

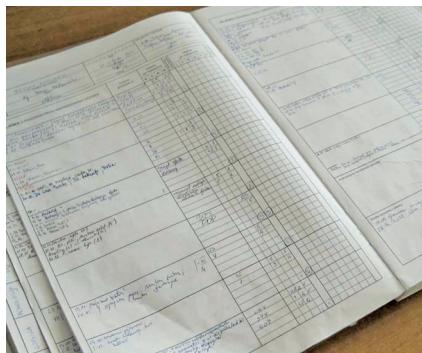
1 Nizovi

spomenik srušenim kućama u Vukovaru



- Brojevne sredine.....2
- Aritmetički niz.....13
- Geometrijski niz.....29

1.1. Brojevne sredine



Često se u običnom životu susrećemo s izrazima *srednja vrijednost*, *prosječna vrijednost* ili *tu je negdje u sredini*. Tako se, primjerice, govorи o *prosječnoj starosti stanovništva*, *prosječnoj cijeni ulja u prodaji* ili o *srednjoj ocjeni* iz matematike u nekoј školi.

Kada bismo upitali učenike iz vašeg razredа, što zapravo ti pojmovi znaće, vjerojatno bismo dobili različite odgovore. Podatci koje smo spomenuli (starost, cijena i ocjena) izražavaju se brojevima, a na sva pitanja o brojevima, odgovore daje matematika.

Aritmetička sredina

Primjer 1.

Brat ima 37, a sestra 45 kuna. Koliki je prosječni iznos kuna koji imaju taj brat i sestra?

Zamislimo da se ukupan zajednički iznos međusobno podijeli tako da svatko od njih dobije jednak iznos kuna. Matematička radnja koju pritom vršimo jest $\frac{37 + 45}{2}$. Rezultat te radnje je 41. Bitno je zapaziti da je ukupan iznos ostao nepromijenjen, to jest $37 + 45 = 41 + 41$.

Zato kažemo da *prosječni iznos* u ovom slučaju jest 41 kuna.

Primjer 2.

U nekoј školi postoje četiri odjela trećeg razredа. Broj učenika u tim odjelima je 31, 28, 29 i 32. Koliki je prosječni broj učenika u ta četiri odjela?

Postupamo isto kao i u prethodnom primjeru, to jest ukupan broj učenika preraspodijelimo u četiri nova odjela, tako da u svakom odjelu bude jednak broj učenika.

Zato računamo ovako:

$$\frac{31 + 28 + 29 + 32}{4} = \frac{120}{4} = 30.$$

Kažemo da je prosječan broj učenika u odjelima trećeg razredа te škole jednak 30.

To opet znači da je ukupan broj učenika upravo toliki kao da ih u svakom odjelu ima po 30.

Ovako izračunan prosječan ili srednji broj zove se **aritmetička sredina** navedenih brojeva.

Umjesto brojeva 37 i 45 iz prvog primjera, uzmemmo bilo koja dva pozitivna broja x i y i dobijemo:

$$\frac{x+y}{2} = a.$$

Kažemo da je broj a aritmetička sredina brojeva x i y .

Isto je tako broj $\frac{x+y+z}{3}$ aritmetička sredina brojeva x , y i z , odnosno broj $\frac{v+x+y+z}{4}$ je aritmetička sredina brojeva v , x , y i z .

Ako promatramo više brojeva, onda ih označujemo a_1, a_2, \dots, a_n , gdje je n prirodan broj veći od 1.

Zato općenito definiramo:

Aritmetička sredina

Ako za brojeve a_1, a_2, \dots, a_n vrijedi

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$$

kažemo da je broj a aritmetička sredina brojeva a_1, a_2, \dots, a_n .

Zadatak 1. Aritmetička sredina 5 brojeva je 6. Koliki je zbroj tih brojeva?

Najmanji broj skupa $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ označimo s $\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, a isto tako i najveći broj tog skupa označimo s $\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Znamo da elemente skupa možemo napisati u bilo kojem poretku. Zato skup $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ možemo urediti tako da vrijedi $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$.

Primjer 3.

Zadan je skup $S = \{1, 7, 9, 12, 16\}$

- 1) Odredi $\min S$ i $\max S$.
- 2) Odredi aritmetičku sredinu skupa S .
- 3) Provjeri da vrijedi: $\min S < a < \max S$.

1) Očito je da vrijedi $\min S = 1$, $\max S = 16$.

$$2) a = \frac{1+7+9+12+16}{5} = \frac{45}{5}, \quad a = 9.$$

3) Vrijedi $1 < 9 < 16$ ili $\min S < a < \max S$.

Aritmetička sredina skupa

Ako su u skupu S svi članovi jednaki, onda je aritmetička sredina tog skupa jednak tom jednakom elementu.

Zaista, ako je $a_1 = a_2 = \dots = a_n = b$, onda vrijedi

$$a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{\overbrace{b + b + \dots + b}^n}{n} = \frac{b \cdot n}{n} = b,$$

to jest $a = b$.

Primjer 4.

Aritmetička sredina skupa od pet brojeva je jednak 7. Ako se tomu skupu pridruži još jedan broj, onda je aritmetička sredina novoga skupa veća za 2 od aritmetičke sredine polaznog skupa. Koji je broj pridružen tom broju?

Označimo li zbroj brojeva polaznoga skupa sa S , onda vrijedi $\frac{S}{5} = 7$ ili $S = 35$.

Broj koji smo pridružili skupu neka je x . Sada vrijedi $\frac{S+x}{6} = 9$. Odavde je $x = 54 - S$, $x = 19$.

Primjer 5.

Aritmetička sredina skupa od devet brojeva je 7. Ako se iz toga skupa isključe dva broja, onda je aritmetička sredina novoga skupa veća za 1 od aritmetičke sredine polaznog skupa. Koliki je zbroj isključenih brojeva?

Označimo li zbroj brojeva polaznoga skupa S , onda vrijedi $\frac{S}{9} = 7$ ili $S = 63$.

Ako je zbroj dvaju isključenih brojeva jednak x , onda vrijedi $\frac{S-x}{7} = 8$, odakle je $x = 63 - 56$, $x = 7$.

Geometrijska interpretacija aritmetičke sredine dvaju brojeva

Prisjetimo se jednog poučka o trapezu koji znamo još iz osnovne škole. Četvero-ut kojem su dvije stranice usporedne zove se **trapez**.

Usporedne stranice trapeza su **osnovice**, a druge dvije su **krakovi**.

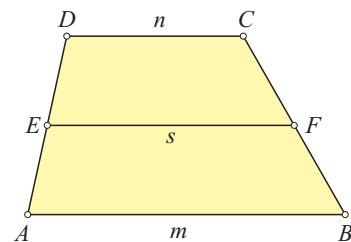
Spojnica polovišta krakova trapeza zove se **srednjica** tog trapeza.

Na slici je nacrtan trapez $ABCD$, kojemu su duljine osnovica m i n i pripadna srednjica duljine $|EF| = s$.

Za trapez vrijedi poučak:

Duljina srednjice trapeza jednaka je poluzbroju duljina osnovica tog trapeza. To se zapisuje

$$s = \frac{m+n}{2}.$$



Kako smo upravo definirali, izraz $\frac{m+n}{2}$ zove se aritmetička sredina brojeva m i n . Zato možemo reći:

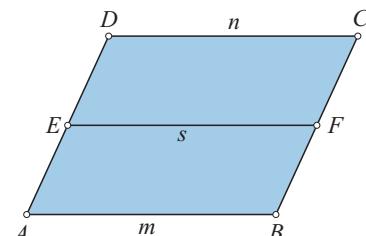
Duljina srednjice trapeza

Duljina srednjice trapeza jednaka je aritmetičkoj sredini duljina osnovica trapeza.

S gornje slike vidimo da je $n < s < m$, što je u suglasju s navedenim odnosom aritmetičke sredine dvaju brojeva i tih brojeva.

Ako je $m = n$, tada je trapez paralelogram, kao na slici desno. Vrijedi $n = s = m$.

To nam potvrđuje već izrečenu činjenicu da je aritmetička sredina jednakih brojeva jednaka svakom od tih brojeva.



Geometrijska sredina

Postavimo dva veoma slična zadatka.

- Opseg trokuta je 42 cm. Kolika je prosječna duljina stranica tog trokuta?
- Obujam kvadra je $27\ 000 \text{ cm}^3$. Kolike su prosječne duljine bridova tog kvadra?

U prvom zadatku treba naći trokut jednakih duljina stranica (jednakostraničan trokut) tako da mu opseg bude 42 cm. Ako je x duljina stranice tog trokuta, onda je

$$x = \frac{42}{3}$$

to jest $x = 14 \text{ cm}$.

To znači da za svaki trokut opsega 42 postoji samo jedan jednakoststraničan trokut jednakog opsega kao i taj trokut.



Drugi zadatak je samo formalno sličan prvome, ali je u biti potpuno različit. Naime, riješimo li taj zadatak istim postupkom, nećemo dobiti zadovoljavajući rezultat.

Zaista, ako zadani obujam podijelimo s 3, dobit ćemo brid kvadra duljine $27\ 000 : 3 = 9000$. Obujam novog kvadra je $9000 \cdot 9000 \cdot 9000 = 729\ 000\ 000\ 000 \text{ cm}^3$, što očito nije rješenje zadatka.

Pokušajmo odgovoriti zašto ova dva zadatka nismo mogli riješiti istim postupkom.

Opseg trokuta duljina stranica a , b i c je jednak $a + b + c$, a obujam kvadra duljina bridova a , b i c je jednak abc .

U prvom zadatku treba odrediti x tako da bude $a + b + c = 3x$, to jest $x = \frac{a+b+c}{3}$.

U drugom zadatku treba odrediti y tako da bude $abc = yyy = y^3$. Odavde je

$$y^3 = 27\ 000, \quad y^3 = 3^3 \cdot 10^3,$$

to jest $y = 30 \text{ cm}$.

U ovom zadatku trebalo je naći kvadar kojemu su bridovi jednakih duljina, to jest kocku, i kojemu je obujam jednak obujmu zadanog kvadra $27\ 000 \text{ cm}^3$.

Zaista, za $y = 30 \text{ cm}$ dobije se $y^3 = 27\ 000 \text{ cm}^3$.

Sada možemo problem poprimiti onako kako smo to učinili u razmatranju o aritmetičkoj sredini.

- Za dva pozitivna realna broja x i y treba odrediti broj g tako da je $xy = gg$ ili $g = \sqrt{xy}$.
 - Za tri pozitivna realna broja x , y i z treba odrediti broj g tako da je $xyz = g^3$ ili $g = \sqrt[3]{xyz}$.
-
- Za n pozitivnih brojeva x_1, x_2, \dots, x_n treba odrediti broj g tako da je $x_1 x_2 \dots x_n = g^n$ ili

$$g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \tag{1}$$

Ovako definirani brojevi g zovu se **geometrijska sredina** dvaju, triju, \dots , n pozitivnih realnih brojeva.

Primjer 6.

Za zadane brojeve:

- 1) 8 i 12; 2) 1 i 100; 3) 16, 3 i 36;
 4) 1, 1 i 27; 5) $\sqrt{7}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \sqrt{3} - \sqrt{2}, \sqrt{3} + \sqrt{2}$

izračunaj geometrijsku sredinu.

1) $g = \sqrt{8 \cdot 12} = \sqrt{8 \cdot 2 \cdot 9} = \sqrt{16 \cdot 9} = \sqrt{(4 \cdot 3)^2} = \sqrt{12^2}, g = 12.$

2) $g = \sqrt{1 \cdot 100} = \sqrt{100}, g = 10.$

3) $g = \sqrt[3]{16 \cdot 3 \cdot 36} = \sqrt[3]{4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt[3]{4^3 \cdot 3^3}, g = 12.$

4) $g = \sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot 27} = \sqrt[3]{27}, g = 3.$

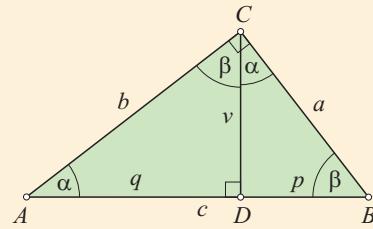
5) $g = \sqrt[4]{\sqrt{7} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})} = 1.$

Zadatak 2. Odredi y tako da je geometrijska sredina skupa $\{x, y\}$ bude jednaka $2x$.

Riješimo sada jedan primjer iz geometrije.

Primjer 7.

U pravokutnom trokutu ABC duljina kateta a i b i duljine hipotenuze c povučena je visina iz vrha pravog kuta $v = |CD|$, kao na slici. Označimo $|AD| = q$ i $|BD| = p$. Izrazite visinu (v) s pomoću odreznaka (p i q) što ih ta visina određuje na hipotenuzi trokuta.



Trokut ABC je pravokutan s pravim kutom pri vrhu C zbog čega za šiljaste kuteve α i β trokuta vrijedi $\alpha + \beta = 90^\circ$. Zbog toga je $\angle CAD = \angle CBD = \alpha$. Iz istog je razloga $\angle ACD = \angle CBD = \beta$.

Vidimo da se pravokutni trokuti ABC , ACD i CBD podudaraju u svim trima kutovima. To je (više negoli) dovoljno da su ti trokuti slični.

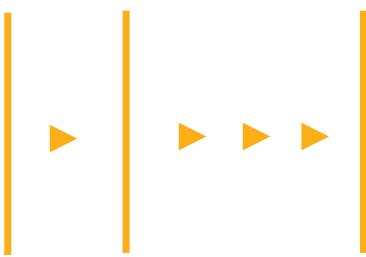
Iz sličnih trokuta ACD i BCD imamo $v : q = p : v$, odakle je $v^2 = pq$ ili $v = \sqrt{pq}$.

Vidimo da je broj v geometrijska sredina brojeva p i q .

Ovo možemo izreći ovako:

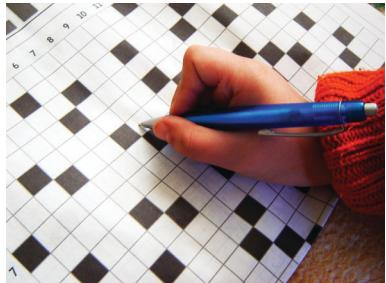
Visina pravokutnog trokuta

Visina pravokutnog trokuta iz vrha pravog kuta je geometrijska sredina duljina odreznaka što ih ta visina određuje na hipotenuzi.



1.2. Aritmetički niz

■ Uvodno o nizovima



Upoznat ćemo jedan od najvažnijih matematičkih pojmove koji zovemo **niz** ili **slijed**.

Često se u enigmatskim ili zabavnim rubrikama novina i časopisa može naći na ovakve probleme.

Nastavi niz brojeva:

- 1) 2, 6, 12, 20, 30 ... 2) 2, 5, 10, 17, 26 ... 3) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{6}, \frac{11}{30}, \frac{41}{330} \dots$

U pravilu svaki je niz povezan s nizom prirodnih brojeva; 1, 2, 3, 4, 5, 6 ...

U prvom primjeru imamo: $1 \cdot 2 = 2$, $2 \cdot 3 = 6$, $3 \cdot 4 = 12 \dots$ Već vidimo da se niz nastavlja brojevima 42, 56 ...

U drugom primjeru, članove niza dobit ćemo tako da se ispišu redom kvadrati svih prirodnih brojeva i svakom od tih kvadrata pribroji 1. Zato se niz nastavlja brojevima 37, 50, 65 ...

U trećem primjeru svi su brojevi razlomci, prvi je razlomak je $\frac{1}{2}$, a svaki se sljedeći razlomak dobiva iz prethodnog, tako da se za brojnik novog razlomka uzme zbroj, a za nazivnik umnožak brojnika i nazivnika prethodnog razlomka.

Iako se često pojavljuju, ovakvi zadaci nisu sa strogoga matematičkog stajališta potpuno korektni, jer uz ovo opisano rješenje, postoji još beskonačno mnogo drugih rješenja. U ovakvim zadatcima treba postaviti dodatne uvjete koji bi osiguravali jednoznačnost rješenja.

Primjer 1.

Zadani su brojevi 1, 4 ... Nastavi ispisivati niz tako da svaki broj (osim prvoga) bude aritmetička sredina dva susjedna brojeva.

Prema postavljenim uvjetima, broj 4 mora biti aritmetička sredina broja 1 i prvoga upisanog broja, to jest broja 7 jer je $\frac{1+7}{2} = 4$. Isto tako, broj 7 mora biti aritmetička sredina broja 4 i drugoga upisanog broja. Taj drugi upisani broj jest 10 jer je $\frac{4+10}{2} = 7$. Ovaj postupak možemo stalno ponavljati i lako zaključimo da ćemo dobiti:

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 \dots$$

Ovako ispisani brojevi čine **niz** ili **slijed**.

Svaki broj koji bismo u ovom postupku upisali zove se član niza.

Vidimo da u postupku ispisivanja članova možemo iza svakog člana dopisati još jedan član. Zato kažemo da niz ima **beskonačno mnogo** članova.

Ponekad, iz praktičnih razloga, promatramo nizove koji imaju konačan broj članova, primjerice niz od 17, od 21 789 ili pak niz od pet milijuna članova. Svaki takav niz zove se **konačni niz** ili **slog**. Ako se radi o konačnom nizu, to uvek treba naglasiti. Ako se kaže samo **niz**, onda se podrazumijeva da se radi o beskonačnom nizu.

Zadatak 1. Odredi x i y , tako da brojevi $3x - 1$, $2x + 3$, $7x + 1$, $2y - 3x$ budu uzastopni članovi aritmetičkoga niza.

Treba razlikovati pojам niza i pojам skupa.

Tako, primjerice, kažemo da su skupovi $\{1, 4, 7, 10, 13, 16\}$ i $\{4, 1, 10, 7, 16, 13\}$ jednak, jer u ispisivanju članova skupa nije bitan uređaj, to jest poredak članova skupa.

Kod nizova, poredak članova jest bitan. Tako su nizovi $1, 4, 7, 10, 13, 16 \dots$ i $4, 1, 10, 7, 16, 13 \dots$ različiti, a isto tako su i konačni nizovi $1, 4, 7, 10, 13, 16$ i $4, 1, 10, 7, 16, 13$ međusobno različiti.



Spomenuli smo da je u zapisu članova niza bitan poredak. Zato članove niza posebno imenujemo.

Tako u nizu $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 \dots$ broj 1 je **prvi**, broj 4 je **drugi**, a broj 49 je **sedmi** član tog niza.

Često se, pogotovo u teorijskim razmatranjima nizova, umjesto ispisivanja konkretnih članova niza, niz zapisuje ovako: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots$

Prirodni brojevi $1, 2, 3, \dots, n \dots$ u zapisu članova niza zovu se **indeksi** tih članova, to jest kazuju redni broj mesta na kojem se taj član nalazi.

Član a_n , $n \in \mathbb{N}$ zove se opći član niza. Niz, kao cjelinu, označujemo (a_n) . Ako promatramo dva ili više nizova, moramo ih označiti različitim oznakama. Tako nizovi (b_n) ili (c_n) znače $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \dots$, odnosno $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n \dots$

U samom uvodu spomenuli smo niz $2, 5, 10, 17, 26, 37 \dots$ i utvrđili da se članovi tog niza dobiju tako da se kvadrišti prirodnih brojeva u prirodnom poretku uvećaju za 1.

To znači: ako se u formulu $a_n = n^2 + 1$ uvrste redom prirodni brojevi $1, 2, 3 \dots$, dobit ćemo članove tog niza.

Zato kažemo da je $a_n = n^2 + 1$ **formula za opći član** tog niza.

Primjer 2.

Ispišite po nekoliko članova niza kojemu je zadan opći član niza formulom i odredite tisućiti član niza.

1) $a_n = 17n - 34$;

2) $a_n = \frac{5n + 3}{3n - 1}$;

3) $a_n = n^2 - 3n + 5$;

4) $a_n = |1 - n| - n$.

Stavljujući u zadatu formulu za $n = 1, 2, 3, 4, 5$ i potom $n = 1000$, dobit ćemo pet početnih članova, kao i tisućiti član niza.

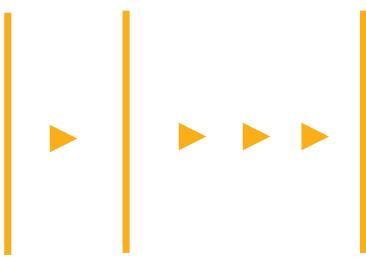
1) $-17, 0, 17, 34$, $a_{1000} = 17000 - 34 = 16966$;

2) $\frac{8}{2}, \frac{13}{5}, \frac{18}{8}, \frac{23}{11}, \frac{28}{14}$ ili $4, \frac{13}{5}, \frac{9}{4}, \frac{23}{11}, 2$, $a_{1000} = \frac{5003}{2999}$;

3) $3, 3, 5, 9, 15$, $a_{1000} = 997005$;

4) $-1, -1, -1, -1, -1$; $a_{1000} = -1$.

Opći član aritmetičkog niza



2.2. Potrošački kredit

■ Način otplate

U cijelom svijetu jako je razvijen sustav prodaje na otplatu (što se kod nas poistovjećuje s potrošačkim kreditom). Prodaju na otplatu su prihvatile sva trgovacka poduzeća, a posebno velike robne kuće. Kod takve prodaje kupcu se prodana roba daje odmah na upotrebu, a on je dužan novčani iznos otplatiti u jednakim novčanim ratama, otplatama.

Potrošački kredit je primjer najčešće primjene jednostavnog anticipativnog obračunavanja kamata. Odobravaju ga banke i slične specijalizirane ustanove direktno potrošaču za kupnju nekih roba ili plaćanje usluga. Pritom se uspostavljaju i određeni uvjeti, pa zato kažemo:

Potrošački kredit

Potrošački kredit je poseban imovinskopravni odnos između kreditora (banke) i dužnika (korisnika kredita).



Ovakav kredit obuhvaća isključivo proizvode za osobnu upotrebu (kupnja odjeće, automobila, troškovi godišnjeg odmora, troškovi preseljenja, popravka stana, troškovi zbog bolesti i sl.). Dužnik otplaćuje kredit zajedno s kamatama u predviđenom roku jednakim mjesечnim ratama. Koliki je maksimalni novčani iznos odobrenog potrošačkog kredita ovisi o prihodima korisnika kredita i njegovim mogućnostima redovitog otplaćivanja duga. Isto tako je promjenjiv i polog u gotovini koji korisnik kredita mora platiti odmah. Rokovi vraćanja potrošačkog kredita su kratki (najčešće do 5 godina), a ograničena je i visina kamatnjaka. Obraćunavanje kamata je anticipativno (dakle, kamate se obračunavaju na početku svakog mjeseca od ostatka duga). Kamate za ovaj kredit se izračunavaju s pomoću tzv. **kamatnog koeficijenta** – jednostavne anticipativne kamate na kredit od 100 kn koji se otplaćuje jednakim mjesечnim ratama.

Praksa je da se mjesечna rata određuje tako da ne prelazi trećinu redovitih mjesечnih primanja dužnika.

Pokazat ćemo način otplate potrošačkog kredita uz sljedeće oznake:

C_0 – iznos odobrenog kredita,

p – učešće u gotovini (izraženo u postotcima),

U – iznos učešća u gotovini (izražen u kunama), $U = \frac{C_0 \cdot p}{100}$

C_1 – stvarni iznos kredita, $C_1 = C_0 - U$

q – godišnja anticipativna kamatna stopa,

m – broj mjeseci otplate kredita,

k – kamatni koeficijent,

$$\begin{aligned}\overline{K} & - \text{ukupne kamate, } \overline{K} = \frac{C_1 \cdot k}{100} \\ C_2 & - \text{ukupno dugovanje, } C_2 = C_1 + \overline{K} \\ R & - \text{iznos (nepromjenjive) mjesечne rate, } R = \frac{C_2}{m}\end{aligned}$$

Dakle, zaključujemo i sljedeće:

$$\begin{aligned}C_1 &= C_0 - U = C_0 - \frac{C_0 p}{100} = C_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right), \\ C_2 &= C_1 + \overline{K} = C_1 + \frac{C_1 k}{100} = C_1 \left(1 + \frac{k}{100}\right) = C_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right) \left(1 + \frac{k}{100}\right).\end{aligned}$$

Kako je $C_2 = R \cdot m$, očito vrijedi i jednakost:

$$C_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right) \left(1 + \frac{k}{100}\right) = R \cdot m.$$

Sada moramo objasniti postupak utvrđivanja ukupnih kamata \overline{K} .



Obračunavanje kamata je anticipativno, pa nakon oduzimanja učešća na iznos odobrenog kredita na početku prvog mjeseca, dug je jednak stvarnom iznosu odobrenog kredita. Tako ćemo svakog mjeseca otplaćivati stvarni dug $\frac{C_1}{m}$ zajedno s kamatama.

Na početku prvog mjeseca kamate za taj mjesec su

$$\overline{K}_1 = \frac{C_1 q}{1200}.$$

Nakon plaćene prve mjesечne rate, dug se smanjio na

$$C_1 - \frac{C_1}{m} = C_1 \left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

što znači da na početku drugog mjeseca obračunavamo kamate za taj mjesec na ostatak duga s kraja tog mjeseca, tj.

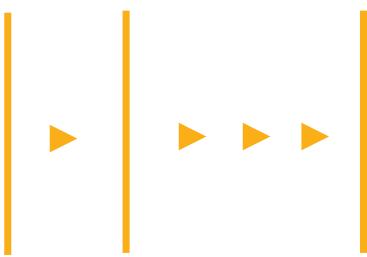
$$\overline{K}_2 = \frac{C_1 \left(1 - \frac{1}{m}\right) q}{1200} \quad \text{ili} \quad \overline{K}_2 = \frac{C_1 q}{1200} \left(1 - \frac{1}{m}\right).$$

Dakle, dug se sada smanjio na

$$C_1 \left(1 - \frac{1}{m}\right) - \frac{C_1}{m} = C_1 \left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

pa je na početku 3. mjeseca iznos kamata obračunanih za taj mjesec na preostali dug jednak

$$\overline{K}_3 = \frac{C_1 q}{1200} \left(1 - \frac{2}{m}\right).$$



Sada je

$$C_1 = C_0 - U = C_0 - 0.3 C_0 = 0.7 C_0.$$

Znamo da je i

$$\bar{K} = \frac{C_1 k}{100} = \frac{0.7 C_0 \cdot k}{100} = 0.0525 C_0,$$

odakle zaključujemo

$$0.7 k = 5.25, \quad \text{tj.} \quad k = 7.5.$$

Budući da vrijedi i relacija: $k = \frac{q(m+1)}{24}$ očito je

$$m + 1 = \frac{24 \cdot k}{q} = \frac{24 \cdot 7.5}{12} = 15.$$

Konačno je traženo rješenje $m = 14$ mjeseci.

Primjer 5.

Potrošački kredit je odobren uz 20 % učešća u gotovini i uz 10 % anticipativnu godišnju kamatnu stopu, a iznos mjesечne rate je 6.5 % iznosa odobrenog kredita.

Na koje je vrijeme odobren ovaj kredit?



$$p = 20\%, q = 10\%, R = 0.065 C_0, m = ?$$

Primjenom poznatih nam jednakosti, redom dobijemo:

$$U = \frac{C_0 p}{100} = \frac{20 \cdot C_0}{100} = 0.2 C_0,$$

$$C_1 = C_0 - U = C_0 - 0.2 C_0 = 0.8 C_0,$$

$$\bar{K} = \frac{C_1 k}{100} = \frac{0.8 \cdot C_0 k}{100} = 0.008 C_0 k,$$

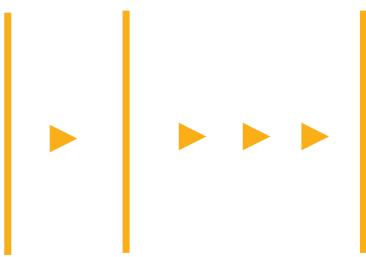
$$C_2 = C_1 + \bar{K} = 0.8 C_0 + 0.008 C_0 k.$$

Budući da vrijedi i $C_2 = R \cdot m$, možemo zaključiti: $0.8 C_0 + 0.008 C_0 k = 0.065 C_0 m$.

Kada jednakost podijelimo s C_0 i iskoristimo da je $k = \frac{q(m+1)}{24} = \frac{10(m+1)}{24}$ slijedi:

$$0.8 + 0.008 \cdot \frac{10(m+1)}{24} = 0.065 m.$$

Rješenje ove linearne jednadžbe jest broj $m = 13$. Dakle, ovaj kredit je odobren na 13 mjeseci.



3.1. Složeni kamatni račun

U uvodu smo se podsjetili na osnovne pojmove iz jednostavnog kamatnog računa. Ovdje ćemo upoznati jedan, bitno drugičji način obračunavanja kamata, koji se, po prirodi stvari nameće sam od sebe.



Pri svakom kamatnom računu radi se o poslovnom odnosu dviju osoba, fizičkih ili pravnih. Mogu to biti pojedinci, udruge, banke, štedionice i slično. Jedna od njih, kako smo rekli jest dužnik, a druga vjerovnik. Primjerice, u paru: osoba – banka, svaki od njih može biti ili jedno ili drugo. Primjerice, ako osoba uloži u banku ili štedionicu neki iznos, onda je ta osoba vjerovnik i banka joj plaća kamate. Ako li pak ta osoba podigne zajam (kredit) u banci, onda je ta osoba dužnik i plaća kamate banci.

Primjer 1.

Netko je uložio u banku 50 000 kuna, uz 10 % godišnjih kamata. Kolika je vrijednost te glavnice nakon prve, druge, treće, četvrte i pete godine? U ugovoru stoji da štediša može (ali ne mora) ulog podignuti na kraju svake godine.

Uvedemo li uobičajene oznake, imamo $C_0 = 50\,000$, $p = 10\%$; treba izračunati C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , C_5 . Vrijednost kamata za jednu godinu iznosi:

$$K_1 = C_0 \cdot \frac{p}{100} = 50\,000 \cdot \frac{10}{100}, \quad K_1 = 5000;$$

$$C_1 = C_0 + K_1 = 50\,000 + 5000, \quad C_1 = 55\,000 \text{ kuna};$$

$$C_2 = C_0 + 2C_1 = 50\,000 + 1000 = 60\,000 \text{ kuna};$$

$$C_3 = 65\,000 \text{ kuna}; \quad C_4 = 70\,000 \text{ kuna}; \quad C_5 = 75\,000 \text{ kuna}.$$

Zaustavimo se još malo na ovome primjeru.

Pokažimo kako je vjerovnik (sada je to osoba koja je uložila novac u banku) mogla, na kraju štednje podignuti iznos veći od $C_5 = 75\,000$ kuna, uz iste uvjete ulaganja. Zamislimo da štediša na kraju prve godine podigne svoj novac, to jest i glavnici i kamatu (55 000 kuna) i istog dana ih ponovno uloži na štednju. Sada će se kamate za sljedeću godinu obračunavati na iznos od te trenutne vrijednosti glavnice. Zato će kamate za sljedeću godinu biti $55\,000 \cdot \frac{10}{100} = 5500$ kuna. Vrijednost glavnice na kraju druge godine je jednaka $55\,000 + 5500$, to jest $C_2 = 60\,500$ kuna. Sada ulagač ponovi taj isti postupak i na kraju treće godine, to jest ponovo podigne sav svoj novac i uloži ga na banku. Kamate za sljedeću godinu će iznositi $60\,500 \cdot \frac{10}{100} = 6050$ kuna. Vrijednost glavnice na kraju treće godine je jednaka: $C_3 = 60\,500 + 6050$, to jest $C_3 = 66\,550$ kuna. Istim postupkom dobijemo $C_4 = 73\,205$ kuna i $C_5 = 80\,525.50$ kuna.

Vidimo da se ovakvim postupkom dobiva veća kamata nego uobičajenim jednostavnim kamatnim računom. U ovom slučaju te su kamate čak za 5525.50 kuna veće od onih koje su obračunate prvim postupkom.

Sada će se sigurno netko upitati: zašto štediš ne postupaju kao u našem primjeru i ne uvećaju dobit na svoje uloge?

Odgovor na ovo pitanje je jednostavan. Bankari su svjesni ove činjenice pa na uloge orocene na vrijeme dulje od jedne godine, kamatu obračunavaju upravo kao da su formalno izvršene one radnje podizanja i ponovnog ulaganja uloga. To se čini upravo zato da se ti postupci izbjegnu, jer bi to bankama samo povećalo administraciju, a time i troškove. Dakle, kamate su u ovom primjeru obračunate jednim novim postupkom koji se zove **složeni kamatni račun**.

U čemu je bitna razlika između obračunavanja kamata jednostavnim i složenim kamatnim računom?

Kamate pri jednostavnom kamatnom računu obračunavaju se na kraju svakog termina na početnu, to jest na istu vrijednost glavnice. Zato su te kamate za bilo koja dva termina međusobno jednakе, to jest one su jednakе i za dva bilo koja jednakaka razdoblja. Kod složenoga kamatnog računa, kamate za prvi termin (godinu) obračunavaju se na glavnici C_0 , a za drugi termin na glavnici $C_1 = C_0 + K_1$. Budući da je $C_1 > C_0$, kamate će na kraju drugog termina biti veće od kamata na kraju prvog termina. Iz istog razloga su i kamate nakon trećeg termina veće od kamata nakon drugog termina.

Zaključujemo da vrijedi općenito $K_1 < K_2 < K_3 < \dots K_n < K_{n+1} < \dots$

Primjer 2.

Glavnica od 5326 kuna uložena je uz 8 % jednostavnih kamata na vrijeme od četiri godine. Kolika je razlika u konačnoj vrijednosti iste glavnice uložene uz iste uvjete uz složeno ukamaćivanje?

Prije rješavanja zadatka, procijeni koja je od tih dviju vrijednosti veća.

► Jednostavne kamate daju vrijednost glavnice:

$$\begin{aligned} C_0 \left(1 + \frac{4p}{100}\right) &= 5326 \cdot \left(1 + \frac{32}{100}\right) = 5326 \cdot \frac{132}{100} = 5326 \cdot 1.32 \\ &= 7030.32 \text{ kuna.} \end{aligned}$$

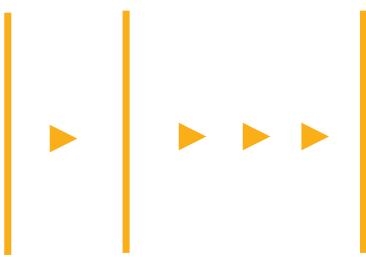
Da bismo izračunali vrijednost glavnice obračunate složenim ukamaćivanjem, postupamo ovako:

$$C_1 = C_0 + C_0 \cdot \frac{p}{100} = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right),$$

$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot \frac{p}{100} = C_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Već naslućujemo da je $C_4 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^4$. Odavde je $C_4 = 7245.96$ kuna. Veća je, prema očekivanju, vrijednost glavnice izračunata složenim računom. Razlika tih dviju vrijednosti iznosi 214.64 kune.

- Zadatak 1.** Na koju vrijednost naraste glavnica od 25 725 kuna, uz 6.25 % godišnjih dekurnih kamata, za 4 godine?



Primjer 3.

Zajam od 380 000 kn odobren je na 4 godine, uz godišnju kamatnu stopu od 11 % i plaćanje jednakih anuiteta krajem godine. Nakon trećeg anuiteta vrijeme otplate se produžava za dvije godine, a zajam se otplaćuje jednakim otplatnim kvotama. Odredi anuitete ovog zajma. Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.

$$C_0 = 380\,000 \text{ kn}, n = 4, p = 11 \implies r = 1.11.$$

Prve tri godine anuiteti su stalni i jednaki, pa vrijedi:

$$a = C_0 \cdot \frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} = 380\,000 \cdot \frac{1.11^4(1.11 - 1)}{1.11^4 - 1} = 122\,484.01 \text{ kn}$$

Dakle, anuiteti za prve tri godine su

$$a_1 = a_2 = a_3 = 122\,484.01 \text{ kn.}$$

Ostatak duga nakon 3. godine je

$$C_3 = a \cdot \frac{r^{n-3} - 1}{r^{n-3}(r-1)} = a \cdot \frac{r - 1}{r(r-1)}, \quad \text{tj.}$$

$$C_3 = \frac{a}{r} = \frac{122\,484.01}{1.11} = 110\,345.96 \text{ kn.}$$

Sljedeće tri godine zajam se otplaćuje po novim uvjetima:

$$C'_0 = C_3 = 110\,345.96 \text{ kn}, \quad n' = 3, \quad p = 11,$$

a otplatne kvote su jednake:

$$R = \frac{C'_0}{n} = \frac{110\,345.96}{3} = 36\,781.99 \text{ kn}$$

$$I_4 = C'_0 \cdot \frac{p}{100} = 110\,345.96 \cdot \frac{11}{100} = 12\,138.056 \text{ kn.}$$

Sada odredimo promjenjive anuitete:

$$a_4 = I_4 + R = 12\,138.056 + 36\,781.99 = 48\,920.05 \text{ kn}$$

$$C_4 = C'_0 - R = 110\,345.96 - 36\,781.99 = 73\,563.97 \text{ kn}$$

$$I_5 = C_4 \cdot \frac{p}{100} = 73\,563.97 \cdot \frac{11}{100} = 8092.04 \text{ kn}$$

$$a_5 = I_5 + R = 8092.04 + 36\,781.99 = 44\,874.03 \text{ kn}$$

$$C_5 = C_4 - R = 73\,563.97 - 36\,781.99 = 36\,781.98 \text{ kn}$$

$$I_6 = C_5 \cdot \frac{p}{100} = 36\,781.99 \cdot \frac{11}{100} = 4046.02 \text{ kn}$$

$$a_6 = I_6 + R = 4046.02 + 36\,781.99 = 40\,828.01 \text{ kn.}$$

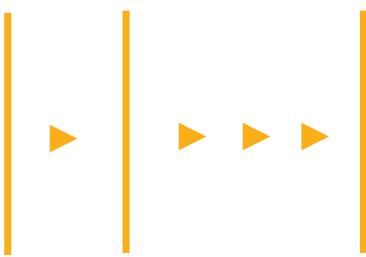
Anuiteti za zadnje tri godine otplate zajma su:

$$a_4 = 48\,920.05 \text{ kn}, \quad a_5 = 44\,874.03 \text{ kn}, \quad a_6 = 40\,828.01 \text{ kn.}$$



Zadatci 4.5.

- 1.** Jednom poduzeću je odobren zajam od:
 1) 500 000 kn; 2) 600 000 kn
 na tri godine, uz godišnju kamatnu stopu od 9.5 % i plaćanje jednakih anuiteta krajem godine. Nakon uplate drugog anuiteta mijenja se godišnji kamatnjak na 11 i produžuje rok otplate za 2 godine. Sastavi tablicu otplate zajma. Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan.
- 2.** Odobren je zajam od 400 000 kn na 4 godine, uz godišnji kamatnjak
 1) 9 %; 2) 10 %;
 i plaćanje anuiteta krajem godine, te jednake otplatne kvote. Nakon plaćenog trećeg anuiteta rok otplate se produžuje za godinu dana, a zajam se nastavlja otplaćivati jednakim anuitetima. Izradi otplatnu tablicu. Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan.
- 3.** Obrtniku je odobren zajam od 350 000 kn na
 1) 6 godina; 2) 8 godina;
 uz godišnji kamatnjak 8.5 % i plaćanje jednakih anuiteta krajem godine. Nakon uplate 4. anuiteta zajam se nastavlja otplaćivati jednakim otplatnim kvotama, uz godišnju kamatnu stopu od 9 %. Odredi otplatne kvote ovog zajma. Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan.
- 4.** Zajam od:
 1) 440 000 kn ; 2) 480 000 kn ; 3) 520 000 kn odobren je na 4 godine uz godišnju kamatnu stopu od 10 % i plaćanje jednakih anuiteta krajem godine. Nakon uplate drugog anuiteta kamatna stopa se mijenja na 11.2 %, a otplata se nastavlja po modelu jednakih otplatnih kvota. Sastavi otplatnu tablicu. Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.
- 5.** Zajam od 550 000 kn odobren je na 4 godine uz godišnju kamatnu stopu od:
 1) 9 %; 2) 12 %
 i plaćanje jednakih anuiteta potkraj godine. Nakon uplate drugog anuiteta vrijeme otplate zajma se produžuje za godinu dana. Odredi anuitete ovog zajma. Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan.
- 6.** Zajam od 480 000 kn odobren je na 4 godine uz 10 % godišnjih kamata i plaćanje anuiteta krajem godine, tako da je svaki anuitet dvostruko veći od prethodnog. Nakon uplate trećeg anuiteta vrijeme otplate zajma se produžuje za 2 godine, a zajam se nastavlja otplaćivati jednakim anuitetima. Odredi anuitete. Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan.
- 7.** Zajam od 650 000 kn je odobren na tri godine, uz godišnju kamatnu stopu od 10.9 % i plaćanje anuiteta krajem godine, pri čemu je svaka otplatna kota trostruko veća od prethodne. Nakon uplate drugog anuiteta vrijeme otplate zajma se produžuje za tri godine, a zajam se nastavlja otplaćivati jednakim otplatnim kvotama. Odredi anuitete. Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan.
- 8.** Poduzeću je odobren zajam od 540 000 kn na:
 1) 4 godine; 2) 6 godina,
 uz godišnji kamatnjak 8 %, jednakе otplatne kvote i plaćanje anuiteta krajem godine. Nakon uplate drugog anuiteta kamatna stopa se mijenja na 7.5 % i počinje otplata zajma po modelu u kojem je svaki anuitet za 20 % veći od prethodnog. Odredi anuitete zajma. Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan.



Primjer 7.

Zadan je trokut ABC , pri čemu su: $A(-1, 4)$, $B(1, -3)$, $C(5, 2)$. Odredi jednadžbu pravca na kojem leži težišnica iz vrha B ovog trokuta.

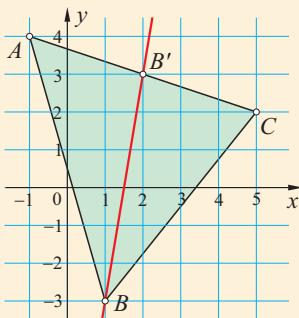
Prisjetimo se!

Težišnica jest dužina unutar trokuta koja spaja jedan njegov vrh i polovište njemu nasuprotne stranice.

U ovom zadatku tražimo pravac na kojem leži težišnica t_b , pa ćemo najprije odrediti polovište stranice \overline{AC} zadanog trokuta, tj. točku B' .

Za koordinate polovišta dužine \overline{AC} vrijedi: $x' = \frac{1}{2}(x_A + x_C)$ i $y' = \frac{1}{2}(y_A + y_C)$. Zato zaključujemo:

$$x' = \frac{-1 + 5}{2} = 2 \quad \text{i} \quad y' = \frac{4 + 2}{2} = 3.$$



Sada je $B'(2, 3)$, a traženi pravac jest pravac BB' za koji vrijedi:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \\ y - 3 &= \frac{-3 - 3}{1 - 2}(x - 2) \\ y - 3 &= 6(x - 2) \\ y &= 6x - 9. \end{aligned}$$

Grafička metoda određivanja presjeka pravaca (tj. rješavanja sustava linearnih jednadžbi s dvjema nepozanicama) često nam pomaže da lakše razumijemo neke teorijske činjenice.

Pokažimo to na sljedećim primjerima.

Primjer 8.

U kojoj se točki sijeku pravci $2x - 3y + 9 = 0$ i $-4x + 6y + 2 = 0$?

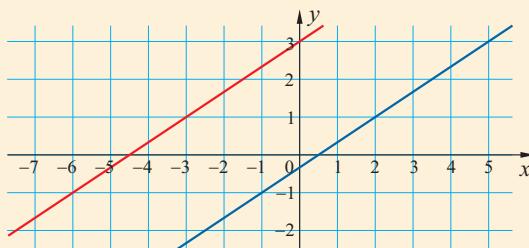
Riješimo sustav metodom suprotnih koeficijenata:

$$\begin{array}{rcl} 2x - 3y + 9 = 0 & / \cdot 2 \\ -4x + 6y + 2 = 0 \\ \hline 4x - 6y + 18 = 0 \\ -4x + 6y + 2 = 0 \\ \hline 20 = 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ + \\ + \end{array} \right\}$$

$20 = 0 \implies$ nije istinito niti za jedan par (x, y) .

Znači, zadani sustav **nema rješenja**!

Objasnimo dobivene rezultate grafičkom metodom rješavanja. Dakle, načrtajmo zadane pravce u istom koordinatnom sustavu.



Pravci su paralelni (i sigurno se ne sijeku).

Do istog zaključka mogli smo doći i bez crtanja pravaca. Jer, ako obje jednadžbe zapišemo u eksplicitnom obliku, slijedi:

$$\begin{aligned} 3y &= 2x + 9 \quad / : 3 & 6y &= 4x - 2 \quad / : 6 \\ y &= \frac{2}{3}x + 3 & y &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Očito pravci imaju isti koeficijent smjera k , tj. isti nagib prema osi x , što znači da su paralelni i zato sustav nema rješenja.

Matematičkim rječnikom (operatorima) pišemo: $p_1 \parallel p_2 \iff k_1 = k_2$.

Zadatak 2. U kakvom su međusobnom položaju pravci:

- | | |
|----------------------------------|---|
| 1) $y = 3x - 1$ i $y = 3x + 2$; | 2) $2x - y + 4 = 0$ i $2y - 4x - 5 = 0$; |
| 3) $x = 3$ i $2x + 1 = 0$; | 4) $y + 1 = 0$ i $y = 2$? |

Primjer 9.

Odredi sjecište pravaca $y - 2x + 3 = 0$ i $4x - 2y - 6 = 0$.

Pripadni sustav jednadžbi riješimo metodom supstitucije:

$$\begin{aligned} y &= 2x - 3 \\ 4x - 2y - 6 &= 0 \\ 4x - 2(2x - 3) - 6 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

\implies ova jednakost je istinita za svaku točku (x, y) zadanih pravaca.

Kažemo da sustav ima beskonačno mnogo rješenja.

Kako objašnjavamo to rješenje?

Ako obje jednadžbe pravaca zapišemo u eksplisitnom obliku, dobijemo:

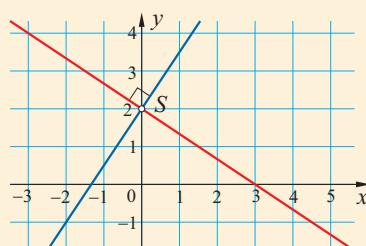
$$y = 2x - 3 \quad \text{i} \quad 2y = 4x - 6 \implies y = 2x - 3.$$

Dakle, obje jednadžbe sustava znače isti pravac. Sve točke tih pravaca su zajedničke, pa zato **sustav ima beskonačno mnogo rješenja!**

Naučimo još nešto o prvcima.

Primjer 10.

Nacrtaj pravce $y = \frac{3}{2}x + 2$ i $2x + 3y - 6 = 0$ i odredi njihovo sjecište.



Već nam je iz dobivenog grafa jasno da je presjek točka $S(0, 2)$.

Ali, slika nam pokazuje i da su nacrtani pravci međusobno okomiti!

Kako ćemo znati tu činjenicu, a da pri tome ne moramo nužno i crtati zadane pravce?

Jednadžbe pravaca prikažimo u eksplisitnom obliku:

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{2}x + 2 \quad \text{i} \quad 3y = -2x + 6 \quad / : 3 \\ &\quad y = -\frac{2}{3}x + 2 \end{aligned}$$

Dakle, koeficijenti smjera zadanih pravaca su $k_1 = \frac{3}{2}$ i $k_2 = -\frac{2}{3}$. Opet postoji neka "veza" između dobivenih nagiba, tj. međusobno su recipročni brojevi, suprotnih predznaka.

Zato zaključujemo: *ako su pravci p_1 i p_2 međusobno okomiti, tada su im koeficijenti smjera međusobno recipročni brojevi, suprotni po predznaku.*

Matematičkim oznakama pišemo:

$$p_1 \perp p_2 \iff k_1 = -\frac{1}{k_2} \quad \text{ili} \quad k_1 k_2 = -1.$$

Zadatak 3. U kakvom su međusobnom položaju pravci:

- 1) $2x - y - 2 = 0$ i $x + 2y + 3 = 0$;
- 2) $x = 2$ i $y = 3$;
- 3) $2x + 3 = 0$ i $2y - 1 = 0$?

Primjer 11.

Točkom $A(-2, 6)$ položi pravac okomit na pravac $x + 5y - 6 = 0$.

Uvjet okomitosti dvaju pravaca jest $k_1 = -\frac{1}{k_2}$. Zato najprije odredimo nagib zadanoog pravca:

$$\begin{aligned}x+5y-6 &= 0 \\5y &= -x + 6 \quad / : 5 \\y &= -\frac{1}{5}x + \frac{6}{5}.\end{aligned}$$

Dakle, $k_1 = -\frac{1}{5}$ pa je nagib traženog pravca (kroz točku A) $k_2 = 5$, a jednadžbu ćemo mu odrediti koristeći jednakost $y - y_1 = k_2(x - x_1)$. Uvrstimo koordinate točke $A(-2, 6)$ i dobijemo:

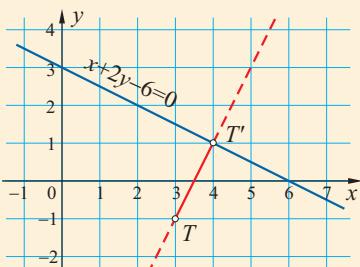
$$\begin{aligned}y - 6 &= 5(x + 2) \\y &= 5x + 16.\end{aligned}$$

Primjer 12.

Odredi ortogonalnu projekciju točke $T(3, -1)$ na pravac $x + 2y - 6 = 0$.

Prisjetimo se!

Ortogonalnu projekciju točke na neki pravac dobijemo presjekom zadanog pravca i pravca kroz zadani točku koji je okomit na taj pravac.



Dakle, najprije odredimo koeficijent smjera zadanog pravca.

$$\begin{aligned}x + 2y - 6 &= 0 \\2y &= -x + 6 \\y &= -\frac{1}{2}x + 3.\end{aligned}$$

Zbog svojstva okomitosti, pravac kroz točku T imat će koeficijent smjera $k = 2$, pa je jednadžba tog pravca:

$$\begin{aligned}y + 1 &= 2(x - 3) \\y &= 2x - 7.\end{aligned}$$

Tražena ortogonalna projekcija točke T bit će rješenje sustava:

$$\begin{cases}x + 2y - 6 = 0 \\y = 2x - 7 \\x + 2(2x - 7) - 6 = 0 \\5x = 20 \\x = 4 \implies y = 1.\end{cases}$$

Rješenje zadatka jest točka $T'(4, 1)$.

Primjetimo i ovo! Dobili smo točku na zadanom pravcu koja je najbliža točki T , što znači da možemo odrediti i udaljenost od točke T do tog pravca.

Sjeti se! $d(T, T') = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$ (udaljenost dviju točaka u koordinatnoj ravnini).

Rješavanjem prethodnog primjera u općenitosti zaključujemo:

$$d(T, T') = d(T, p) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

udaljenost točke $T(x, y)$ od pravca $p \dots Ax + By + C = 0$.

Primjer 13.

Odredi udaljenost točke $T(1, -2)$ do pravca $24x - 10y - 22 = 0$.

Koristimo prethodno dobivenu jednakost:

$$d(T, p) = \frac{|24 \cdot 1 - 10 \cdot (-2) - 22|}{\sqrt{24^2 + (-10)^2}} = \frac{11}{13}.$$

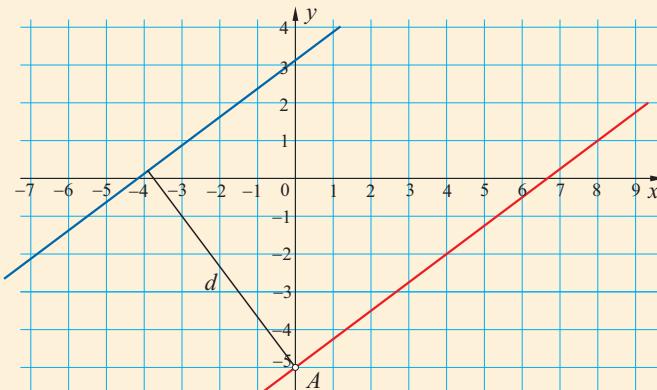
Primjer 14.

Kolika je udaljenost između pravaca $p \dots 3x - 4y - 20 = 0$ i $s \dots 6x - 8y + 25 = 0$?

Najprije primijetimo da su zadani pravci međusobno paralelni. Dakle, odaberemo po volji točku na jednom od zadanih pravaca i odredimo njezinu udaljenost do drugog pravca.

Neka je odabrana točka na pravcu p , npr. $A(0, -5)$. Sada je:

$$d(p, s) = d(A, s) = \frac{|6 \cdot 0 - 8 \cdot (-5) + 25|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \frac{65}{10} = \frac{13}{2}.$$



Zadatci 5.2.

1. Odredi koordinate sjecišta pravaca zadanih jednadžbama:

- 1) $x = 2$, $3x + y = 7$;
- 2) $y + 3 = 0$, $2x + y - 2 = 0$;
- 3) $2x - 6 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$;
- 4) $x = 3y$, $2x + 3y - 18 = 0$;
- 5) $y = \frac{4}{3}x$, $4x + 3y + 1 = 0$;
- 6) $2x + y = 0$, $3x + 4y + 5 = 0$.

2. U kojoj točki se sijeku pravci:

- 1) $x - y + 4 = 0$, $x + 2y = 0$;
- 2) $x + y + 3 = 0$, $3x - 2y + 9 = 0$;
- 3) $2x - y + 6 = 0$, $x - 2y + 6 = 0$;
- 4) $2x - 3y + 11 = 0$, $3x - y + 5 = 0$;
- 5) $2x + 3y - 2 = 0$, $4x - 9y + 1 = 0$;
- 6) $8x - 6y + 25 = 0$, $4x - 3y + 25 = 0$.

3. Odredi jednadžbu pravca koji prolazi sjecištem pravaca p_1 i p_2 i zadanom točkom T , ako je:

- 1) $p_1 \dots y+3=0$, $p_2 \dots y=\frac{1}{2}x-5$, $T(3, 3)$;
- 2) $p_1 \dots 2x-3y+11=0$, $p_2 \dots 3x-y+5=0$, $T(1, 2)$;
- 3) $p_1 \dots x = 3y$, $p_2 \dots 2x + 3y - 18 = 0$, $T(0, 0)$;
- 4) $p_1 \dots y = 2x + 6$, $p_2 \dots -\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 0$, $T(-1, 4)$.

4. Odredi koordinate vrhova i površinu trokuta ABC ako mu stranice leže na prvcima:

- 1) $a \dots y = x + 3$, $b \dots y = -3x + 5$, $c \dots x + 2y = 0$;
- 2) $a \dots y = -8x + 45$, $b \dots 2x - 3y + 5 = 0$, $c \dots 4x + 7y - 3 = 0$;
- 3) $a \dots 3x + 4y - 47 = 0$, $b \dots 21x + 8y - 49 = 0$, $c \dots 9x + 2y - 31 = 0$.

5. Nadji jednadžbu pravaca na kojima leže dijagonale četverokuta $ABCD$ kojemu su vrhovi:

$$A(-1, -4), B(6, -6), C(7, 4), D(2, 2).$$

Pripada li sjecište dobivenih dijagonala osi apscisa?

6. Odredi realni parametar a tako da:

- 1) pravac $y = \frac{a+1}{3}x + 2$ ne siječe pravac $y = 2x - 3$;

- 2) pravac $y = \frac{a-2}{4}x - 1$ ne siječe pravac $y = \frac{2a+3}{2}x + 4$;

- 3) pravac $12x - ay + 13 = 0$ ne siječe pravac $3x + 2y + 7 = 0$.

7. Odredi realni parametar a tako da su zadani pravci paralelni:

- 1) $y = -4x + 1$, $5x + ay - 3 = 0$;
- 2) $x - 2y + 6 = 0$, $ax + 3y + 7 = 0$;
- 3) $(a+1)x + 2y + 4 = 0$, $3x + ay - 8 = 0$.

8. Odredi realni parametar a tako da je pravac $(a+3)x + (a-4)y + a - 17 = 0$

- 1) paralelan sa osi x ;
- 2) paralelan sa osi y ;
- 3) prolazi ishodištem koordinatnog sustava.

9. Koliki je realni parametar m ako se pravci $(m-2)x + 4y = 9$ i $(m+1)x - 3y - 18 = 0$ sijeku na osi apscisa? Odredi to sjecište.

10. U zadanim jednadžbama pravaca odredi realni parametar p tako da pravci p_1 i p_2 budu međusobno okomiti:

- 1) $p_1 \dots x + 3y - 6 = 0$, $p_2 \dots px - 2y + 1 = 0$;
- 2) $p_1 \dots 2x - py + 2 = 0$, $p_2 \dots x + 2y + 4 = 0$;
- 3) $p_1 \dots px + y + 3 = 0$, $p_2 \dots px - 4y - 3 = 0$;
- 4) $p_1 \dots px + 3y - 4 = 0$, $p_2 \dots 2x - py - 1 = 0$;
- 5) $p_1 \dots px + 2y - 1 = 0$, $p_2 \dots 3x + py - 2 = 0$.

11. Odredi jednadžbu pravca kroz točku $A(5, 1)$ koji je:

- 1) paralelan;
- 2) okomit

na pravac $-\frac{x}{7} + \frac{y}{6} = 1$.

12. Kako glasi jednadžba pravca koji prolazi točkom $A(-3, -4)$, a okomit je na pravac PR , $P(-5, 2)$, $R(4, -1)$?

13. Odredi ortogonalnu projekciju točke $T(-1, 4)$ na pravac $2x + 3y + 3 = 0$.

14. Odredi ortogonalnu projekciju točke $A(-7, -2)$ na pravac $\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1$.
15. Odredi točku simetričnu točki $T(1, 6)$ s obzirom na pravac $y = \frac{2}{3}x + 2$.
16. Koliko je točka $T(-1, 1)$ udaljena od pravca $5x - 12y - 22 = 0$?
17. Odredi međusobnu udaljenost pravaca:
- 1) $8x - 6y + 25 = 0$, $4x - 3y + 25 = 0$;
 - 2) $3x + 5y - 15 = 0$, $3x + 5y + 9 = 0$.

Povijesni kutak



LOGARITAMSKE TABLICE

Logaritamske tablice koje je uredio **Juraj Majcen** prema tablicama koje su objavljene 1920. godine, a koje je izradio, tada već preminuli njemački matematičar **Oscar Schlömilch**.

| II. GRČKI ALFABET | | | | | |
|-------------------|---------|-------|--------|----------|----------|
| Slovo | Igovor | Slavo | Igovor | Slavo | Igovor |
| A, α | alfa | Y, γ | éta | N, ν | ni |
| B, β | beta | G, δ | theta | E, ε | ei |
| I, ι | gamma | H, η | eta | K, κ | ke |
| V, υ | delta | I, ι | kappa | L, λ | kaikrokn |
| Z, ζ | epsilon | M, μ | pi | P, π | Phi |
| T, Τ | delta | N, ν | rho | X, ρ | psi |
| Φ, φ | epikton | A, λ | lambda | R, ρ | tau |
| Ω, ω | drepta | M, μ | mi | S, σ (τ) | sigma |

| III. RIMSKI BROJOVI | | | | | |
|---------------------|--------------|-------------|-------------|-----------|---------------|
| I = 1 | IX = 9 | XI = 21 | LX = 60 | CC = 200 | Cat = 900 |
| II = 2 | VII = 7 | XII = 12 | XXX = 30 | CCC = 300 | CMXC = 990 |
| III = 3 | XIV = 14 | XIII = 11 | XXXIX = 39 | CD = 400 | CMXCI = 991 |
| IV = 4 | XV = 15 | XXII = 22 | LXXXIX = 89 | D = 500 | CMXCI = 999 |
| V = 5 | XVI = 16 | XXIII = 23 | XLI = 40 | XX = 20 | MM = 2000 |
| VI = 6 | XVII = 17 | XXIV = 24 | XLII = 42 | XXX = 30 | MMI = 2001 |
| VII = 7 | XVIII = 18 | XXV = 25 | XLIII = 43 | XL = 40 | MMII = 2002 |
| VIII = 8 | XIX = 19 | XXVI = 26 | XLIV = 44 | XLIX = 49 | MMIII = 2003 |
| XII = 10 | XXVII = 27 | XXVIII = 28 | XLV = 45 | XLIX = 49 | MMIV = 2004 |
| XII = 10 | XXVIII = 28 | XXIX = 29 | XLVI = 46 | XLIX = 49 | MMV = 2005 |
| XII = 10 | XXX = 30 | XXXI = 31 | XLVII = 47 | XLIX = 49 | MMVI = 2006 |
| XII = 10 | XXXII = 32 | XXXIII = 33 | XLVIII = 48 | XLIX = 49 | MMVII = 2007 |
| XII = 10 | XXXIV = 34 | XXXV = 35 | XLIX = 49 | XLIX = 49 | MMVIII = 2008 |
| XII = 10 | XXXVI = 36 | XXXVII = 37 | L = 50 | XLIX = 49 | MMIX = 2009 |
| XII = 10 | XXXVIII = 38 | XXXIX = 39 | C = 100 | XLIX = 49 | MMX = 2010 |
| XII = 10 | XXXIX = 39 | XL = 50 | CCC = 300 | XLIX = 49 | MMXI = 2011 |

| IV. SIMBOLI DECIMALNIH PREFIKSA | | | | | |
|---------------------------------|-----------|--------|------------|---------------------------------|--------|
| Vrijednost | Naziv | Simbol | Vrijednost | Naziv | Simbol |
| 10^{-1} | desetina | D, da | 10^{+1} | deset | d |
| 10^{-2} | stočina | k | 10^{+2} | sto | c |
| 10^{-3} | kilo | hk | 10^{+3} | milijuni (decimalni) | m |
| 10^{-4} | milijardi | mk | 10^{+4} | milijun | mn |
| 10^{-5} | milijardi | mk | 10^{+5} | milijardi (decimalni) | bm |
| 10^{-6} | milijardi | mk | 10^{+6} | milijardi milijuni (decimalni) | mm |
| 10^{-7} | milijardi | mk | 10^{+7} | milijardi milijardi (decimalni) | bm |
| 10^{-8} | terata | t | 10^{+8} | terata (decimalni) | tm |

NB! Treba izbjegavati jedinice između s 10^3 , 10^6 , 10^9 i 10^{12} , 10^3 , 10^6 , 10^9 i 10^{12} , 10^3 , 10^6 , 10^9 i 10^{12} .

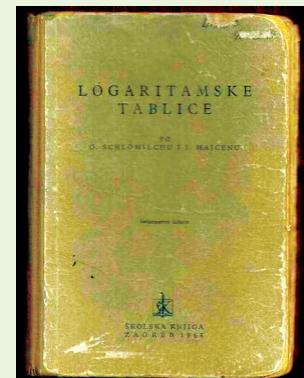
V. OZNAKE I DODATNI NORMALNI FORMATE PAPARA

Čvorove grupe A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, X, Y, Z označe leže 1:V (G.I.414). Osnovni format A, A₁, A₂ ... A_n (ili A₁ do A_n) je uključen u klase broja konstrukcijskih brojeva prevojnog osnovnog formata. Način na koji se grupa A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, X, Y, Z razlikuje od grupa A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, X, Y, Z je uključen u klase broja konstrukcijskih brojeva prevojnog osnovnog formata. Razlikuju se grupa A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, X, Y, Z od grupa A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, X, Y, Z.

Ostale grupe imaju osnovne formate:

B₁..., 1000 × 3414 mm; C₁..., 917 × 1297 mm; D₁..., 771 × 1090 mm.

30



Osim logaritamskih tablica, u knjizi se nalaze sljedeći sadržaji: Prirodne vrijednosti trigonometrijskih funkcija, Logaritmi trigonometrijskih funkcija, Duljine kružnih kukova, 2. i 3. Potencije, vrijednosti $\frac{1000}{n}$, 2. i 3. Korijeni brojeva od 1 do 100, Logaritmi kamatnih faktora, Metarske i ostale mjere, Matematičke, fizičke i astronomski konstante, periodni sustav elemenata, Geografske koordinate. Knjiga završava popisom svih formula iz srednjoškolske matematike.

MATEMATIČKE TABLICE I FORMULE

ZA TEHNIČKE ŠKOLE

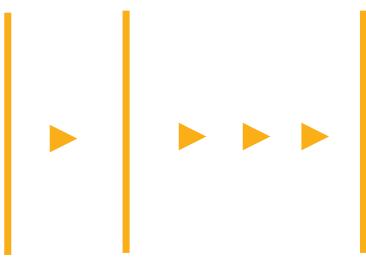
Snimljeno:

VLADIMIR JIRASEK

ZAGREB 1957

Matematičke tablice i formule za tehničke škole, knjigu je sastavio **Vladimir Jirasek**. Ova je knjiga dosta opširnija od prethodne, to jest sadrži neka matematička i ina područja koja ne spadaju standardni srednjoškolski (gimnazijski) program. To najbolje pokazuje podatak o broju tablica: u prethodnoj knjizi ima ih 10, a u ovoj 30.

SKOLSKA KNIJIGA
ZAGREB 1957

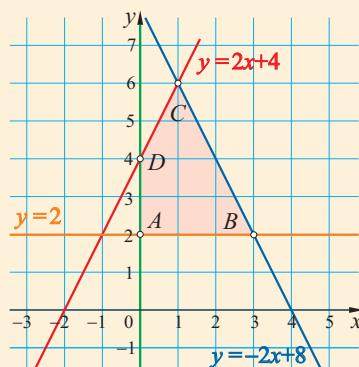


Primjer 2.

Odredi minimum funkcije $f(x, y) = 10x + 5y$ na skupu točaka ravnine za koje vrijedi:

$$\begin{cases} -2x + y - 4 \leq 0 \\ 2x + y - 8 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 2 \end{cases}$$

Grafički prikažimo rješenje zadanog sustava!



Očito smo dobili (konveksni) četverokut $ABCD$, s vrhovima: $A(0, 2)$, $B(3, 2)$, $C(1, 6)$, $D(0, 4)$.

Provjerimo vrijednost funkcije f u dobivenim vrhovima:

$$f(0, 2) = 10 \cdot 0 + 5 \cdot 2 = 10$$

$$f(3, 2) = 10 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 40$$

$$f(1, 6) = 10 \cdot 1 + 5 \cdot 6 = 40$$

$$f(0, 4) = 10 \cdot 0 + 5 \cdot 4 = 20.$$

Lako se vidi da je minimum funkcije 10 i da ga funkcija postiže u točki A .

Primjer 3.

Maksimiziraj funkciju $f(x, y) = 2x + y$ na skupu točaka ravnine, uz uvjete:

$$\begin{cases} 2x + y - 10 \leq 0 \\ x + 2y - 8 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Rješenje zadanog sustava je svaka točka dobivenog presjeka, tj. skup prikazan na slici desno.

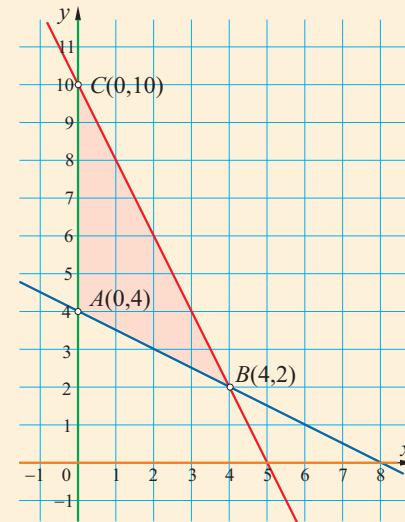
Provjerimo vrijednost zadane funkcije u dobivenim vrhovima trokuta:

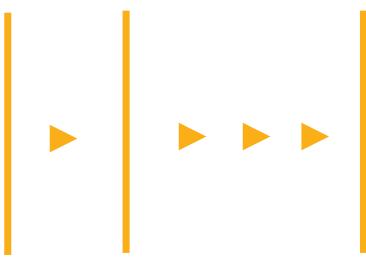
$$f(0, 4) = 2 \cdot 0 + 4 = 4$$

$$f(4, 2) = 2 \cdot 4 + 2 = 10$$

$$f(0, 10) = 2 \cdot 0 + 10 = 10$$

Funkcija je maksimalnu vrijednost postigla u točkama B i C , a to znači da zadana funkcija svoj maksimum postiže i na cijeloj dužini \overline{BC} .







Povijesni kutak

JOHANN CARL FRIEDRICH GAUSS

Johann Carl Friedrich Gauss (1777. – 1855.) bio je jedan od najvećih matematičara u povijesti ljudskoga roda. Još za života su ga laskavo prozvali *princeps mathematicorum* (poglavar matematičara).

**Mali matematički rječnik**

Jednadžba pravca (eksplicitni, implicitni, segmentni oblik). Nagib pravca. Presjek pravaca. Kut između dvaju pravaca. Paralelni pravci ($k_1 = k_2$). Okomiti pravci ($k_1 = -\frac{1}{k_2}$). Udaljenost točke do pravca. Konveksni skupovi. Poluravnine. Ekstremi na konveksnom skupu. Problem linearog programiranja (funkcija cilja, optimalno rješenje).

Zadaci 5.7.

- 1.** Zadane sustave riješi primjenom Gauss-Jordanove metode eliminacije:

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ x + 4y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x - y = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 5y = -4 \\ x - 3y = 9 \end{cases}$$

- 2.** Zadane sustave riješi koristeći Gauss-Jordanovu metodu eliminacije:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ -x + y + 4z = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y - z = -1 \\ 2x - y + 3z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = -5 \\ 2x - y - 13z = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = -4 \\ 2x - 2y + 4z = -2 \\ y - 3z = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 5y + 4z = 4 \\ x + 4y + 3z = 1 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$$

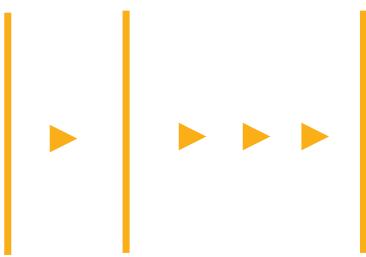
- 3.** Odredi rješenja zadanih sustava jednadžbi koristeći Gauss-Jordanovu metodu eliminacije:

$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 3 \\ 2x - 2y = -6 \\ 2x + 4y - 6z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y + 6z = 4 \\ -4x + 12y - 24z = 7 \\ 3x - 3y + z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 5y - 3z = 2 \\ 4x - y - 2z = 0 \\ -2x - 10y + 6z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ 2x - 3y - 4z = 8 \\ 3x + 9y - 6z = 3 \end{cases}$$



6.2. Plemenite kovine

Iz kemije znamo da se svaka tvar sastoje od molekula, a molekule se sastoje od određenog broja manjih čestica koje zovemo atomima. Što se sastava tiče, postoje dvije vrste molekula; jedne su sastavljene od istovrsnih, a druge od različitih vrsta atoma. Tako se, primjerice, molekula kisika sastoje od dva atoma iste građe, što označavamo O_2 , a molekula sumporne kiseline (H_2SO_4) sastoje se od sedam atoma: dva atoma vodika (H), jednog atoma sumpora (S) i četiri atoma kisika (O).

Tvari čije se molekule sastoje od istovrsnih atoma zovu se kemijski elementi. Kemijske elemente prema njihovu sastavu i svojstvima dijelimo u više skupina. Posebna skupina elemenata su kovine ili metali. Temeljna fizička svojstva kovina su: u normalnim uvjetima (osim žive, Hg) u prirodi se nalaze u čvrstom agregatnom stanju, mogu se kovati (odakle i naziv), dobri su vodiči elektriciteta i topline.

Otkriće i tehnologija kovina uvelike su pridonijeli razvitku i napretku ljudskog roda. Tako su neka razdoblja civilizacije na Zemlji nazvana po kovinama: bakreno, željezno i mijedeno doba.



Posebna vrsta kovina su **plemenite kovine**. Toj skupini pripadaju zlato (Au), srebro (Ag), platina (Pt), iridij (Ir) i još neke kovine.

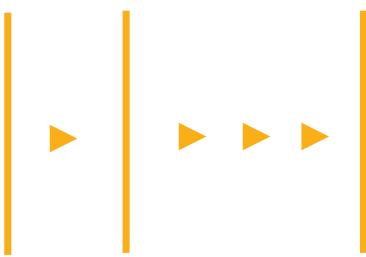
Većina kovina u prirodi nije postojana u čistom stanju.

Tako će, primjerice, željezo u dodiru samo sa zrakom nakon nekog vremena zahrdati. Hrđanje je zapravo oksidacija, to jest spajanje s kisikom. Isto tako, kovine u dodiru s kiselinama daju posebne spojeve koji se zovu soli. Soli i oksidi nemaju ni kemijska ni fizička svojstva kovina.

Plemenite kovine (pogotovo zlato i platina) su praktično postojane, to jest ne mijenjaju se ni nakon dužeg vremena tijekom kojega su izložene vanjskim utjecajima. Zato su zlato i srebro, još u drevnim civilizacijama imali veliku vrijednost, a u razmjeni dobara imali su ulogu koju danas ima novac. I danas države svoje finansijske pričuve polažu u zlatu i nadziru trgovinu zlatom.

Kovine imaju još jedno važno svojstvo koje nismo spomenuli, to je slitivost. Dvije ili više kovina rastale se i u tekućem stanju dobro izmiješaju i nakon hlađenja priđu u čvrsto stanje. Tako nastale tvari zovemo slitinama ili legurama. Pojedini dijelovi slitine ne mijenjaju svoja kemijska svojstva, ali se fizička svojstva, kao što su čvrstoća i električna vodljivost mijenjaju. Zato se, zbog posebnih razloga i za razne potrebe proizvode slitine plemenitih kovina s neplemenitim.

Sve što je dosad rečeno su kratki kvalitativni podatci o plemenitim kovinama. Kako se definiraju kvantitativne vrijednosti slitina plemenitih kovina, pokazat ćemo u sljedeće dvije točke.



7.2. Verižni račun

Ako imamo problem u kojem veličina x_1 zavisi o veličini x_2 , veličina x_2 zavisi o veličini x_3 , veličina x_3 o x_4 i tako redom do neke veličine x_{n-1} , koja zavisi o veličini x_n , tada je očito i veličina x_1 zavisna o veličini x_n . **Verižni račun** bavi se upravo ovakvim problemima (pri čemu su navedene veličine međusobno razmjerne).

Promotrimo jedan jednostavan primjer.

Primjer 1.

Cijena 5 kg jabuka je ista kao cijena 3 kg krušaka, 4 kg krušaka stoji kao 7 kg naranči, 9 kg naranči ima istu cijenu kao 4 kg grožđa. Ako 7 kg grožđa stoji 105 kuna, kolika je cijena 9 kg jabuka?

Uvedimo označke: x_1 – cijena za 1 kg jabuka;
 x_2 – cijena za 1 kg krušaka;
 x_3 – cijena za 1 kg naranči;
 x_4 – cijena za 1 kg grožđa.

Iz zadanih podataka zaključujemo:

$$5x_1 = 3x_2, \quad 4x_2 = 7x_3, \quad 9x_3 = 4x_4, \quad 7x_4 = 105 \text{ kn.}$$

Očito najprije računamo cijenu grožđa, jer je

$$x_4 = 105 : 7 = 15 \text{ kn.}$$

Sada je

$$x_3 = \frac{4}{9}x_4 = \frac{20}{3} \text{ kn;}$$

$$x_2 = \frac{7}{4}x_3 = \frac{35}{3} \text{ kn;}$$

$$x_1 = \frac{3}{5}x_2 = 7 \text{ kn.}$$

Rješenje zadatka je $9x_1 = 63 \text{ kn.}$



Primjenom verižnog računa zaključujemo (zbog navedenih jednakosti):

$$5x_1 \cdot 4x_2 \cdot 9x_3 \cdot 7x_4 = 3x_2 \cdot 7x_3 \cdot 4x_4 \cdot 105,$$

pa vrijedi

$$x_1 = \frac{3 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 105 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4}{5 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 7 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4}$$

ili $x_1 = 7 \text{ kn}$, odnosno $9x_1 = 63 \text{ kn.}$

Kako sastavljamo karakterističnu shemu za verižni račun?

Uspostavimo niz redaka od po dva člana, s time da u prvi redak upišemo ono što se traži, tj.

$$x \text{ kuna} \rightarrow 9 \text{ kg jabuka}$$

Svaki sljedeći redak započinjemo veličinom drugog člana prethodnog rečka. Verižni račun uvijek završava veličinom kojom je započeo (u ovom slučaju kuna).

Tako vrijedi:

$$x \text{ kuna} \rightarrow 9 \text{ kg jabuka}$$

$$5 \text{ kg jabuka} \rightarrow 3 \text{ kg krušaka}$$

$$4 \text{ kg krušaka} \rightarrow 7 \text{ kg naranči}$$

$$9 \text{ kg naranči} \rightarrow 4 \text{ kg grožđa}$$

$$7 \text{ kg grožđa} \rightarrow 105 \text{ kuna}$$

Sada je

$$x = \frac{9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 105}{5 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 7} = 63 \text{ kn.}$$

Primjer 2.

Jedna tona nekog proizvoda u Beču stoji kao 5 m^2 građevinskog zemljišta u tom gradu. 7 m^2 zemljišta u Beču ima istu cijenu kao i 10 m^2 takvog zemljišta u Zagrebu, a 8 m^2 građevinskog zemljišta u Zagrebu stoji 1440 kn. Ako 20 eura vrijedi 150 kn, koliko će eura stajati 35 tona navedenog proizvoda u Beču?

Postavimo verižni račun:

$$x \text{ eura} \rightarrow 35 \text{ t}$$

$$1 \text{ t} \rightarrow 5 \text{ m}^2 \text{ zem. u Beču}$$

$$7 \text{ m}^2 \text{ zem. u Beču} \rightarrow 10 \text{ m}^2 \text{ zem. u Zagrebu}$$

$$8 \text{ m}^2 \text{ zem. u Zagrebu} \rightarrow 1440 \text{ kn}$$

$$150 \text{ kn} \rightarrow 20 \text{ eura}$$

Sada je

$$x = \frac{35 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 1440 \cdot 20}{1 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 150} = 6000 \text{ eura.}$$

Cijena 35 t zadatog proizvoda u Beču je 6000 eura.

Primjer 3.

3ℓ vina stoji kao 10 kg šećera, 3 kg šećera ima istu cijenu kao i 2 kg tjestenine, 3 kg tjestenine stoji kao 2ℓ ulja, a 4ℓ ulja je 54 kune. Kolika je cijena za 5ℓ vina?

Po verižnom računu zaključujemo:

$$x \text{ kuna} \rightarrow 5 \ell \text{ vina}$$

$$4 \ell \text{ vina} \rightarrow 10 \text{ kg šećera}$$

$$3 \text{ kg šećera} \rightarrow 2 \text{ kg tjestenine}$$

$$3 \text{ kg tjestenine} \rightarrow 2 \ell \text{ ulja}$$

$$4 \ell \text{ ulja} \rightarrow 54 \text{ kune}$$

