $p \cap q = A$ $\qquad$ $p \| q$

3. Mnoga svojstva dvaju pravaca koji se ne sijeku slična su svojstvima podudarnih pravaca. Zato ćemo uvesti novi pojam, *paralelnost* pravaca, koji će obuhvatiti obje situacije.

Definicija. Za dva pravca koja leže u istoj ravnini kažemo da su **paralelna** ako se podudaraju ili se ne sijeku.

Pišemo: $p \| q$.

Položaj pravaca u ravnini

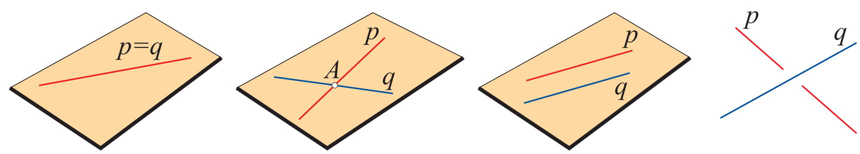
Dva su pravca u ravnini ili paralelna ili se sijeku u jednoj točki. Pritom paralelnost uključuje i slučaj istovjetnih pravaca. Kad kažemo da se dva pravca sijeku, tad isključujemo mogućnost da se podudaraju.

Pravci u prostoru

Pravci u prostoru mogu biti u sljedećim položajima:

1) pravci leže u istoj ravnini;

2) pravci ne leže u istoj ravnini.



$p=q$ $\quad$ $p\cap q=A$ $\quad$ $p\,||\,q$

Položaj pravaca u prostoru.

1. Položaj pravaca koji leže u istoj ravnini već smo opisali: mogu se sjeći ili biti paralelni. Zapamtimo sljedeću definiciju:

Paralelnost pravaca u prostoru

Dva su pravca paralelna ako leže u istoj ravnini i ne sijeku se.

2. Ako pravci ne leže u istoj ravnini, tada za njihov položaj imamo poseban naziv:

Mimoilaznost pravaca

Dva su pravca **mimoilazna** ako ne leže u istoj ravnini.

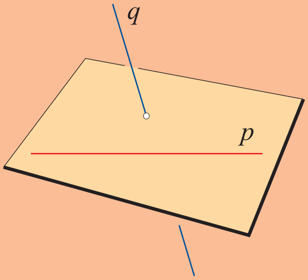
Zapamtimo: dva pravca ne mogu biti paralelna ako ne leže u istoj ravnini, jer su tad mimoilazna. Mimoilaznost i paralelnost međusobno se isključuju.

O položaju dvaju pravaca koji se sijeku ili su paralelni imamo jasan geometrijski zor jer se ta situacija zbiva u jednoj ravnini. S mimoilaznim pravcima nije takav slučaj. Mimoilazne pravce možemo lako uočiti u našem trodimenzionalnom prostoru; međutim kad trodimenzionalne slike predočavamo crtežom u ravnini, potrebno je puno vježbe da bi se točno uočio njihov položaj.

Korisno je poznavati jednostavan kriterij za mimoilaznost. On slijedi iz same definicije, ali pomaže kako bi se lakše uočila mimoilaznost pravaca.

Kriterij mimoilaznosti pravaca

Ako jedan pravac leži u ravnini, a drugi pravac siječe tu ravninu u jednoj točki koja ne pripada prvom pravcu, onda su oni mimoilazni.



U koliko se točaka sijeku ova četiri pravca? Naravno, odgovor je: ni u jednoj. Ti su pravci mimosmjerni ili mimoilazni.

Mimoilaznost se često ostvaruje u prometu raznim nadvožnjacima ili podvožnjacima.

Možeš li i sam navesti neki sličan primjer?

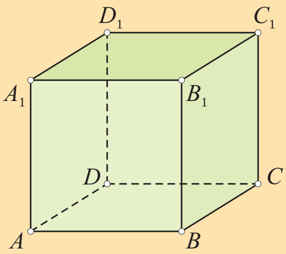
Primjer 1.

Nacrtajmo kocku i označimo njezine vrhove. Možemo zaključiti:

pravci AC_1 i BD_1 se sijeku,

pravci AC i A_1C_1 su paralelni,

pravci BB_1 i AC su mimoilazni.



Zadatak 1. Promotri crtež kocke. Koje su od sljedećih tvrdnji točne:

1) Pravci BD_1 i CC_1 su paralelni.

2) Pravci AA_1 i i CD_1 se sijeku.

3) Pravci AD_1 i BC_1 su mimosmjerni.

4) Pravci BD i A_1C_1 su paralelni.

5) Pravci BD_1 i A_1C se sijeku.

Pravac i ravnina u prostoru

Izdvojimo tri moguće situacije; one se ponovno međusobno isključuju, a jedna od njih mora se dogoditi:

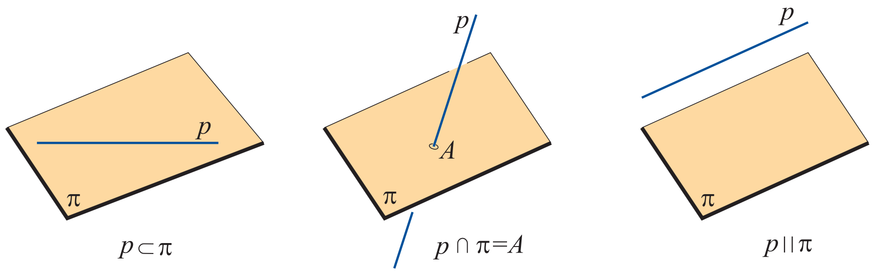
1) pravac leži u ravnini;

2) pravac i ravnina se sijeku, pri čemu pravac ne leži u ravnini;

3) pravac i ravnina nemaju presječnih točaka.

1. Da pravac leži u ravnini, zapisujemo na sljedeći način: $p \subset \pi$.

2. Pokažimo da pravac p i ravnina π, ako se sijeku, mogu imati *samo jednu* presječnu točku. Neka pravac siječe ravninu u točki A. Ako bi osim u točki A pravac sjekao ravninu i u točki B, tada bi po aksiomu A_3 on cijeli ležao u ravnini. Dakle, u ovom je slučaju $p \cap \pi = A$. Točka A naziva se **sjecište** ili **probodište** pravca i ravnine.



Međusobni položaj pravca i ravnine.

3. Ako pak pravac i ravnina nemaju presječnih točaka, tada kažemo da su oni **paralelni** i pišemo: $p \parallel \pi$. Kao i u odnosima između pravaca, držat ćemo da je pravac koji leži u ravnini paralelan s njom.

Pravac i ravnina u prostoru

Pravac i ravnina su ili paralelni ili se sijeku u jednoj točki. Pritom paralelnost uključuje i slučaj kad pravac leži u ravnini.

Zadatak 2. Neka je dana kocka kao u zadatku 1. Provjeri točnost sljedećih tvrdnji.

1) Pravac CD paralelan je s ravninom A_1BB_1.

2) Pravac BD_1 pripada ravnini A_1BC.

3) Pravac AC_1 siječe ravninu BB_1D_1.

Dvije ravnine

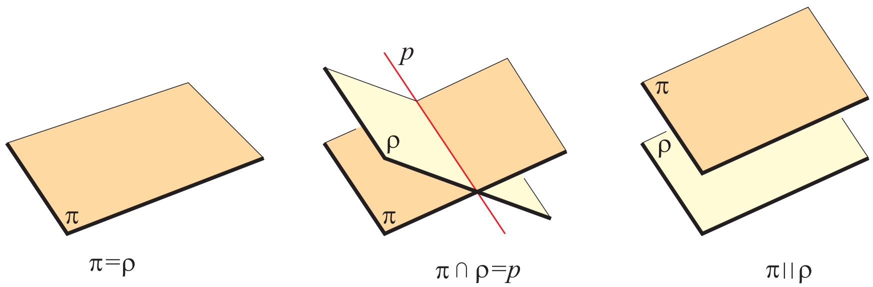
Izdvojimo ponovno sve moguće položaje:

1) dvije se ravnine podudaraju;

2) dvije se ravnine sijeku;

3) dvije ravnine nemaju presjek.

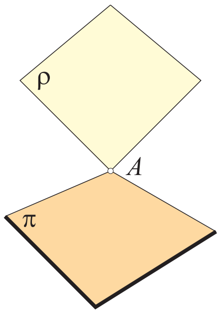
1. Prvi će se slučaj dogoditi, na primjer, kad ravnine π i ρ imaju tri zajedničke nekolinearne točke, jer će se onda podudarati, po aksiomu A_2.



Međusobni položaj dviju ravnina.

2. Po aksiomu A_4 dvije ravnine koje imaju zajedničkih točaka, a nisu podudarne sijeku se po pravcu.

Presjek dviju ravnina. Po aksiomu A_4 presjek dviju ravnina mora biti pravac. Ovo je svojstvo ravnina povezano s dimenzijom prostora. Kada bi naš prostor bio četiri-dimenzionalan umjesto trodimenzionalan, tada bi se dvije ravnine mogle sjeći samo u jednoj točki!



3. Ako su dvije ravnine istovjetne ili se ne sijeku, za njih kažemo da su **paralelne** (**usporedne**) i pišemo: $\pi \parallel \rho$.

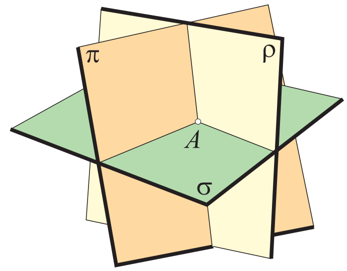
Dvije ravnine

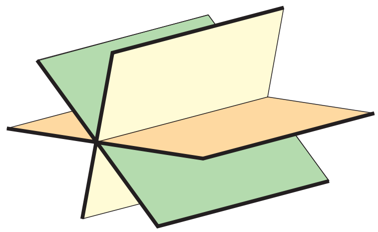
Dvije ravnine mogu biti ili paralelne ili je njihov presjek pravac. Pritom paralelnost uključuje slučaj kad su ravnine istovjetne, a u protivnom se ravnine *sijeku* po pravcu.

Tri ravnine

Opišimo u kakvu međusobnom položaju mogu biti tri različite ravnine u prostoru.

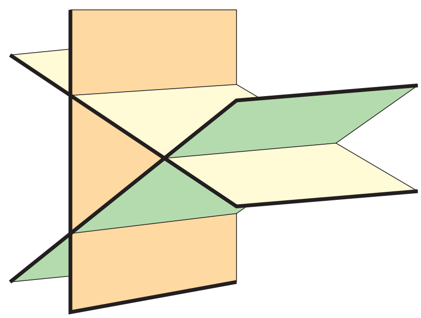
Opći položaj triju ravnina. Svake dvije ravnine sijeku se duž jednog pravca, a sve tri ravnine imaju jednu zajedničku točku.

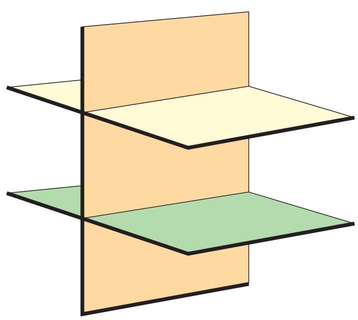




Tri se ravnine sijeku duž jednog pravca.

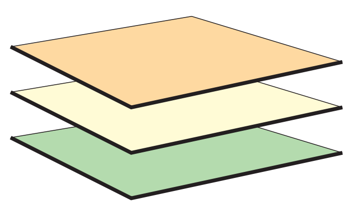
Svake se dvije ravnine sijeku duž jednog pravca. Presječni pravci su paralelni pa ne postoji presječna točka svih triju ravnina.





Dvije su ravnine paralelne. Treća ih siječe duž dvaju pravaca. Ta dva pravca moraju biti paralelna jer se ne smiju sjeći (prve se dvije ravnine ne sijeku, pa se ne sijeku niti pravci koji leže u njima).

Sve su tri ravnine paralelne.



Tri ravnine u prostoru

Tri različite ravnine u prostoru mogu biti u jednom od pet položaja:

1) postoji samo jedna točka zajednička za sve tri ravnine,

2) sijeku se duž jednog pravca,

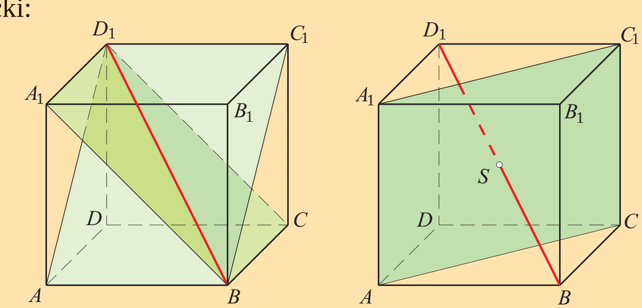
3) po dvije ravnine sijeku se u trima paralelnim pravcima,

4) dvije su ravnine paralelne, a treća ih siječe duž dvaju paralelnih pravaca,

5) sve su tri ravnine paralelne.

Primjer 2.

Tri dijagonalna presjeka kocke leže u ravninama koje se sijeku u jednoj točki:



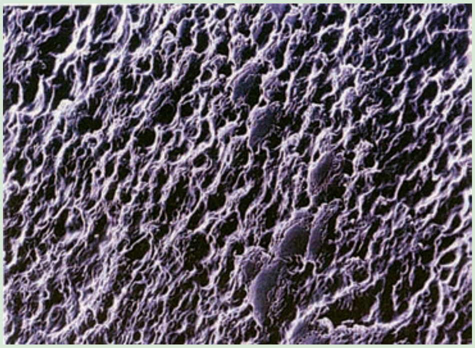
Na slici lijevo: ravnine ABC_1 i BCD_1 sijeku se u pravcu BD_1 .

Na slici desno: treću dijagonalnu ravninu ACC_1 pravac BD_1 probada u točki S .

Kutak *plus*

RAVNO KAO STAKLO

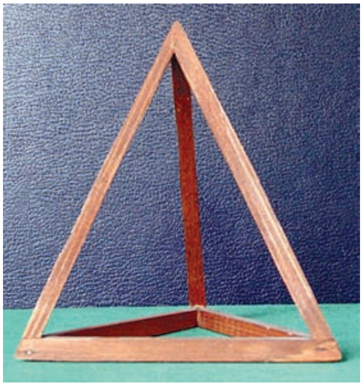
Kada želimo istaknuti kako je nešto ravno, često to uspore- dimo s ravnim, prozorskim staklom. Koliko je ono uistinu ravno, možemo vidjeti sa slike na kojoj je površina ravnog stakla uvećana 300 puta.



Tetraedar

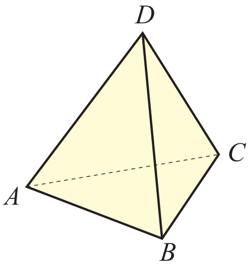
Od svih prostornih oblika možda nam je najbliža kocka. Kocka je česta igračka, od one za *Čovječe ne ljuti se* pa sve do čuvene *Rubikove kocke*. Kockom ćemo se često koristiti kako bismo zorno ilustrirali odnose pravaca i ravnina u prostoru.

No u istu svrhu rabit ćemo još jedan skladan i jednostavan prostorni lik, trostranu piramidu ili **tetraedar**.



Trokut je najmanji konveksni skup ravnine koji sadrži tri nekolinearne točke, tri točke koje nisu na jednom pravcu. U geometriji ravnine vrlo se potanko izučavaju svojstva trokuta.

Najmanji konveksan skup prostora koji sadrži četiri nekomplanarne točke, četiri točke koje nisu u jednoj ravnini jest **tetraedar** ili trostrana piramida. Naziv je složenica grčkog podrijetla: *tetra* = *četiri*, *edros* = *ploha*.



Posebice je za nas prikladan pravilni tetraedar, tetraedar čije su sve četiri strane jednakostranični trokuti.

Usporedbe trokuta i tetraedra, koje nameće već sama njihova definicija, vrlo su logične i česte. Mnoga svojstva tetraedra poopćena su svojstva trokuta. Ovakve vrste sličnosti zovemo *analogijama*, a sam postupak zaključivanja, *metoda analogije* jedan je od osnovnih postupaka u matematici.

Primjerice:

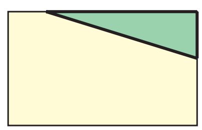
Težišnice trokuta su dužine koje spajaju vrh trokuta i polovište suprotne stranice. Težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki koja se zove **težište trokuta**. Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru $2:1$ računajući od vrha.

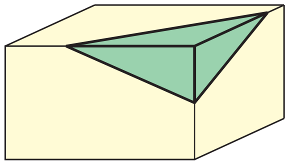
Ovom *Poučku o težištu trokuta* odgovara analogan *poučak* za tetraedar.

Težišnice tetraedra su dužine koje spajaju vrh tetraedra i težište suprotne strane. Težišnice tetraedra sijeku se u jednoj točki koja se zove **težište tetraedra**. Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru $3:1$ računajući od vrha tetraedra.

I mnogi drugi poučci o trokutu imaju svoje poopćenje za tetraedar. A uvijek pomišljamo na onaj najpopularniji, **Pitagorin poučak**. Postoji li *Pitagorin poučak za tetraedar*?

Pitagorin poučak vrijedi za svaki pravokutni trokut. A što bi to bilo *pravokutni tetraedar*? Pogledajmo malo sljedeće dvije sličice.





Presiječemo li pravcem pravokutnik tako da pravac siječe dvije njegove susjedne stranice, tako ćemo od pravokutnika odsjeći pravokutni trokut.

Pravokutniku analogan lik u prostoru jest kvadar. Presiječemo li ravninom kvadar tako da ravnina zahvaća tri brida koji imaju zajednički vrh, od kvadra će "otpasti" pravokutni tetraedar.

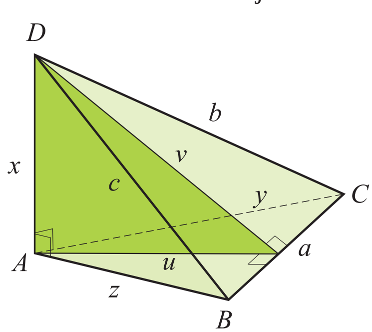
Pitagorin poučak za pravokutni trokut govori o duljinama njegovih stranica. *Pitagorin poučak* za pravokutni tetraedar govori o površini njegovih strana te vrijedi:

$$P^2 = P_a^2 + P_b^2 + P_c^2.$$

Pritom su P_a, P_b i P_c površine pravokutnih strana kojima su bridovi a, b i c hipotenuze, a P je površina najvećeg trokuta $\triangle BCD$.

Položimo tetraedar na jednu od njegovih pravokutnih strana. Tada je

$$\begin{aligned}
P^2 &= \frac{1}{4}a^2v^2 = \frac{1}{4}a^2\cdot(x^2+u^2)\\
&= \frac{1}{4}a^2u^2 + \frac{1}{4}(y^2+z^2)x^2\\
&= \frac{1}{4}a^2u^2 + \frac{1}{4}y^2x^2 + \frac{1}{4}z^2x^2\\
&= \left(\frac{1}{2}au\right)^2 + \left(\frac{1}{2}yx\right)^2 + \left(\frac{1}{2}zx\right)^2\\
&= P_a^2 + P_b^2 + P_c^2.
\end{aligned}$$

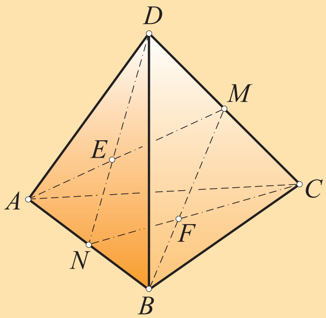


Prikazivanje trodimenzionalnih skupova točaka u ravnini

Primjer 3.

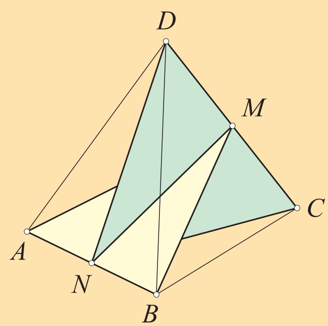
Točke M i N polovišta su bridova $\overline{CD}$ i $\overline{AB}$ pravilnog tetraedra $ABCD$. Odredimo presjek ravnina ABM i CDN.

Nacrtajmo tetraedar $ABCD$ i istaknimo ravnine ABM i CDN.



Što je njihov presjek?

Površnim promatranjem slike stječe se dojam da je to pravac EF jer je točka E tobože presjek pravaca AM i DN, a točka F pravaca BM i CN. To je, međutim, netočno. Naime, pravci BM i NC su mimoilazni, baš kao i pravci AM i DN.



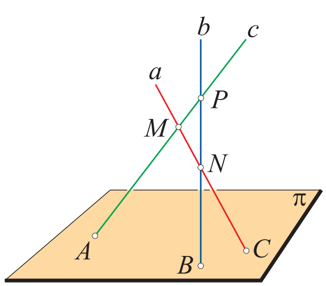
Kako točka M leži u ravnini CDN, i pravac MN mora ležati u toj ravnini. Isto tako, točka N leži u ravnini ABM pa i pravac MN leži u toj ravnini.

Dakle, pravac MN leži u objema promatranim ravninama i stoga je on njihov presjek.

Ova druga sličica svakako će ostaviti jasniji dojam o ovom rješenju.

Trodimenzionalne skupove točaka prikazujemo crtežima u ravnini i to ponekad stvara teškoće, a često može i prevariti naš zor. Evo još jednog tipičnog primjera koji to ilustrira.

Neka se pravci a, b i c sijeku po dva u točkama M, N i P i neka su A, B i C njihova probodišta s ravninom π.



Što ne valja na ovoj slici?

Na slici ne vidimo ništa dvojbeno.

Promotrimo, međutim, međusobne odnose triju pravaca. Trima točkama, M, N i P jednoznačno je određena ravnina σ (aksiom A_2). Toj ravnini pripadaju i pravci a, b i c jer ona sadrži po dvije točke svakog od njih (aksiom A_4).

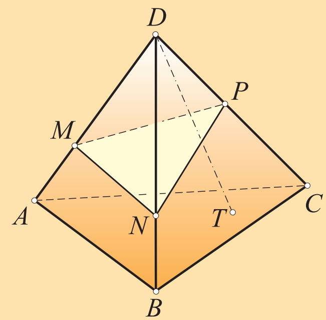
Ravnine π i σ nisu paralelne, njihov je presjek pravac (aksiom A_4).

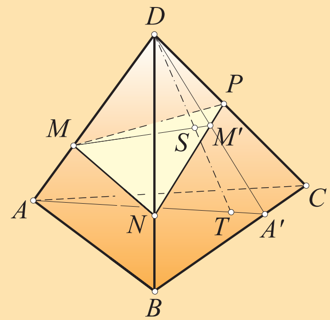
To onda znači da točke A, B i C leže na jednom pravcu.

Zadatak 3. Neka se pravci a i b sijeku u točki P. Ako pravac c siječe i pravac a i pravac b, a nije komplanaran s njima, onda on prolazi točkom P. Dokaži.

Rješenje. U suprotnom bi tri presječne točke M, N i P određivale jednu ravninu koja sadrži sva tri pravca.

Primjer 4. Na bridovima $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ tetraedra $ABCD$ uzete su redom točke M, N, P. Neka je T točka unutar trokuta ABC. U kojoj točki S pravac DT siječe ravninu MNP?

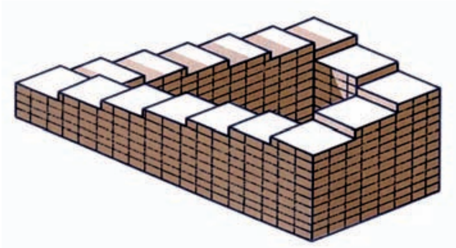




Ovaj put ‘vidimo’ da pravac siječe ravninu. Međutim, u kojoj točki? Do nje moramo doći konstrukcijom pomoćnih ravnina i pravaca.

Neka je A' presječna točka pravca AT i pravca BC, a M' presječna točka pravca DA' i NP. Zbog konstrukcije sve točke A, T, A', M, M' i D leže u istoj ravnini.

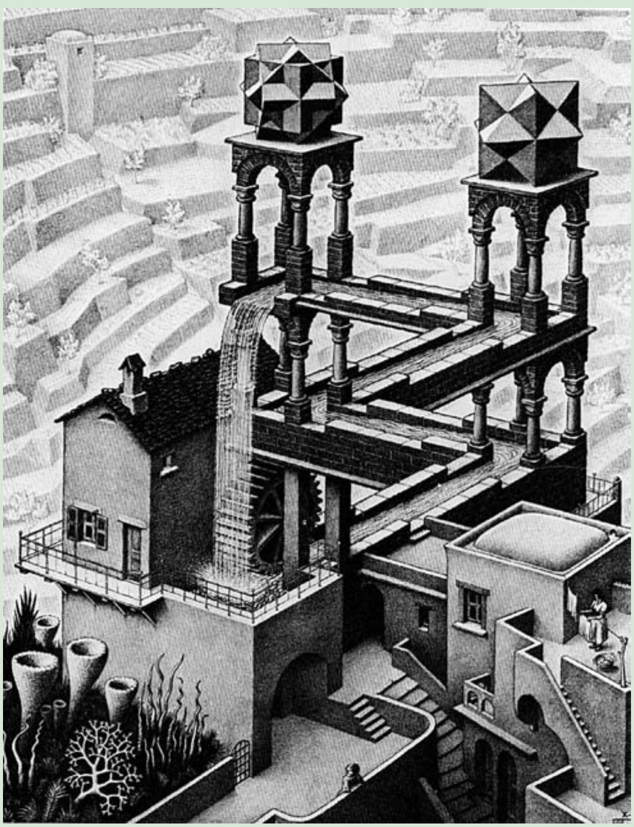
Ravnine $AA'D$ i MNP sijeku se duž pravca MM'. Znači da tražena točka S leži na presjeku pravaca MM' i DT.



Kutak *plus*

NEMOGUĆE KONSTRUKCIJE

Nesavršenosti zora i prikazivanje trodimenzionalnih objekata u ravnini omogućuju nam da uživamo u nemogućim konstrukcijama, koje se u trodimenzionalnom svijetu ne mogu ostvariti. To prekrasno ilustriraju poznate grafike nizozemskog umjetnika Mauritsa Cornelisa Eschera (1898. – 1972.).



Na gornjoj slici *Čovjek s kockom* (1958.) obratite pozornost na kocku. Takva kocka uistinu može postojati samo na slici.

Lijevo je litografija *Vodopad* iz 1961. god. Prekrasan je to primjer matematičkog *perpetuum mobilea*. Iz vodopada se voda slijeva u žlijeb koji je na istoj razini kao i najviša točka vodopada.

Zadaci 6.1.

1. Koliko različitih ravnina možemo postaviti kroz:
1) jednu točku u prostoru;
2) dvije točke u prostoru;
3) tri točke u prostoru?

2. Koliko je različitih ravnina zadano četirima nekomplanarnim točkama?

3. Koliko je različitih ravnina zadano s pet točaka od kojih nikoje četiri nisu komplanarne?

4. Zadana je ravnina π i paralelogram $ABCD$. Može li ovoj ravnini pripadati:
1) točno jedan vrh; **2)** točno dva vrha;
3) točno tri vrha paralelograma?

5. Nacrtaj kvadar $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pa istakni ravninu koja je zadana trima točkama:
1) A, C, C_1; **2)** B, C, D_1; **3)** A, C, D_1.

6. Nacrtaj kvadar te istakni ravninu koja je određena
1) točkom D_1 i pravcem BD;
2) točkom C i pravcem A_1B;
3) točkom A_1 i pravcem CC_1.

7. Nacrtaj kvadar te istakni ravninu što je određena pravcima:
1) BD_1 i A_1C; **2)** AC i AD_1; **3)** BD_1 i BC_1.

8. Nacrtaj kvadar te istakni ravninu što je određena pravcima:
1) AC i A_1C_1; **2)** AB i C_1D_1; **3)** A_1D i B_1C.

9. Kakav može biti međusobni položaj dvaju pravaca od kojih svaki leži u jednoj od dviju paralelnih ravnina?

10. Dvije ravnine koje se sijeku presječene su trećom ravninom. Mogu li dobivena dva pravca biti paralelna?

11. Ako su pravci a i b, te b i c mimoilazni, jesu li nužno i pravci a i c mimoilazni?

12. Nacrtaj kvadar $ABCDA_1B_1C_1D_1$ te istakni ravninu BCD_1. Koji od pravaca AD_1, A_1C, A_1B i A_1C_1 pripada toj ravnini?

13. Nacrtaj kvadar i istakni ravninu ABC_1. U kojem su odnosu prema toj ravnini pravci CD, BD_1, A_1C, A_1B_1?

14. Nacrtaj kvadar i istakni ravninu ACD_1. U kojem su odnosu prema toj ravnini pravci A_1B_1, A_1C_1, BC_1?

15. Nacrtaj kvadar $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Neka su P, Q i R polovišta bridova $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$ i $\overline{BB_1}$. U kojem su odnosu ravnine
1) PQR i ACC_1; **2)** PQR i A_1BC_1?

Točno-netočno pitalice

1. Ravnina je određena bilo kojim trima različitim točkama. T N

2. Dva pravca koji leže u paralelnim ravninama i sami su paralelni. T N

3. Probodišta triju pravaca koji sijeku ravninu i ne leže u njoj sijeku ravninu u trima točkama koje su vrhovi trokuta. T N

4. Četiri točke u ravnini određuju najviše šest pravaca. Pet točaka u ravnini određuju najviše 10 pravaca. T N

5. Četiri nekomplanarne točke prostora određuju četiri ravnine. T N

6. Ako su E i F polovišta bridova $\overline{AB}$ i $\overline{C_1D_1}$, a točke M i N polovišta bridova $\overline{BC}$ i $\overline{A_1D_1}$, pravci EF i MN su mimoilazni. T N

7. Ako su dani pravci a, b i c i ako je $a \parallel b$ i $b \parallel c$, onda je i $a \parallel c$. T N

8. Ako su pravci a i b mimoilazni i ako je pravac c mimoilazan sa a, tada su mimoilazni i pravci b i c. T N