10 Elipsa, hiperbola i parabola

Ovi stari drveni modeli iz jedne školske zbirke prikazuju presjek stošca.

Na naslovnoj fotografiji ovog poglavlja vidite sličice na kojima su tri stošca presječena ravninama. Rubovi ovih presjeka su krivulje, redom: elipsa, parabola i hiperbola. Nedostaje još doduše sličica na kojoj bi se kao presjek dobio krug, odnosno kružnica, krivulja koju smo detaljno izučili u prethodnom poglavlju.

Kružnica, elipsa, hiperbola i parabola su **krivulje drugog reda.** *Jednim imenom ponekad se zovu konike ili konusni presjeci, jer se mogu dobiti presijecanjem stožaste ili konusne plohe ravninom.*

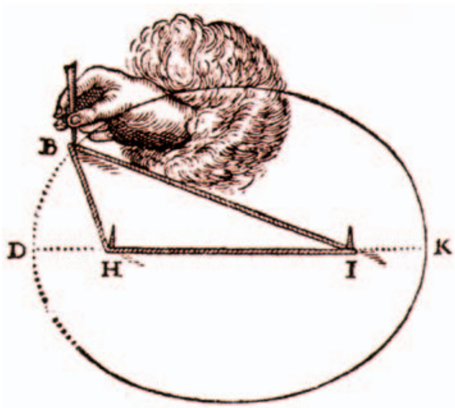
U ovom poglavlju učit ćemo o krivuljama drugog reda.

10.1. Konstrukcija i jednadžba elipse

Definicija elipse

U Descartesovoj *Dioptriji*, jednom od triju dodataka njegovu djelu *Rasprava o metodi* iz 1637. godine nailazi se i ovaj crtež. Pozorno ga promotrite, jer riječ je o crtanju elipse na temelju njezine definicije. Takvu konstrukciju i danas zovemo *vrtlarskom* jer je to najjednostavniji način crtanja elipse za praktične potrebe.

Elipsa se dobije povlačenjem olovke pri vrhu B trokuta $\triangle HIB$ danog opsega.

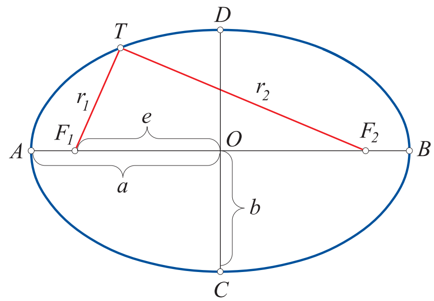


Što je elipsa?

Elipsa je skup svih točaka ravnine kojima je zbroj udaljenosti od dviju zadanih točaka uvijek isti.

Neka su zadane dvije točke, F_1 i F_2. Njihovu udaljenost označimo s $2e$:

$$|F_1F_2| = 2e.$$



Definicija elipse. Zbroj duljina radijvektora je stalan i iznosi $2a$.

Udaljenost točke T u ravnini do točaka F_1 i F_2 označimo s r_1 i r_2 :

$$r_1 = |F_1T|, q r_2 = |F_2T|.$$

Neka je a bilo koji broj veći od e.

Definicija elipse

Elipsa je skup svih točaka T ravnine za koje vrijedi

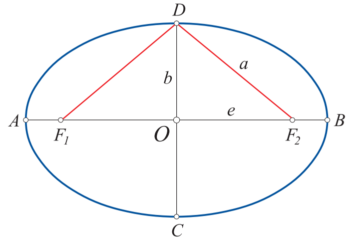
$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Točke F_1 i F_2 nazivaju se **žarišta** (**fokusi**) elipse. Polovica udaljenosti između žarišta je broj e koji nazivamo **linearni ekscentricitet** elipse. Vektore $\overrightarrow{F_1T}$ i $\overrightarrow{F_2T}$ nazivamo **radijvektorima** elipse[1]. r_1 i r_2 su, dakle, duljine radijvektora elipse. Polovište O dužine $\overline{F_1F_2}$ zovemo **središte** (**centar**) elipse.

Pravac kroz žarišta siječe elipsu u točkama A i B Dužina $\overline{AB}$ naziva se **velika os** elipse, pa su dužine $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$ **velike poluosi** elipse. Duljina velike osi je $2a$, pa je duljina velike poluosi jednaka a. Pravac koji prolazi središtem okomito na veliku os siječe elipsu u točkama C i D. Dužinu $\overline{CD}$ nazivamo **mala os**, pa su $\overline{OC}$ i $\overline{OD}$ **male poluosi** elipse. Njihove duljine označavamo s b. Točke A, B, C i D nazivaju se **tjemenima elipse**.

Za točku D vrijedi pak $|F_1D| = |F_2D|$, pa kako je zbroj ovih udaljenosti jednak $2a$, onda je $|F_2D| = a$. Iz Pitagorinog poučka za pravokutni trokut OF_2D onda je

$$a^2 - b^2 = e^2.$$



[1] Ponekad radijvektorima ne nazivamo vektore, nego dužine $\overline{F_1T}$ i $\overline{F_2T}$.

U graditeljstvu su mnogobrojni primjeri građevina kod kojih je na neki način "ubačena" elipsa. Na slici vidimo primjer građevine *Znanstvenog i svemirskog centra* u Edmontonu u Kanadi (lijevo) i *Tycho Brahe Planetariuma u Copenhagenu* (desno). Ovdje je zgodno uočiti kako je u oba slučaja elipsa dobivena presjekom valjka ravninom.

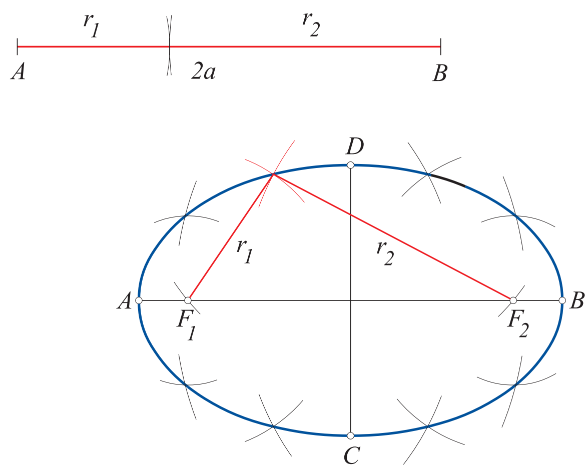
U nas je vjerojatno najpoznatija elipsa tlocrt pulske arene. No sve do nedavno nije baš bilo jasno je li on uistinu elipsa. Inžinjer geodezije Hrvoje Čuljak proveo je 2001. godine mjerenja kojima je dokazao da jest. Velika je os te elipse $2a = 131.34$ metra, a mala $2b = 104.53$ metra.

Konstrukcija elipse

Za razliku od pravca ili kružnice, za čiju konstrukciju postoje jednostavne naprave pa je dovoljno ravnalom spojiti dvije točke pravca ili šestarom opisati kružnicu kojoj su zadani središte i polumjer, elipsu ne možemo nacrtati tako brzo i spretno. Doduše, nekada su u školi postojali *krivuljari*, kakav je i ovaj na slici s kraja XIX. stoljeća. No njime se može nacrtati jedna jedina elipsa, a i to crtanje nije geometrijska konstrukcija.

Elipsu konstruiramo na temelju njezine definicije. Za konstrukciju trebaju biti zadane osi elipse ili pak jedna od osi i žarišta.

Konstruirati elipsu znači odrediti po volji mnogo njezinih točaka. Za razliku od pravca i kružnice, za čije konstrukcije postoje jednostavne naprave (ravnalo i šestar) pa je dovoljno odrediti dvije točke pravca, odnosno jednu točku i središte kružnice da bi se one nacrtale, elipsu nije tako jednostavno nacrtati. Zadovoljavamo se time da odredimo po volji mnogo njezinih točaka te povučemo glatku krivulju kroz te točke. (Posebni mehanički uređaji *elipsografi* za crtanje elipsi danas se mogu naći samo u muzejima. S druge strane, crtanje elipse standardna je naredba svih grafičkih računalnih programa.).

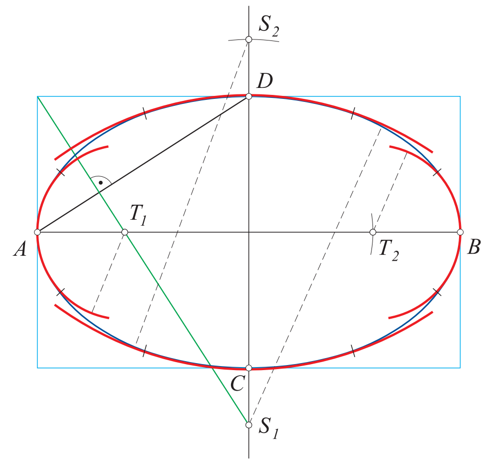


Nacrtajmo veliku os $\overline{AB}$ i sa strane pomoćnu dužinu iste duljine. Odredimo najprije središte elipse i povucimo okomitu os na kojoj će ležati druga dva tjemena. Ako su zadana žarišta (tj. njihova udaljenost do središta elipse), tad ih ucrtamo na veliku os i šestarom otvora a zasiječemo iz bilo kojeg žarišta malu os. Dobit ćemo druga dva tjemena elipse, C i D. Ako su pak zadane velika i mala os, tad iz tjemena C šestarom otvora a zasiječemo veliku os i dobijemo žarišta elipse.

Podijelimo sad pomoćnu dužinu na dva dijela duljina r_1 i r_2. Šestarom otvora r_1 povucimo lukove iz oba žarišta oko mjesta gdje bi se trebala nalaziti točka elipse. Zatim šestarom otvora r_2 povucimo nova četiri luka koji sijeku navedena četiri u točkama koje pripadaju elipsi. Postupak možemo ponoviti s po volji odabranim novim udaljenostima r_1 i r_2 i tako svaki put odrediti nove četiri točke elipse. Na kraju spojimo dobivene točke glatkom krivuljom.

Zakrivljenost elipse. Dijelovi elipse nalikuju na kružni luk. To znači da se može povući kružnica koja dobro prianja uz dio elipse. Polumjer te kružnice bit će različit za različite točke elipse. Ako je taj polumjer malen, kažemo da elipsa ima u pripadnoj točki *veliku zakrivljenost*, ako je polumjer velik, onda je riječ o točki u kojoj elipsa ima *malu zakrivljenost*. Tjemena elipse su točke u kojima elipsa ima najmanju, odnosno najveću zakrivljenost. [1]

Elipsu možemo preciznije nacrtati pomoću kružnica koje je diraju u njezinim tjemenima. Polumjere tih kružnica odredimo ovako.



Nacrtajmo pravokutnik kojemu stranice prolaze tjemenima, paralelno s osima elipse. Iz vrha pravokutnika povucimo okomicu na spojnicu susjednih tjemena A i D. Neka ona siječe pravce s osima elipse u točkama T_1 i S_1. Označimo s T_2 i S_2 njima simetrične točke s obzirom na središte elipse. Onda su T_1 i T_2 središta kružnica koje diraju elipsu u tjemenima A i B, a S_1 i S_2 središta kružnica koje je diraju u tjemenima C i D. Nacrtajmo dijelove lukova tih kružnica i uvjerimo se da oni dobro prilježu uz elipsu. Tako se sama elipsa može nacrtati preciznije.

Jednadžba elipse

Odredimo jednadžbu koju zadovoljavaju sve točke na elipsi. Ona će ovisiti o položaju elipse u koordinatnom sustavu. Najjednostavniju ćemo jednadžbu dobiti ako položaj elipse odaberemo tako da njezino središte bude u ishodištu sustava, te da velika os leži na osi apscisa, a mala na osi ordinata. Tjemena elipse su onda u točkama $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $C(0, -b)$, $D(0, b)$, a žarišta su $F_1(-e, 0)$, $F_2(e, 0)$. Pokazat ćemo da jednadžba elipse tad glasi:

Kanonska jednadžba elipse

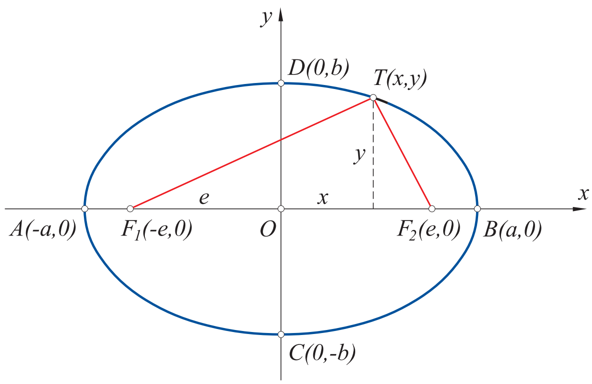
Jednadžba elipse sa središtem u ishodištu i osima koje leže na koordinatnim osima glasi

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

tj.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

[1] Kružnica je posebni slučaj elipse, kad oba žarišta padnu u istu točku. Kružnica u svakoj svojoj točki ima istu zakrivljenost. Zato kružnica nema tjemena.



Moramo dokazati da vrijede sljedeće dvije tvrdnje.

1. *Ako točka leži na elipsi, njezine koordinate zadovoljavaju jednadžbu* (1).

2. *Ako koordinate točke* $T=(x,y)$ *zadovoljavaju jednadžbu* (1), *onda točka* T *leži na elipsi.*

Dokažimo prvu tvrdnju. Izaberimo bilo koju točku $T(x,y)$ elipse. Duljine njezinih radijvektora su

$$r_1=|F_1T|=\sqrt{(x+e)^2+y^2},\qquad r_2=|F_2T|=\sqrt{(x-e)^2+y^2}.$$

Znamo da za točku elipse vrijedi $r_1+r_2=2a$, pa dobivamo

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2}+\sqrt{(x-e)^2+y^2}=2a.$$

Prebacimo jedan korijen na drugu stranu jednadžbe i nakon toga kvadrirajmo obje strane:

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-e)^2+y^2},$$
$$(x+e)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-e)^2+y^2}+(x-e)^2+y^2.$$

Nakon sređivanja dobivamo:

$$a\sqrt{(x-e)^2+y^2}=a^2-ex.$$

Ponovnim kvadriranjem slijedi

$$a^2[(x-e)^2+y^2]=a^4-2a^2ex+e^2x^2,$$
$$(a^2-e^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-e^2).$$

Budući da je $a^2-e^2=b^2$, dobivamo

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Time je prva tvrdnja dokazana.

Primjer 1.

Velika os elipse iznosi 8 cm, a linearni ekscentricitet 3 cm. Nacrtajmo elipsu i odredimo njezinu jednadžbu.

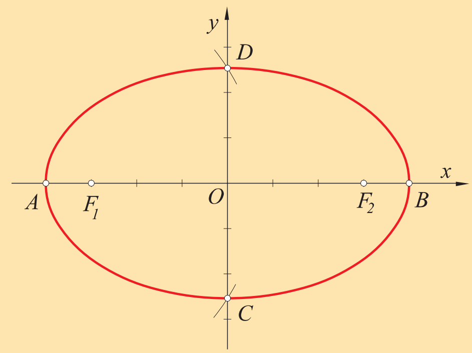
▶ Velika poluos je $a = 4$ cm, a mala poluos

$$b = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}\,\text{cm}.$$

Jednadžba elipse je

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1.$$

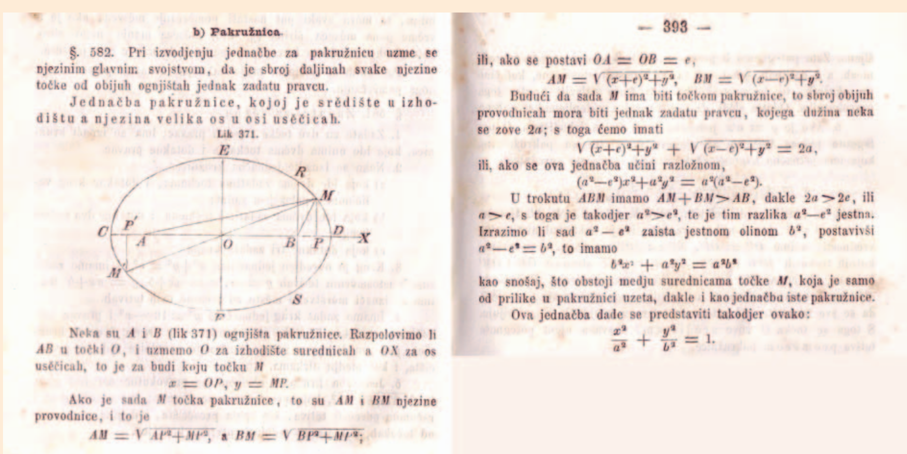
Crtamo je tako da najprije na velikoj osi odredimo tjemena A i B, zatim žarišta F_1 i F_2. Potom šestarom odredimo položaj drugih dvaju tjemena i onda konstruiramo elipsu na poznati način.



Povijesni kutak

ELIPSA

Zavirimo malo u jedan stari udžbenik geometrije. Pogledajmo kako su srednjoškolci nekada učili o elipsi. Riječ je o jednom od najstarijih udžbenika matematike na hrvatskom jeziku, *Pouki o měrstvu* V. M. Goluba, tiskanom u Zagrebu 1867. godine.



b) Pakružnica.

§. 582. Pri izvodjenju jednačbe za pakružnicu uzme se njezinim glavnim svojstvom, da je sbroj daljinah svake njezine točke od obijuh ognjištah jednak zadatu pravcu.

Jednačba pakružnice, kojoj je srědište u izhodištu a njezina velika os u osi usěčicah.

Lik 371.

Neka su A i B (lik 371) ognjišta pakružnice. Razpolovimo li AB u točki O, i uzmemo O za izhodište surednicah a OX za os usěčicah, to je za budi koju točku M

$$x = OP,\ y = MP.$$

Ako je sada M točka pakružnice, to su AM i BM njezine provodnice, i to je

$$AM = \sqrt{AP^2 + MP^2},\ \text{a}\ BM = \sqrt{BP^2 + MP^2};$$

— 393 —

ili, ako se postavi $OA = OB = e$,

$$AM = \sqrt{(x+e)^2 + y^2},\quad BM = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}.$$

Budući da sada M ima biti točkom pakružnice, to sbroj obijuh provodnicah mora biti jednak zadatu pravcu, kojega dužina neka se zove $2a$; s toga ćemo imati

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a,$$

ili, ako se ova jednačba učini razložnom,

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2).$$

U trokutu ABM imamo $AM + BM > AB$, dakle $2a > 2e$, ili $a > e$, s toga je takodjer $a^2 > e^2$, te je tim razlika $a^2 - e^2$ jestna. Izrazimo li sad $a^2 - e^2$ zaista jestnom olinom b^2, postavivši $a^2 - e^2 = b^2$, to imamo

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

kao snošaj, što obstoji medju surednicama točke M, koja je samo od prilike u pakružnici uzeta, dakle i kao jednačba iste pakružnice.

Ova jednačba dade se predstaviti takodjer ovako:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Proučite tekst i pritom pratite izvod jednadžbe elipse uspoređujući ga s ovim koji smo mi proveli.

Primjer 2.

Odredimo kanonsku jednadžbu elipse koja prolazi točkama $T_1(4,-2)$ i $T_2(\sqrt{6},3)$.

Trebamo odrediti nepoznate poluosi a i b. Točke T_1 i T_2 leže na elipsi pa njihove koordinate zadovoljavaju kanonsku jednadžbu elipse. Dakle, vrijedi:

$$\frac{4^2}{a^2}+\frac{(-2)^2}{b^2}=1, \qquad \frac{(\sqrt{6})^2}{a^2}+\frac{3^2}{b^2}=1,$$

tj.

$$\frac{16}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1, \qquad \frac{6}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1.$$

Ovo je sustav linearnih jednadžbi s nepoznanicama $\frac{1}{a^2}$ i $\frac{1}{b^2}$. Pomnožimo prvu jednadžbu s 9, a drugu s -4 i zbrojimo ih:

$$9\cdot\frac{16}{a^2}-4\cdot\frac{6}{a^2}=9-4.$$

Odavde je $\frac{120}{a^2}=5$, pa slijedi $a^2=24$. Sad lako dobivamo $b^2=12$. Jednadžba elipse glasi

$$\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{12}=1.$$

Dokažimo sada drugu tvrdnju: ako koordinate točke $T(x,y)$ zadovoljavaju jednadžbu (1), onda točka T leži na elipsi. Označimo $r_1=|F_1T|$ i $r_2=|F_2T|$. Koordinate točke F_1 su $(-e,0)$ pa vrijedi

$$r_1^2=(x+e)^2+y^2=(x+e)^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Ovdje smo uvrstili y^2 izračunat iz jednadžbe (1). Dalje je

$$r_1^2=e^2+b^2+2ex+\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2=a^2+2ex+\frac{e^2}{a^2}x^2=\left(a+\frac{e}{a}x\right)^2.$$

Na potpuno isti način dobivamo (uvjeri se u to!)

$$r_2^2=\left(a-\frac{e}{a}x\right)^2.$$

Primijetimo da je uvijek $|x|\leqslant a$, jer inače (1) ne bi bila ispunjena. Zato je $\left|\frac{ex}{a}\right|\leqslant e<a$, pa su $a+\frac{e}{a}x$ i $a-\frac{e}{a}x$ pozitivni brojevi. Tako smo dobili

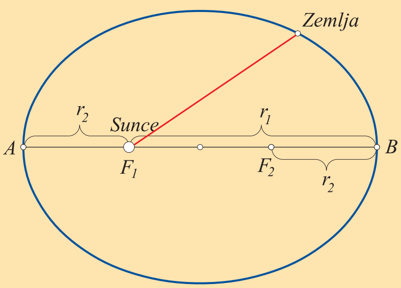
$$\boxed{r_1=a+\frac{ex}{a}, \qquad r_2=a-\frac{ex}{a},}$$

pa zbrajanjem slijedi $r_1+r_2=2a$. Dakle, točka T leži na elipsi i druga tvrdnja je dokazana.

Količnik $\frac{e}{a}$ označavamo s ε i nazivamo **numerički ekscentricitet** elipse. Za njega vrijedi $0 \leqslant \varepsilon < 1$. Za kružnicu je $\varepsilon = 0$ (jer je $e = 0$). Što je ε bliži nuli, elipsa je sličnija kružnici[1], a kad se ε približava broju 1, elipsa postaje sve spljoštenija. Za duljine radijvektora točaka elipse vrijedi, dakle,

$$r_1 = a + \varepsilon x, \qquad r_2 = a - \varepsilon x. \tag{2}$$

Primjer 3. Zemlja se giba oko Sunca po elipsi kojoj je Sunce u jednom žarištu, tako da je njihova najveća udaljenost 152.1 milijuna km, a najmanja 147.1 milijuna km. Koliki je numerički ekscentricitet te elipse?



▶ Najveća i najmanja udaljenost jednake su duljinama radijvektora tjemena B elipse. Naime, ako je r_1 udaljenost tog tjemena do žarišta F_1 (u kojem se nalazi Sunce), onda je udaljenost r_2 tjemena B do drugog žarišta F_2 jednaka udaljenosti tjemena A do žarista F_1. Apscisa tjemena B je a. Zato vrijedi

$$r_1 = a + \varepsilon a = a(1+\varepsilon) = 152.1,$$
$$r_2 = a - \varepsilon a = a(1-\varepsilon) = 147.1.$$

Odavde je (zbrajanjem jednadžbi) $2a = 299.2$ pa je $a = 149.6$ mil. km, a za numerički ekscentricitet je

$$1+\varepsilon = \frac{r_1}{a} \implies \varepsilon = \frac{r_1 - a}{a} = \frac{2.5}{149.6} = 0.0167.$$

Staza Zemlje neznatno je deformirana kružnica. Njezin linearni ekscentricitet je $e = \varepsilon a = 2.5$ mil. km, pa je mala poluos $b = \sqrt{a^2 - e^2} = 149.58$ mil. km. Vidimo da je ona kraća od velike poluosi za (samo) 20 000 km — dakle, za otprilike tri Zemljina polumjera.

[1] Zbog toga se ε i naziva *ekscentricitet*.

Primjer 4.

Halleyev komet. Godine 1986. Halleyev komet približio se Suncu na udaljenost 0.587 AU.[1] Putanja kometa je eliptična, s numeričkim ekscentricitetom 0.967. Kolika je njegova najveća udaljenost od Sunca?

Godine 1705. Edmond Halley (1652.–1742.) odredio je orbitu ovog kometa i koristeći Newtonovu teoriju predvidio da će se on vratiti u blizinu Sunca 76 godina nakon svog posljednjeg posjeta, godine 1682. Taj povratak oko Božića 1758. god. Halley nije doživio. Njemu u čast, komet je dobio ime koje i danas nosi.

Prvi zabilježeni trag o Halleyevom kometu seže u Kinu, 240 godina prije Krista. Njegovi posjeti godina 684., 837., 1066. i 1301. ostali su zabilježeni na mnogim crtežima. Za povijesnog doba Zemlji se najviše približio daleke 837. godine, na udaljenost od samo 0.034 A.U.

Godine 1986. Halleyev komet ponovo je došao u blizinu Sunca. Ta velika prašnjava gromada ima dimenziju 16×8×8 kilometara, i gustoću od samo 0.1 g/cm^3. Dočekalo ga je spremno nekoliko letjelica i tisuće teleskopa, a s jednog od njih načinjena je i ova fotografija.

▶ Najbliža udaljenost (perihel) kometa do Sunca jednaka je razlici velike poluosi i linearnog ekscentriciteta (udaljenost središta do žarišta elipse). Prema astronomskim podacima možemo zapisati:

$$a - e = 0.587, \qquad \varepsilon = \frac{e}{a} = 0.967.$$

Odavde je $a = 17.79$ A.U. Najveća udaljenost od Sunca iznosi

$$2a - e = 34.99 \text{ A.U.},$$

tako da je komet u afelu skoro 60 puta udaljeniji od Sunca nego u perihelu.

Mala poluos ove elipse iznosi

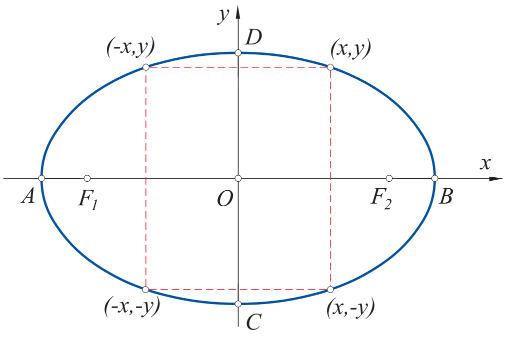
$$b = \sqrt{a^2 - e^2} = \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 a^2} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} = 4.53 \text{ A.U.},$$

pa je putanja kometa poprilično spljoštena.

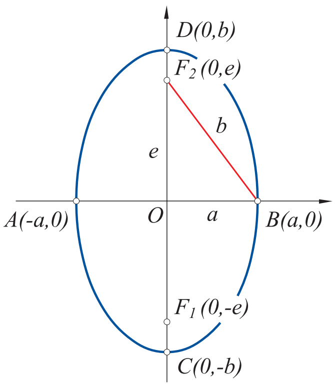
Prema drugom Keplerovom zakonu radijvektor točke u jednakim vremenskim intervalima prebriše jednaku površinu. To znači da je brzina kometa u blizini Sunca oko 3600 puta veća od brzine u afelu.

Simetrija elipse

Elipsa je simetrična obzirom na obje svoje osi. U to se najlakše možemo uvjeriti pomoću njezine jednadžbe. Naime, ako točka $T(x, y)$ leži na elipsi, onda ona zadovoljava jednadžbu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Tu istu jednadžbu zadovoljavaju i koordinate točaka $(-x, y)$, $(x, -y)$ i $(-x, -y)$. Ove točke leže simetrično točki (x, y) u odnosu na koordinatne osi i ishodište O (vidi sliku).



Elipsa sa žarištima na osi ordinata



Što predstavlja jednadžba $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ako je $b > a$? Tu su velika i mala os zamijenile mjesta uz nepoznanice pa ćemo ponovno dobiti elipsu, ali s glavnom osi na osi ordinata. Tako će i žarišta biti na osi ordinata, u točkama $F_1(0, -e)$ i $F_2(0, e)$. Linearni ekscentricitet očitava se iz pravokutnog trokuta koji čine žarište, središte i tjeme elipse, pa je $e = \sqrt{b^2 - a^2}$. Dakako, za radijvektore točke na elipsi sad vrijedi $r_1 + r_2 = 2b$, jer je $2b$ duljina velike osi.

Jednadžba elipse

Jednadžbom

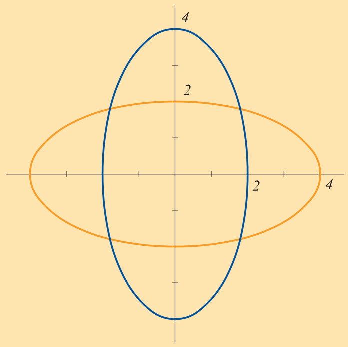
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

definirana je elipsa. Ako je $a > b$, njezina velika os (duljine $2a$) i žarišta leže na osi apscisa, a ako je $a < b$, onda velika os (duljine $2b$) i žarišta leže na osi ordinata. Ako je $a = b$, elipsa postaje kružnica.

Primjer 5.

Nacrtajmo u istom koordinatnom sustavu elipse

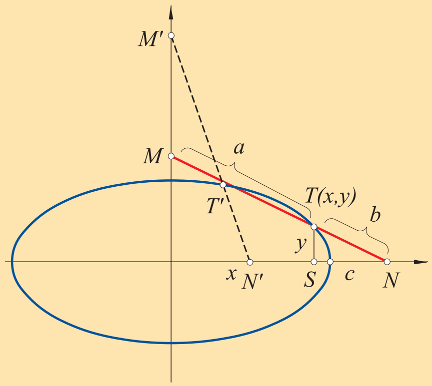
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1,$$
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$



Primjer 6.

Mehanička konstrukcija elipse. Zadana je dužina $\overline{MN}$ duljine $a+b$ i na njoj točka T koja dijeli tu dužinu u omjeru $a:b$. Prislonimo dužinu uz osi koordinatnog sustava tako da točka M klizi duž osi ordinata, a točka N duž osi apscisa. Dokažimo da će tada točka T opisati elipsu[1] s poluosima a i b. Uvjerimo se u to.

Točke M i N klize duž koordinatnih osi i pritom točka T opisuje elipsu. U mislima pratite promjene položaja dužine $\overline{MN}$.



Odredimo jednadžbu krivulje koju opisuje točka T. Označimo s (x,y) njezine koordinate, te s c duljinu dužine $\overline{SN}$. Onda je

$$c : b = (x+c) : (a+b), \qquad \text{tj.} \qquad c(a+b) = b(x+c),$$

odakle slijedi $ac = bx$, dakle

$$a\sqrt{b^2 - y^2} = bx,$$
$$a^2(b^2 - y^2) = b^2x^2,$$
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Zadatak 1. Zadana je dužina $\overline{MT}$ duljine a, te točka N na toj dužini, čija udaljenost do točke T iznosi b. Dužina se pomiče tako da točka M klizi duž osi ordinata, a točka N duž osi apscisa. Pokaži da točka T pritom opisuje elipsu s poluosima a i b.

Jednadžba translatirane elipse

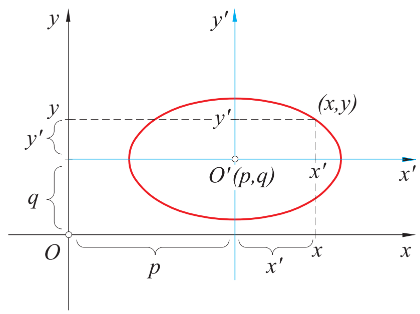
Središte elipse ne mora biti u ishodištu niti njezine osi moraju biti paralelne s koordinatnim osima. Međutim, jednadžbe takvih elipsa postat će složenije. Opišimo jednadžbu elipse kojoj je središte pomaknuto u točku $S=(p,q)$, a osi su i dalje paralelne koordinatnim osima.

Neka ishodište translatiranog sustava $(O';x',y')$ bude točka $O'(p,q)$. U tom je sustavu elipsa središnja, pa je njezina jednadžba

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1.$$

Veza koordinata početnog i translatiranog sustava je $x'=x-p$, $y'=y-q$. Zato jednadžba translatirane elipse u sustavu $(O;x,y)$ glasi

$$\boxed{\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1.}$$

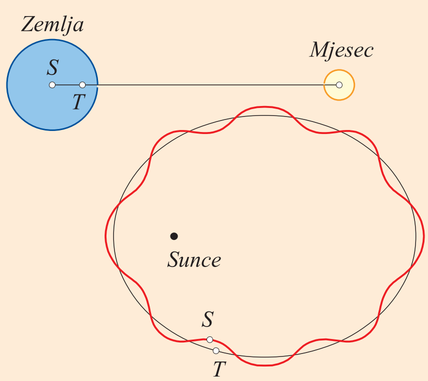


Kutak plus

GIBANJE OKO SUNCA

Zemlja i Mjesec čine cjelinu pri gibanju oko Sunca. Zato se po elipsi giba težište T sustava Zemlja–Mjesec. Kako Zemlja ima približno 81 puta veću masu od Mjeseca, težište tog sustava nalazi se na spojnici središta Zemlje i središta Mjeseca, a udaljeno je oko 4700 km od središta Zemlje (dakle, nalazi se još uvijek unutar zemaljske kugle). Središte Zemlje giba se oko Sunca po krivulji koja je otprilike oblika sinusoide (s amplitudom 4 700km) koja se obavija oko spomenute elipse.

Odnosi na slici nisi stvarni, odstupanje putanje središta Zemlje od eliptične putanje je u naravi zanemarivo prema veličini elipse.



Zadaci 10.1.

1. Zbroj udaljenosti svake točke krivulje $\mathcal{K}$ od točaka $T_1(-3, 0)$ i $T_2(3, 0)$ jednak je 10. Koja je to krivulja i kako glasi njezina jednadžba?

2. Zbroj duljina velike i male osi elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ jednak je 10, a udaljenost žarišta iznosi $2\sqrt{5}$. Odredi jednadžbu elipse.

3. Zbroj udaljenosti svake točke krivulje $\mathcal{K}$ od točaka $T_1(0, 4)$ i $T_2(0, -4)$ jednak je 10. Koja je to krivulja? Napiši njezinu jednadžbu.

4. Odredi duljine male i velike osi te udaljenost žarišta elipse ako je dana njezina jednadžba:

1) $9x^2 + 25y^2 = 225$; **2)** $9x^2 + 25y^2 = 144$;

3) $5x^2 + 9y^2 = 45$; **4)** $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$;

5) $3x^2 + 4y^2 = 48$; **6)** $4x^2 + 16y^2 = 1$.

5. Napiši jednadžbu elipse kojoj je velika os na osi Ox, a mala na osi Oy ako je:

1) duljina velike osi 8, duljina male 6;

2) duljina velike osi 10, udaljenost žarišta 6;

3) duljina male osi 4, udaljenost žarišta $4\sqrt{2}$.

6. Kolike su duljine radijvektora dane točke T na danoj elipsi:

1) $T(2, y)$, $3x^2 + 4y^2 = 48$;

2) $T(\sqrt{6}, y)$, $x^2 + 3y^2 = 12$;

3) $T(-1, y)$, $5x^2 + 9y^2 = 45$;

4) $T\left(\frac{12}{5}, -4\right)$, $25x^2 + 16y^2 = 400$?

7. Odredi jednadžbu elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ako su dane koordinate dviju točaka, A i B koje leže na elipsi:

1) $A(6, 4)$, $B(-8, 3)$; **2)** $A(9, 4)$, $B(12, 3)$;

3) $A(2, 3)$, $B(-1, -5)$;

4) $A(-3, 1)$, $B(2, -4)$.

8. Točke T_1 i T_2 pripadaju krivulji kojoj je jednadžba oblika $Ax^2 + By^2 + C = 0$. Odredi jednadžbu krivulje ako je:

1) $T_1(-2, 0)$, $T_2(0, 5)$;

2) $T_1(-4, 1)$, $T_2(3, 2)$;

3) $T_1(3, 4)$, $T_2(-4, 3)$.

9. Dva tjemena elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ i njezina dva žarišta vrhovi su kvadrata površine 16. Kako glasi jednadžba elipse?

10. Žarišta elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ i jedno njezino tjeme vrhovi su jednakostraničnog trokuta površine $9\sqrt{3}$. Odredi jednadžbu elipse.

11. Tjemena elipse su vrhovi romba čija je površina 30 kv. jed. Zbroj duljina dijagonala romba jednak je 16. Kako glasi jednadžba elipse?

12. Tjemena elipse su vrhovi romba čija je površina 96 kv. jed. Razlika duljina dijagonala romba jednaka je 4. Kako glasi jednadžba elipse?

13. Napiši jednadžbu elipse opisane jednakostraničnom trokutu ako su dva vrha tog trokuta točke $A(-a, 0)$ i $B(a, 0)$, koje su ujedno dva tjemena elipse.

14. Koliki je numerički ekscentricitet elipse ako je linearni ekscentricitet aritmetička sredina duljina velike i male poluosi?

15. Napiši jednadžbu elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ako je njezin numerički ekscentricitet $\varepsilon = \frac{e}{a}$ jednak $\frac{1}{2}$, a elipsa prolazi točkom $T(2, 3)$.

16. Stranica kvadrata upisanog elipsi prolazi njezinim žarištem. Koliki je numerički ekscentricitet elipse?

17. Žarišta elipse i jedno njezino tjeme vrhovi su pravokutnog trokuta kojem je površina jednaka 18. Odredi jednadžbu elipse.

18. Kraća dijagonala romba je mala os, a dulja velika os elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Ako je razlika duljina dijagonala romba 4, a površina romba 96, kako glasi jednadžba elipse?

19. Elipsi $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ upisan je kvadrat površine 64. Udaljenost žarišta elipse jednaka je $4\sqrt{15}$. Kako glasi jednadžba elipse?

20. Ortogonalna projekcija kružnice na ravninu je elipsa kojoj je mala os dugačka 8. Ako je promjer kružnice 16, koliki kut zatvaraju ravnine u kojima leže kružnica i elipsa?

21. Ortogonalna projekcija kružnice polumjera $r = 8$ na ravninu je elipsa. Ravnine u kojima leže te dvije krivulje zatvaraju kut od $60°$. Kolike su duljine poluosi elipse?

22. Polumjer osnovke uspravnog valjka jednak je $\sqrt{3}$. Pod kojim kutom prema osi valjka treba položiti ravninu kako bi se za presjek dobila elipsa s velikom poluosi duljine 2?

23. Osnovka uspravnog valjka je krug polumjera $r = 6$. Kolike su duljine osi elipse koja je presjek plašta valjka i ravnine položene prema osnovci valjka pod kutom od $30°$?

24. Udaljenost točke $T(8, 12)$ elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ od njezinog desnog žarišta jednaka je 12. Odredi jednadžbu elipse.

25. Točka $T(-4, 1)$ elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ udaljena je $\sqrt{2}$ od njezinog lijevog žarišta. Odredi jednadžbu elipse.

26. Koja je točka elipse $2x^2 + 3y^2 = 24$ od njezinog lijevog žarišta udaljena $\sqrt{3}$?

27. Koja je točka elipse $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ od njezinog desnog žarišta udaljena 14?

28. Odredi točku na elipsi $5x^2 + 9y^2 = 405$ za koju je razlika udaljenosti od žarišta elipse jednaka 8.

29. Koliki kut zatvaraju radijvektori točke s apscisom $x = -4$ elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$?

30. Koliki kut zatvaraju radijvektori elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ koji pripadaju točki $T(3, y)$?

31. Koliki kut zatvaraju radijvektori točke $T(3, 4)$ elipse $4x^2 + 9y^2 = 180$?

32. Duljina velike osi elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ jednaka je 12. Kut pod kojim se iz žarišta elipse vidi njezina mala os jednak je $60°$. Kako glasi jednadžba elipse?

33. Na elipsi $9x^2 + 25y^2 = 225$ odredi točku čija je udaljenost od lijevog žarišta četiri puta veća nego njezina udaljenost od desnog žarišta.

34. Elipsi $x^2 + 3y^2 = 12$ upisan je kvadrat. Kolika je površina tog kvadrata?

35. Točka $A(1, 1)$ polovište je tetive elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$. Odredi jednadžbu pravca kojem pripada ta tetiva.

36. Točka $T(2, 1)$ polovište je tetive elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Kako glasi jednadžba pravca kojem pripada ta tetiva?

37. Na elipsi $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$ odredi točke kojima su pripadni radijvektori međusobno okomiti.

38. Koliku površinu s osi Ox zatvaraju radijvektori one točke elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ iz koje se dužina koja spaja žarišta vidi pod pravim kutom?

39. Kružnica $x^2 + y^2 = 16$ prolazi žarištem i tjemenima male osi elipse. Nađi jednadžbu elipse.

40. Vrhovi trokuta su žarišta elipse $x^2 + 4y^2 = 12$ i središte kružnice $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$. Kolika je površina tog trokuta?

41. Kružnica $x^2 + (y + 2)^2 = 9$ prolazi žarištima elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, a duljina velike osi elipse jednaka je duljini promjera kružnice. Kako glasi jednadžba elipse?

42. Kružnica prolazi jednim tjemenom velike osi, jednim tjemenom male osi elipse $4x^2 + 9y^2 = 144$ i ishodištem koordinatnog sustava. Napiši jednadžbu kružnice.

43. Središte kružnice $(x + 4)^2 + y^2 = 36$ žarište je elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Ista kružnica prolazi tjemenima male osi elipse. Napiši jednadžbu elipse.

44. Središte kružnice $x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$ jedno je tjeme elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Kružnica prolazi kroz oba žarišta elipse. Kako glasi jednadžba elipse?

45. Elipsa $x^2 + 4y^2 = 25$ siječe koordinatne osi u točkama koje su vrhovi romba. Napiši jednadžbu kružnice upisane tom rombu.

46. Kolika je površina lika kojem su vrhovi sjecišta krivulja $x^2 + y^2 = 9$ i $3x^2 + 12y^2 = 36$?

47. Točka $C(3, 2)$ središte je elipse kojoj su osi paralelne koordinatnim osima i koja dira obje koordinatne osi. Odredi jednadžbu te elipse.

48. Osi elipse paralelne su koordinatnim osima. Elipsa dira obje koordinatne osi, a njezino je desno žarište točka $F(-2, -4)$. Kako glasi jednadžba elipse?

49. Duljina tetive što je na elipsi $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ odsijeca pravac koji je okomit na veliku os i koji prolazi žarištem elipse jednaka je 8. Ako je linearni ekscentricitet elipse $e = 3\sqrt{5}$, kako glasi njezina jednadžba?

50. Zbroj udaljenosti svake točke krivulje od točaka $A(-1, 2)$ i $B(5, 2)$ jednak je 10. Kako glasi jednadžba te krivulje?

51. Zbroj udaljenosti svake točke krivulje od točaka $A(-1, 2)$ i $B(-1, -6)$ jednak je 10. Kako glasi jednadžba te krivulje?

52. Osi elipse paralelne su s koordinatnim osima. Elipsa ima središte u točki $S(3, 2)$ i dira obje koordinatne osi. Kako glasi njezina jednadžba?

53. Osi elipse paralelne su s koordinatnim osima. Elipsa ima središte u točki $S(-2, 3)$ i dira obje koordinatne osi. Kako glasi njezina jednadžba?

54. Odredi skup točaka određen jednadžbom:

1) $x^2 + 4y^2 + 2x - 3 = 0$;

2) $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$;

3) $x^2 + 2y^2 - 4y + 10 = 0$;

4) $x^2 + 2y^2 - 8x - 4y + 18 = 0$.

55. Grafički prikaži skup točaka ravnine zadan jednadžbom:

1) $y = \frac{1}{3}\sqrt{36 - 4x^2}$; **2)** $y = -\frac{1}{2}\sqrt{4x - x^2}$;

3) $y = -1 + \frac{2}{5}\sqrt{16 - 6x - x^2}$;

4) $y = 1 - \frac{4}{3}\sqrt{6x - x^2}$.

56. Svaka točka krivulje je oblika $T(5\cos t, 3\sin t)$, $t \in \mathbf{R}$. Odredi jednadžbu te krivulje.

57. Ordinata svake točke kružnice $x^2 + y^2 = 36$ je raspolovljena. Koju krivulju čine sva ta polovišta?

58. Ordinata svake točke kružnice $x^2 + y^2 = 5$ podijeljena je u omjeru $3 : 2$. Na taj način dobivena je elipsa. Provjeri!

59. Kolika je površina četverokuta kojem su vrhovi sjecišta elipse $4(x-1)^2 + 15y^2 = 64$ s koordinatnim osima.

60. Sjecišta dviju elipsi $x^2 + 16y^2 = 64$ i $3x^2 + 8y^2 = 72$ vrhovi su četverokuta. Kolika je površina tog četverokuta?

61. Apscisa x svake točke elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ umanji se tako da za apscisu x' novodobivene točke vrijedi $x' = \frac{3}{4}x$. Odredi skup svih točaka ravnine koje se dobiju opisanim *stezanjem* elipse prema osi ordinata.

I sada na kraju ovog odjeljka o elipsi, bacimo još jednom pogled na naš stari drveni model s naslovne stranice ovog poglavlja. Uspravni stožac presječen je ravninom koja zahvaća sve njegove izvodnice, a s osnovkom zatvara kut α.