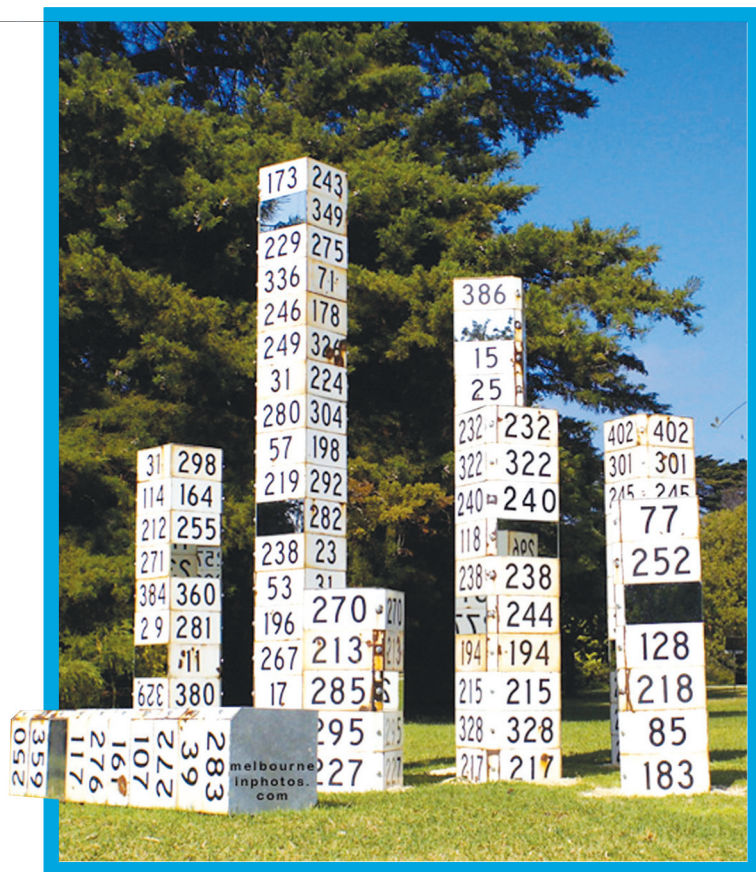


1 Brojevi



“Casualty Numbers”, skulptura u parku Werribee, Melbourne

- Brojevni sustavi.....2
- Matematička indukcija.....16
- Binomni poučak.....24
- Prirodni, cijeli i racionalni brojevi.....36
- Realni brojevi.....49
- Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja.....58
- Potenciranje i korjenovanje kompleksnih brojeva.....70

Broj je osnovni pojam matematike. Tijekom dosadašnjeg školovanja upoznali smo temeljna svojstva skupa prirodnih brojeva $\mathbf{N}$, cijelih brojeva $\mathbf{Z}$, racionalnih $\mathbf{Q}$, realnih $\mathbf{R}$ i kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$. Svakako najjednostavniji među njima je skup prirodnih brojeva. Na početku ovog poglavlja istaknut ćemo neka dodatna svojstva ovog skupa. Pokazat ćemo zatim kako se krenuvši od skupa $\mathbf{N}$ dobivaju složeniji skupovi brojeva. Detaljnije ćemo obraditi svojstva realnih brojeva, jer se na njima zasniva matematička analiza, disciplina koju ćemo proučavati u nastavku, kao i svojstva kompleksnih brojeva, zbog njihove važnosti u primjenama.

1.1. Brojevi sustavi

■ Pozicijski zapis brojeva

Način na koji mi danas zapisujemo brojeve ima dvije bitne karakteristike. To je **pozicijski zapis**, koji koristi **deset** različitih znamenaka: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Što karakterizira pozicijski zapis? Vrijednost znamenke nije određena samo njezinim iznosom, već i *mjestom* u zapisu broja na kojemu se ona nalazi. Svako mjesto u zapisu broja ima svoju *težinu*, koja se povećava deset puta za svaki pomak znamenke ulijevo: u broju 237 znamenka 7 je znamenka **jedinica** koja vrijedi 7, znamenka 3 je znamenka **desetica** koja vrijedi 30 (trideset) jedinica, a 2 je znamenka **stotica** koja vrijedi 200 (dvije stotine) jedinica.

Za nekog tko slabije prebrojava kažemo da “broji na prste”. Međutim, činjenica da osoba ima *deset* prstiju upravo je i odredila način našeg brojenja: veće brojeve iskazujemo s pomoću potencija broja deset. Tako, primjerice, broj tri stotine dvadeset šest prikazujemo s pomoću potencija broja 10 ovako:

$$3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 6 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 6$$

i taj broj zapisujemo kratko kao 326, pazeći na *položaj* svake znamenke u ovom zapisu. Broj 35 206 možemo napisati ovako:

$$35\,206 = 3 \cdot 10\,000 + 5 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 6 = 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 6.$$

Općenito, višeznamenkasti broj N zapisujemo kao $N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$. Vrijednost tog broja je

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Njegove znamenke $a_n, \dots, a_1, a_0$ cijeli su brojevi iz skupa $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Za broj kažemo da je zapisan u **dekadskom sustavu** ili **sustavu s bazom 10**.



Za bazu brojevnog sustava možemo uzeti bilo koji drugi prirodni broj veći od 1.

Zapis broja u sustavu s bazom b

Neka je $b > 1$ prirodan broj. Prirodni broj N zapisan u pozicijskom sustavu s bazom b ima vrijednost:

$$N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0(b) = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \dots + a_1 \cdot b + a_0.$$

Znamenke $a_0, a_1, \dots, a_n$ cijeli su brojevi iz skupa $\{0, 1, 2, \dots, b-1\}$. Indeks (b) označava u kojoj je bazi zapisan broj.

Tako, primjerice, $152_{(8)}$ predstavlja broj zapisan u sustavu s bazom 8. Koji je to broj u dekadskom sustavu? Računajmo ovako:

$$152_{(8)} = 1 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 2 = 64 + 40 + 2 = 106_{(10)}.$$

Po dogovoru, brojeve u dekadskom sustavu pisat ćemo bez oznake baze: $106_{(10)} = 106$.



Povijesni kutak

ZAPISIVANJE BROJEVA

Prirodne brojeve danas zapisujemo na ovaj način: 1, 2, 3... Zapis broja ne smijemo poistovjetiti sa samim brojem, jer se isti broj može zapisivati na različite načine.

Rimljani su u tu svrhu rabili slova svoje latinične abecede. Slova I, V, X, L, C, D, M označavala su redom brojeve 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000. Njihovim kombiniranjem možemo zapisati višeznamenkaste brojeve: MCMXCVI predstavlja broj 1996, dok se 1886 piše MDCCCLXXXVI. Očito je ovakav način zapisivanja pogodan samo za zapis broja, a nikako i za računanje s takvim brojevima (kako pomnožiti XCVI s DCCXLI?).

Sličan sustav zapisivanja brojeva koristio se i u drugim kulturama. Grci su za oznaku brojeva koristili početno slovo odgovarajuće riječi, pa su brojeve 1, 5, 10, 100, 1000, 10000 označavali s I, Π, Δ, H, X, M. Vidi detalje na [web-stranici en.wikipedia.org/wiki/Numeral_systems](http://en.wikipedia.org/wiki/Numeral_systems).

Takav se sustav koristio i kod nas u doba uporabe glagoljice. Praktički je svako slovo glagoljice imalo i svoju numeričku vrijednost. Da slovo predstavlja u stvari broj upozoravao je kvadratić ispred njega, ili vitica zapisana iznad slova.

Brojevi na ručnoj uri označavaju se vrlo često rimskim znamenkama, od I do XII, kao i mjeseci u kalendaru.

Sat na splitskoj Pjaci ima brojčanik s 24 rimskim slovima označena sata, baš kao i ovaj prvi električki pokretani sat ispred muzeja u Greenwichu (postavljen 1852 godine).



Ostatke duodecimalnog sustava (s bazom 12) nalazimo još i danas. Jaja se još uvijek (ali sve manje!) prodaju u **tucetima**, dok **gros** predstavlja tucet tuceta, broj 100 u bazi 12.

Englezi su do 1971. godine funtu dijelili na 12 šilinga, a šiling na 20 penija. Jedna je funta sadržavala dakle 240 penija. Takav je sustav pogodan za dijeljenje, jer je 12 djeljivo s 2, 3, 4 i 6. Inflacija je olakšala prijelaz na dekadski sustav.

Babilonci su od Sumerana naslijedili i razvili **heksagezimalni** sustav (s bazom 60). Ostatke tog sustava zadržali smo u podjeli sata (i kutova) na minute te minute na sekunde.

U načinu izgovaranja brojeva u francuskom jeziku naziremo utjecaj i drugih sustava, *quatre vingt onze* označava broj 91, četiri (puta) dvadeset (plus) jedanaest!

Primjer 1.

Koji brojevi u dekadskom sustavu odgovaraju brojevima $3216_{(12)}$, $3216_{(8)}$, $10010011_{(2)}$, $234_{(5)}$?

$$\begin{aligned} 3216_{(12)} &= 3 \cdot 12^3 + 2 \cdot 12^2 + 1 \cdot 12 + 6 = 5490, \\ 3216_{(8)} &= 3 \cdot 8^3 + 2 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8 + 6 = 1678, \\ 10010011_{(2)} &= 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2 + 1 = 147, \\ 234_{(5)} &= 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 4 = 69. \end{aligned}$$

Zadatak 1. Koji brojevi u dekadskom sustavu odgovaraju brojevima $321_{(4)}$, $321_{(12)}$, $555_{(6)}$, $101101_{(2)}$?

Primjer 2.

Niz uzastopnih prirodnih brojeva zapisan je ovako:

1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33, 100, 101 ...

U kojem brojevnom sustavu se odvija brojenje?

Broj različitih znamenaka i postupak brojenja ovise o izabranoj bazi. U sustavu s bazom b postoji točno b različitih znamenaka.

U ovom nizu postoje četiri različite znamenke, pa je riječ o sustavu s bazom četiri.

Primjer 3.

U kojem brojevnom sustavu vrijedi račun:

$$24 \times 13 = 345?$$

Neka je x baza tog sustava. Tada ova jednakost glasi

$$(2x + 4)(x + 3) = 3x^2 + 4x + 5.$$

Nakon sređivanja dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - 6x - 7 = 0.$$

Njezina su rješenja $x = -1$ i $x = 7$. Račun je napisan u sustavu s bazom 7.

Zadatak 2. Prevedi brojeve $24_{(7)}$, $13_{(7)}$, $345_{(7)}$ u dekadski sustav i uvjeri se u ispravnost računa $24_{(7)} \times 13_{(7)} = 345_{(7)}$.

Zadatak 3. U kojem brojevnom sustavu vrijedi račun: $2381 - 1926 = 657$?

Primjer 4.

Koji se troznamenkasti broj u sustavu s bazom 7 piše na način xyz , a u sustavu s bazom 11 na način zyx ?

Iz jednadžbe $xyz_{(7)} = zyx_{(11)}$ slijedi

$$49x + 7y + z = 121z + 11y + x,$$

odakle je

$$6(2x - 5z) = y.$$

Brojevi x , y , z nenegativni su cijeli brojevi manji od 7, jer su to znamenke u sustavu s bazom 7. Budući da je lijeva strana jednakosti djeljiva sa 6, mora biti $y = 0$ ili $y = 6$. Za $y = 0$ je $2x = 5z$, odakle je $x = 5$, $z = 2$. Time smo dobili rješenje $502_{(7)} = 205_{(11)}$.

Ako je $y = 6$, onda mora biti $2x - 5z = 1$, odakle je $z = 1$ i $x = 3$, te je još jedno rješenje $361_{(7)} = 163_{(11)}$.

Istaknuti brojevni sustavi

Iako svaki prirodni broj $b > 1$ može poslužiti kao baza brojevnog sustava, u praktičnoj uporabi su četiri brojeva sustava:

- **Dekadski** sustav, s bazom deset. Tu koristimo standardna imena i zapis znamenaka: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

- **Binarni** sustav (s bazom dva). Tu postoje samo dvije različite znamenke: 0 i 1. Ovdje je, zbog malog broja različitih znamenki, prikladnije brojeve čitati znamenku po znamenku. Tako, primjerice, broj $13 = 1101_{(2)}$ čitamo jedan-jedan-nula-jedan a ne tisuću sto i jedan.

- **Oktalni** sustav (s bazom osam) ima osam različitih znamenki. Za njihov zapis koristimo prvih osam znamenaka dekadskog sustava: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Brojeve čitamo na isti način kao u dekadskom sustavu.

- **Heksadekadski** sustav (s bazom šesnaest) ima šesnaest različitih znamenaka. U njihovom zapisu koristimo svih deset znamenaka dekadskog sustava i prvih šest slova latinične abecede: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. Dekadske vrijednosti nekih heksadekadskih brojeva su:

$$A_{(16)} = 10, \quad B_{(16)} = 11, \quad C_{(16)} = 12,$$

$$D_{(16)} = 13, \quad E_{(16)} = 14, \quad F_{(16)} = 15,$$

$$2C_{(16)} = 2 \cdot 16 + 12 = 44,$$

$$E38_{(16)} = 14 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16 + 8 = 3640.$$

Brojeve zapisane u heksadekadskom sustavu čitamo znamenku po znamenku.

■ Veza binarne, oktalne i heksadekadske baze

Razvojem računalstva naročito su značajne postale binarna i heksadekadska baza. Razlog tome je što računalo čitav svoj rad zasniva na činjenici da se svaki njegov elementarni sklop (*bit*) može nalaziti u jednom od dvaju stanja: 0 — neaktivnom i 1 — aktivnom. Kombiniranjem bitova možemo zapisati sve prirodne brojeve *u binarnom sustavu*. Svaki je broj u računalu pohranjen u binarnom sustavu. Svako slovo ima svoj brojčani ekvivalent i ponovno je prikazano brojem u binarnom sustavu. Svaka poruka napisana na tipkovnici pretvara se u niz nula i jedinica i pamti u binarnom sustavu.

53 76 61 6B 6F 20 73 6C 6F 76 6F 20 69 6D 61 20
73 76 6F 6A 20 62 72 6F 6A 63 63 61 6E 69 20 65
6B 76 69 76 61 6C 65 6E 74 20 69 20 70 6F 6E 6F
76 6E 6F 20 6A 65 0D 0A 70 72 69 6B 61 7A 61 6E
6F 20 62 72 6F 6A 65 6D 20 75 20 62 69 6E 61 72
6E 6F 6D 20 73 75 73 74 61 76 75 2E 20 53 76 61
6B 61 20 70 6F 72 75 6B 61 0D 0A 6E 61 70 69 73
61 6E 61 20 6E 61 20 74 69 70 6B 6F 76 6E 69 63
69 20 70 72 65 74 76 61 72 61 20 73 65 20 75 20
6E 69 7A 20 6E 75 6C 61 20 69 20 6A 65 64 69 6E
69 63 61 0D 0A 69 20 70 61 6D 74 69 20 75 20 62
69 6E 61 72 6E 6F 6D 20 73 75 73 74 61 76 75 2E

Svako slovo ima svoj brojčani ekvivalent i ponovno je prikazan o brojem u binarnom sustavu. Svaka poruka napisana na tipkovnici i pretvara se u niz nula i jedinica i pamti u binarnom sustavu.

Lijevo se nalazi djelić teksta ovog poglavlja u obliku kojeg pamti računalo. Svaki znak na tipkovnici ima svoj brojčani ekvivalent. Koje područje pokrivaju mala i velika slova abecede? Potraži na internetu informacije o pojmovima ASCII i Unicode.

Zapis je u binarnom sustavu jednostavan, no zahtijeva velik broj znamenaka. Stoga se binarni brojevi uglavnom prevode u heksadekadski sustav. Taj je prijelaz vrlo jednostavan. Naime, jedna znamenka heksadekadskog sustava odgovara točno četirima znamenkama binarnog sustava. To se događa zbog toga što je broj 16 potencija broja 2, $16 = 2^4$. Prikažimo odnos brojeva u ovim dvama sustavima. Brojevi s lijeve strane jednakosti zapisani su u heksadekadskom, a s desne strane u binarnom sustavu.

0 = 0	4 = 100	8 = 1000	C = 1100
1 = 1	5 = 101	9 = 1001	D = 1101
2 = 10	6 = 110	A = 1010	E = 1110
3 = 11	7 = 111	B = 1011	F = 1111

Sada se koristeći ovu tablicu višeznamenakasti broj napisan u heksadekadskom sustavu lako može prevesti u binarni broj i obratno.

Primjer 5.

Napišimo u binarnom sustavu sljedeće brojeve: $34_{(16)}$, $2A_{(16)}$, $6C9_{(16)}$, $2EB3_{(16)}$.

Svakoj znamenki heksadekadskog sustava odgovaraju četiri znamenke binarnog sustava (nule na početku broja ispuštamo).

$$34_{(16)} = 11\ 0100_{(2)},$$

$$2A_{(16)} = 10\ 1010_{(2)},$$

$$6C9_{(16)} = 110\ 1100\ 1001_{(2)},$$

$$2EB3_{(16)} = 10\ 1110\ 1011\ 0011_{(2)}.$$

Primjer 6.

Napišimo u heksadekadskom sustavu sljedeće brojeve: $1011101_{(2)}$, $110001011101011_{(2)}$, $1111111111111_{(2)}$.

Znamenke grupiramo u skupine po četiri (počevši od krajnje desnih). Skupini od četiri znamenke binarnog sustava odgovara jedna znamenka heksadekadskog sustava:

$$101\ 1101_{(2)} = 0101\ 1101_{(2)} = 5D_{(16)},$$

$$110\ 0010\ 1110\ 1011_{(2)} = 62EB_{(16)},$$

$$11\ 1111\ 1111\ 1111_{(2)} = 3FFF_{(16)}.$$

Zapise oblika 2AA132FF vidjet ćemo pretražujući programe napisane u internom jeziku računala. Time je predstavljen osmeroznamenkasti broj u heksadekadskom sustavu, koji odgovara tridesetdvoznamenkastom binarnom broju, što je standardni zapis podatka u memoriji 32-bitnog osobnog računala.

Slična veza postoji i između binarnog i oktalnog sustava. Jedna znamenka oktalnog sustava odgovara točno trima znamenkama binarnog sustava, jer je $2^3 = 8$. Prikažimo odnos brojeva u ovim dvama sustavima. S lijeve strane su brojevi zapisani u oktalnom, a s desne strane u binarnom sustavu.

$$0 = 0 \quad 4 = 100$$

$$1 = 1 \quad 5 = 101$$

$$2 = 10 \quad 6 = 110$$

$$3 = 11 \quad 7 = 111$$

Tako vrijedi:

$$16_{(8)} = 1\ 110_{(2)},$$

$$5407_{(8)} = 101\ 100\ 000\ 111_{(2)},$$

$$10010\ 111\ 001_{(2)} = 2271_{(8)},$$

$$11\ 111\ 111\ 111_{(2)} = 3777_{(8)}.$$

Primjer 7.

Broj 2CA2 zapisan u heksadekadskom sustavu prebacimo u oktalni sustav.

Pretvorbu ćemo načiniti s pomoću binarnog sustava: broj ćemo najprije prebaciti u binarni sustav, a zatim iz njega u oktalni. Jednoj znamenki heksadekadskog sustava odgovaraju četiri znamenke binarnog sustava, a zatim trima znamenkama binarnog odgovara jedna znamenka oktalnog sustava:

$$\begin{aligned} 2CA2_{(16)} &= 10\ 1100\ 1010\ 0010_{(2)} = 10\ 110\ 010\ 100\ 010_{(2)} \\ &= 26242_{(8)}. \end{aligned}$$

Primjer 8.

Broj $51\,707_{(8)}$ prevedimo u sustav s bazom 16.

Koristeći se tablicom s prethodne strane zapišimo najprije dani broj u binarnom sustavu:

$$51\,707_{(8)} = 101\,001\,111\,000\,111_{(2)} = 101\,0011\,1100\,0111_{(2)}.$$

Sad ovaj broj prevedimo iz binarnog u heksadekadski sustav:

$$101\,0011\,1100\,0111_{(2)} = 53C7_{(16)}.$$

Zadatak 4.

- 1) Broj $BA3_{(16)}$ prevedi u oktalni sustav.
- 2) Broj $557_{(8)}$ zapiši u heksadekadskom brojevnom sustavu.



Kutak plus

JERRY I MICKEY MOUSE

U Disneylandu brojevi imaju neko drugo značenje.

Početak mišje ere zbio se u osvit velike ekonomske krize, kad je 15. svibnja rođen Mickey Mouse pod ravateljstvom Walta Disneyja i crtača Uba Iwerksa.

18. studenog 1978., povodom jubilarnog rođendana, Mickey Mouse je dobio svoju zvjezdicu na *Hollywood Walk of Fame*, kao prva animirana osoba kojoj je to uspjelo. Tad je brojao 62 mišje godine.

Najpopularniji miš Jerry mlađi je od Mickeyja Mousa. Evo što je zapisao u svoj dnevnik: "Rođen sam u radionici Williama Hanne i Josepha Barbere godine 14. mišje ere. Will i Joe su opisali 162 moje događajstine, od kojih je 15 bilo nominirano za Oscara u kategoriji kratkog animiranog filma. Osvojili smo nagradu u više od pola nominacija, točno 7 puta."



U periodu od 1960. do 1962. Gene Deitch stvorio je 13 epizoda, a preostale od 1963. do 1967. animirao je Chuck Jones.

Načinjen je ukupno 161 film.

Tom i Jerry nastavili su živjeti i dalje, ali nove epizode nastale devedesetih godina po mnogo čemu se ne mogu mjeriti s onima iz klasičnog doba.

1. Koliko prstiju na obje ruke ima Mickey Mouse?
2. Koje je godine (po ljudskom kalendaru) on rođen?
3. Jerry je rođen 10. veljače, koje godine?
4. Koliko je epizoda Toma i Jerryja nacrtao Chuck Jones?

Prijelaz iz dekadskog sustava

Prijelaz iz dekadskog sustava u sustav s bazom b nije tako jednostavan. Uzrok tome je što broj 10 nije potencija nijednog prirodnog broja b .

Primjer 9.

Prikažimo broj 238 u sustavu s bazom 8.

Potencije broja 8 su: $8^1 = 8$, $8^2 = 64$, $8^3 = 512$. Kako je time premašen zadani broj, najveća potencija koja ulazi u prikaz broja bit će $8^2 = 64$. Sad se pitamo: koliko puta možemo 'otkinuti' broj 64 od broja 238? Vrijedi:

$$238 = 3 \cdot 64 + 46.$$

Postupak nastavljamo s brojem 46:

$$238 = 3 \cdot 64 + 5 \cdot 8 + 6 = 356_{(8)}.$$

Zadatak 5. Prikaži broj 238 u sustavima s bazama 6, 5 i 4.



Ovakav je način računanja općenito nepraktičan i dug. Zapišimo rezultat dobiven u prethodnom primjeru kao

$$238 = 3 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 6 = (3 \cdot 8 + 5) \cdot 8 + 6.$$

U ovom se rastavu prepoznaju znamenke 3, 5 i 6 u zapisu broja u oktalnom sustavu. Posljednja znamenka 6 je ostatak pri dijeljenju broja 238 s 8:

$$238 = 29 \cdot 8 + 6.$$

Druga znamenka zdesna dobiva se kao ostatak pri dijeljenju broja 29 s 8:

$$29 = 3 \cdot 8 + 5.$$

Kvocijent daje vodeću znamenku broja.

Primjer 10.

Prevedimo broj 94 u sustav s bazom 4.

Vrijedi:

$$94 = 23 \cdot 4 + 2 \quad 2$$

$$23 = 5 \cdot 4 + 3 \quad 3$$

$$5 = 1 \cdot 4 + 1 \quad 1$$

$$1 = 0 \cdot 4 + 1 \quad 1$$

Zato je $94 = 1132_{(4)}$.

Zadatak 6. Računajući na ovaj način, prevedi broj 238 u sustav s bazom 4.

Primjer 11.

Prevedimo u oktalni i heksadekadski sustav broj 243681.

Zadani broj dijelimo s brojem 8. Da bismo dobili količnik, možemo rabiti džepno računalo. Nakon toga je lako odrediti ostatak.

$$243681 = 30460.125 \cdot 8 = 30460 \cdot 8 + 1, \quad 1$$

$$30460 = 3807.5 \cdot 8 = 3807 \cdot 8 + 4, \quad 4$$

$$3807 = 475.875 \cdot 8 = 475 \cdot 8 + 7, \quad 7$$

$$475 = 59.375 \cdot 8 = 59 \cdot 8 + 3, \quad 3$$

$$59 = 7 \cdot 8 + 3, \quad 3$$

$$7 = 0 \cdot 8 + 7, \quad 7$$

Dakle, $243681 = 733741_{(8)}$.

Za prijelaz u heksadekadsku bazu dijelimo s brojem 16. Ostatke, ukoliko su veći od 9, pišemo onako kako se zapisuju heksadekadske znamenke:

$$243681 = 15230.0625 \cdot 16 = 15230 \cdot 16 + 1, \quad 1$$

$$15230 = 951.875 = 951 \cdot 16 + 14, \quad E$$

$$951 = 59.4375 \cdot 16 = 59 \cdot 16 + 7, \quad 7$$

$$59 = 3 \cdot 16 + 11, \quad B$$

$$3 = 0 \cdot 16 + 3, \quad 3$$

Dakle, $243681 = 3B7E1_{(16)}$.

Zadatak 7. Prevedi u oktalni i heksadekadski sustav ove dekadске brojeve:
123; 9876; 55 555.

Primjer 12.

Odredimo binarni prikaz broja 75.

Dijeljenje s 2 je jednostavno pa koristimo jednostavniji zapis. U prvom retku pisemo količnike, a u drugom ostatke.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} 75 & 37 & 18 & 9 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Dobivene znamenke pišu se zdesna nalijevo.

Dobili smo $75 = 1001011_{(2)}$.

Zadatak 8. Prevedi u binarni brojevni sustav brojeve:
11; 22; 333; 4444.

Prijelaz u dekadski sustav

Prijelaz iz sustava s bazom b u dekadski sustav je jednostavniji. Ako je $N = a_n a_{n-1} \dots a_0(b)$, onda moramo izračunati broj

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0.$$

Ovaj se broj može računati na uobičajeni način, potenciranjem i zbrajanjem. Ipak, objasniti ćemo algoritam za njegovo računanje u kojem ćemo koristiti samo množenje i zbrajanje, a ne i operaciju potenciranja.

Primjer 13.

Prikažimo u dekadskoj bazi broj $3156_{(8)}$.

Računajmo ovako:

$$N = 3156_{(8)} = 3 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 6 = 6 + 8 \cdot (5 + 8 \cdot (1 + 3 \cdot 8)).$$

Računajmo od nutarnjih zagrada prema van:

$$N = 6 + 8 \cdot (5 + 8 \cdot (25)) = 6 + 8 \cdot (205) = 1646.$$

Cijeli postupak ispišimo u obliku tablice

	3	1	5	6
8	3	25	205	1646

Svaki se broj u drugom redu dobije tako da se prethodni pomnoži s $b = 8$ i doda mu se broj iz prvog retka iznad njega. Ispišimo cijeli postupak, korak po korak.

	3	1	5	6
8				

[U prvom retku napisane su znamenke broja, a u drugom vrijednost baze b .]

	3	1	5	6
8	3			

[Prepišimo vrijednost prve znamenke.]

	3	1	5	6
8	3	25		

[Vrijednost baze $b = 8$ pomnožimo s elementom drugog retka i dodajmo sljedeći broj iz prvog retka: $8 \cdot 3 + 1 = 25$.]

	3	1	5	6
8	3	25	205	

[Nastavimo na isti način:]

	3	1	5	6
8	3	25	205	1646

[$8 \cdot 205 + 6 = 1646$. Dobili smo] konačnu tablicu, $N = 1646$.]

Ovaj se način računanja naziva **Hornerov algoritam**¹.

Zadatak 9. Prikaži u dekadskom sustavu broj $41227_{(8)}$.

¹ William George Horner (1786. – 1837.), engleski matematičar

Primjer 14.

Pretvorimo u dekadski sustav broj $A10E9_{(16)}$.

Račun je napisan u tablici. Prisjetimo se da je $A_{(16)} = 10$, $E_{(16)} = 14$.

	A	1	0	E	9
16	10	161	2576	41230	659689

Dakle, $A10E9_{(16)} = 659689$.

Zadatak 10. Prikaži u dekadskom sustavu brojeve $FFFF_{(16)}$, $ABAB_{(12)}$.

■ Zbrajanje i množenje u binarnom sustavu

Operacije zbrajanja i množenja možemo izvoditi i u sustavima s drugim bazama. Pravila su identična onima u dekadskom sustavu, jer su i drugi sustavi pozicijski brojevni sustavi. Pri tom se mora savladati nova **tablica množenja i zbrajanja**, koja može biti čak i jednostavnija od naše standardne 10×10 tablice.

U binarnom sustavu tablice zbrajanja i množenja iznimno su jednostavne:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

·	0	1
0	0	0
1	0	1

i možemo ih brzo usvojiti. Pri zbrajanju brojeva u binarnom sustavu treba samo obratiti pozornost na prijenos znamenki.

Primjer 15.

Izračunajmo zbroj sljedećih brojeva napisanih u binarnom sustavu: Prijenos znamenki napisani su u prvom retku, sitnijim slogom

$$\begin{array}{r} \\ \\ + \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ + \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ + \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ + \\ \hline \end{array}$$

Zadatak 11. Izračunaj računajući u binarnom sustavu:

$$1011_{(2)} + 101_{(2)}, \quad 100111001_{(2)} + 1011011_{(2)}.$$

Pretvori brojeve i rezultat u dekadski sustav i tako provjeri točnost računa.

Zadatak 12. Izračunaj računajući u binarnom sustavu:

$$100_{(2)} - 10_{(2)},$$

$$1000_{(2)} - 101_{(2)},$$

$$10010001_{(2)} - 110011_{(2)}.$$

Pretvori brojeve i rezultat u dekadski sustav i tako provjeri točnost računa.

Primjer 16.

Izračunajmo umnožak sljedećih brojeva u binarnom sustavu:

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ \cdot 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1 \\ \cdot 1\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \end{array}$$

Zadatak 13. Izračunaj umnožak sljedećih brojeva računajući u binarnom sustavu:

$$11_{(2)} \cdot 11_{(2)},$$

$$10101_{(2)} \cdot 11_{(2)},$$

$$10101_{(2)} \cdot 1011_{(2)}.$$



Točno-netočno pitalice

Koje su od sljedećih tvrdnji točne, a koje netočne? Odgovori, a odgovor obrazloži.

1. Različitih znamenaka u zapisu broja može biti najviše deset. T N
2. Broj $5_{(b)}$ uvijek ima istu vrijednost, bez obzira u kojoj je bazi b zapisan. T N
3. Broj $99_{(b)}$ ima najveću vrijednost ako je baza b dekadski. T N
4. Broj 10101_4 veći je od broja 111_{16} . T N
5. Broj 121 je složen broj, u svim sustavima s bazom većom od 2. T N
6. U sustavu s bazom 20 svaki se broj može zapisati s pomoću znamenaka 0, 1, 2, ..., 9. T N
7. Najveći dvoznamenkasti broj u heksadekadskom sustavu je $9E_{16}$. T N
8. U heksadekadskom sustavu je broj djeljiv s 8 ako mu je zadnja znamenka djeljiva s 8. T N
9. Račun $2 \times 2 = 4$ istinit je u svakom brojevnom sustavu. T N

Zadatci 1.1.

1. Prevedi u dekadski sustav sljedeće brojeve:

- 1) $221_{(5)}$; 2) $110\,011_{(2)}$;
 3) $567_{(8)}$; 4) $21\,000_{(3)}$;
 5) $5\,550_{(6)}$; 6) $2\,134_{(12)}$.

2. Zapiši u dekadskom sustavu brojeve:

- 1) $1011_{(2)}$, 2) $100101_{(2)}$,
 3) $1100101_{(2)}$, 4) $110001011_{(2)}$,
 5) $11_{(8)}$, 6) $24_{(8)}$,
 7) $126_{(8)}$, 8) $3201_{(8)}$,
 9) $8_{(16)}$, 10) $20_{(16)}$,
 11) $3A_{(16)}$, 12) $2EB1_{(16)}$.

3. Zapiši dekadске brojeve 6, 13, 25, 125 u sustavima s bazom 2, 8 i 16.

4. Zapiši dekadске brojeve 6, 13, 25, 125 u sustavima s bazom 5, 9 i 12.

5. Zapiši dane dekadске brojeve u sustavima s bazama 2, 5 i 12: 11, 33, 100, 222, 1001.

6. Brojeve 1101, 11000110, 11001100101110011 zadane u binarnoj bazi prebaci u oktalni i heksadekadski sustav.

7. Brojeve 58, 1A2, FFFF zadane u heksadekadskom sustavu prebaci u oktalni sustav.

8. Brojeve 223, 517, 12053 zadane u oktalnom sustavu prebaci u heksadekadski sustav.

9. Zapiši brojeve $212_{(3)}$, $30_{(4)}$, $245_{(6)}$, $177_{(8)}$, $28_{(12)}$ u sustavu s bazom 2.

10. Zapiši brojeve $101\,110_{(2)}$, $2102_{(3)}$, $3220_{(4)}$, $11\,011_{(5)}$ u sustavu s bazom 8.

11. 1) Broj $7AB7_{(16)}$ prevedi u oktalni brojevni sustav.
 2) Broj $34\,567_{(8)}$ prevedi u heksadekadski brojevni sustav.

12. 1) Broj $8EF8_{(16)}$ prevedi u oktalni brojevni sustav.
 2) Broj $76\,543_{(8)}$ prevedi u heksadekadski brojevni sustav.

13. Nastavi svaki od sljedećih nizova uzastopnih prirodnih brojeva:

- 1) 10, 11, 12, 20, 21...
 2) 101, 110, 111, 1000, 1001...
 3) 1, 2, 3, 10, 11, 12...
 4) 23, 24, 25, 30, 31, 32...

14. Nastavi svaki od sljedećih nizova prirodnih brojeva:

- 1) 10011, 10010, 10001, 10000...
 2) 10, 100, 110, 1000, 1010...
 3) 10, 20, 100, 110, 120...
 4) 11, 13, 20, 22, 24...

15. Izračunaj zbroj uzastopnih prirodnih brojeva:

$$1+2+3+4+10+11+12+13+14+20+\dots+44+100.$$

16. Odredi, ako postoji, bazu brojevnog sustava u kojem vrijede jednakosti

- 1) $23 \cdot 15 = 411$;
 2) $32 \cdot 22 = 541$;
 3) $31 \cdot 412 = 23\,322$.

17. U kojem sustavu vrijede jednakosti

- 1) $101_{(x)} + 1001_{(x)} = 1110_{(x)}$;
 2) $1211_{(x)} - 1120_{(x)} = 21_{(x)}$?

18. Vrijede li u bilo kojem brojevnom sustavu jednakosti

- 1) $10101 + 1101 = 11202$;
 2) $1211 - 1011 = 200$?

19. Zbroj triju uzastopnih brojeva u sustavu s bazom 5 iznosi 121. Koji su to brojevi?

20. Zbroj triju uzastopnih parnih brojeva u binarnom sustavu iznosi 11110. Koji su to brojevi?

21. Umnožak triju uzastopnih brojeva u sustavu s bazom 5 iznosi 440. Koji su to brojevi?

22. Umnožak triju uzastopnih brojeva u sustavu s bazom 9 iznosi 1320. Koji su to brojevi?

- 23.** Umnožak dvaju uzastopnih neparnih prirodnih brojeva u binarnom sustavu iznosi 100 011. Koji su to brojevi?
- 24.** Odredi prirodne brojeve x i y iz jednakosti
1) $23_{(x)} = 41_{(y)}$; 2) $144_{(x)} = 100_{(y)}$.
- 25.** Odredi brojeve a , b i c iz jednakosti
1) $ab_{(5)} = ba_{(7)}$; 2) $abc_{(5)} = cba_{(8)}$;
3) $aba_{(4)} = bab_{(6)}$.
- 26.** 1) U kojem je sustavu brojeva $101 \cdot 11 = 1111$?
2) U kojem je sustavu brojeva $1001 \cdot 111 = 111111$? Poopći zaključak!
- 27.** Umnožak $11 \cdot 12 \cdot 13$ jednak je 3102. U kojem je brojevnom sustavu provedeno ovo množenje?
- 28.** U kojem je brojevnom sustavu broj 144 potpuni kvadrat nekog prirodnog broja?
- 29.** U kojem je brojevnom sustavu $125^2 = 16324$?
- 30.** Broj 620 kvadrat je broja 24. U kojem je sustavu brojeva proveden račun?
- 31.** Broj 20311 kub je broja 21. U kojem je sustavu brojeva proveden račun?
- 32.** U kojem je brojevnom sustavu broj 1331 potpuni kub nekog prirodnog broja?
- 33.** U kojem je brojevnom sustavu $\sqrt{1331} = 33$? Koliko je u tom sustavu $\sqrt{2420}$?
- 34.** U kojem je brojevnom sustavu $33 \cdot 22 = 1331$? Koliko je u istom sustavu $23 \cdot 32$?
- 35.** U kojem je brojevnom sustavu $\sqrt{1210} = 22$? Koliko je u tom sustavu $\sqrt{3201}$?
- 36.** U kojem je brojevnom sustavu $21 \cdot 22 = 1122$? Koliko je u istom sustavu $22 \cdot 12$?
- ◆ —
- 37.** Izračunaj računajući u binarnoj bazi:
1) $1101_{(2)} + 10101_{(2)}$;
2) $10101_{(2)} + 10111_{(2)}$;
3) $110111_{(2)} + 10101101_{(2)}$;
4) $1100101_{(2)} + 11001011_{(2)}$.
Brojeve prevedi u dekadski sustav i provjeri rezultat.
- 38.** Izračunaj računajući u binarnom sustavu:
1) $1111_{(2)} - 1001_{(2)}$;
2) $11001_{(2)} - 1101_{(2)}$;
3) $110011_{(2)} - 10110_{(2)}$;
4) $110010111_{(2)} - 1101011_{(2)}$.
Brojeve prevedi u dekadski sustav i provjeri rezultat.
- 39.** Izračunaj računajući u binarnom sustavu:
1) $110_{(2)} \cdot 11_{(2)}$; 2) $1101_{(2)} \cdot 101_{(2)}$;
3) $11011_{(2)} \cdot 1001_{(2)}$; 4) $110111_{(2)} \cdot 101101_{(2)}$.
Brojeve prevedi u dekadski sustav i provjeri rezultat.
- 40.** Napiši tablicu zbrajanja i množenja u sustavu s bazom 3. Uporabom tih tablica izračunaj $1201_{(3)} + 2012_{(3)}$; $1120221_{(3)} \cdot 2_{(3)}$; $20012_{(3)} \cdot 12_{(3)}$.
- 41.** Sustavi tablice zbrajanja i množenja za sustave s bazama 4, 5 i 6.
- 42.** Prevedi sljedeće brojeve zapisane u binarnom sustavu u dekadski sustav:
1) $11.1_{(2)}$; 2) $101.101_{(2)}$;
3) $111.111_{(2)}$; 4) $1000.0001_{(2)}$.

1.2. Matematička indukcija

Dva su osnovna načina logičkog zaključivanja: deduktivni i induktivni.

U deduktivnom pristupu se krenuvši od općih spoznaja izvode istinite činjenice u nekom konkretnom slučaju. Primjerice, zaključivanje tipa — svi su ljudi smrtni; Petar je čovjek, dakle, Petar je smrtn — primjer je deduktivnog zaključivanja.

Ovakav je način zaključivanja korektan: krenuvši od istinitih pretpostavki (premise), uvijek dolazimo do istinitog zaključka (konkluzije). Njegov je nedostatak što zaključujući ovako ne možemo doći do novih, dotad nepoznatih općenitih spoznaja.

U induktivnom pristupu polazimo od činjenica koje vrijede u nekom konkretnom primjeru i na temelju toga želimo zaključiti o istinama koje vrijede u općenitijoj situaciji. Primjerice: Ivan, Petar i svi ostali učenici u razredu niži su od 2 metra. Dakle, svi muškarci niži su od 2 metra.

Ovaj je zaključak očito neistinit. Pritom nije važno što je dobivena konkluzija neistinita, nepravilan je *način razmišljanja*. Sljedeće je razmišljanje jednako tako logički nepravilno, bez obzira na to što upućuje na istinitu konkluziju: Ivan, Petar i svi ostali učenici u razredu niži su od 20 metara. Znači, svi muškarci niži su od 20 metara.

Iako može dovesti do pogrešnih rezultata, metoda induktivnog zaključivanja moćno je i ponekad jedino sredstvo u otkrivanju istinitih činjenica.

Primjer 1.

Ovaj primjer neispravnog induktivnog zaključivanja dao je Euler. Promotrimo vrijednost izraza $P(n) = n^2 + n + 41$ za nekoliko prvih vrijednosti prirodnog broja n . Dobivamo brojeve 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97... — svi su oni prosti brojevi. Može li se zaključiti da će $P(n)$ biti prost za svaki prirodni broj n ?

Odgovor je: ne! Za $n = 41$ broj očito nije prost, jer je svaki pribrojnik djeljiv s 41. Nije niti za $n = 40$, jer je $P(40) = 41^2$. Ali jest za sve prirodne brojeve manje od 40.

■ Princip matematičke indukcije

Da bi princip induktivnog zaključivanja uvijek dao ispravne rezultate, moramo osigurati neke dodatne uvjete. Na taj ćemo način dobiti način zaključivanja poznat pod imenom **matematička indukcija**.



Povijesni kutak

LEONHARD EULER

Leonhard Euler (Basel, 15. travnja 1707. – Peterburg, 18. rujna 1783.), veliki je švicarski matematičar, fizičar i astronom. Utjecao je na razvoj cjelokupne matematike. Matematiku je učio od Johanna Bernoullija. 1726. g., po osnutku Peterburške akademije znanosti, odlazi živjeti u Rusiju gdje ostaje do kraja života. Uz Cauchyja je matematičar s najviše objavljenih znanstvenih radova. Znameniti su i njegovi udžbenici *Introductio in analysin infinitorum*, *Institutiones calculi differentialis*, *Institutiones calculi integralis* i *Arithmetica universalis*.

Usprkos poodmakloj sljepoći, Euler je većinu radova napisao pri kraju života. Prvi je promatrao funkcije kompleksne varijable i povezao trigonometrijske s eksponencijalnim funkcijama. Uveo je analitičke metode u teoriju brojeva o kojoj je objavio 140 radova. Jedan je od tvoraca suvremene diferencijalne geometrije. Poznata je njegova formula $V - B + S = 2$, o odnosu broja vrhova, bridova i strana u poliedru. Drži se začetnikom i teorije grafova.



Princip matematičke indukcije

Ako neka tvrdnja vrijedi za broj 1 i ako iz pretpostavke da vrijedi za prirodni broj n slijedi da ona vrijedi i za sljedeći broj $n + 1$, tad ona vrijedi za svaki prirodni broj n .

Primjer 2.



Dobro posložene domine prva su asocijacija za princip matematičke indukcije.

Odredimo formulu za zbroj prvih n neparnih brojeva.

Za početne zbrojeve vrijedi:

$$1 = 1,$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2,$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2,$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2.$$

Navedeni primjeri navode nas na pomisao da vrijedi

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2. \quad (1)$$

Time smo uporabili *induktivni* način mišljenja. Formula (1) istinita je za prve četiri vrijednosti broja n . Da bismo se uvjerali u njezinu istinitost za *svaki* prirodni broj n , primijenit ćemo princip matematičke indukcije.

Tvrdnja vrijedi za broj $n = 1$. Pretpostavimo da je formula (1) istinita za prirodni broj n i dodajmo zbroju s lijeve strane sljedeći član. Iskoristimo pritom pretpostavku indukcije:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}_{=n^2} + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Vidimo da tvrdnja vrijedi i za broj $n + 1$. Zato ona vrijedi za svaki prirodni broj.

Radi jednostavnijeg dokazivanja pojedine korake u zaključivanju matematičkom indukcijom nazivamo posebnim imenima. Tvrdnju o kojoj je riječ označujemo s $T(n)$. Dakle, neka je $T(n)$ tvrdnja koja ovisi samo o prirodnom broju n .

Dokaz matematičkom indukcijom

Dokaz matematičkom indukcijom sprovodi se u tri koraka.

- i) **Baza indukcije.** Trebamo provjeriti da tvrdnja vrijedi za broj 1, tj. da je $T(1)$ istinita tvrdnja.
- ii) **Pretpostavka indukcije.** Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n , tj. pretpostavimo da je $T(n)$ istinita tvrdnja.
- iii) **Korak indukcije.** Dokažimo da uz tu pretpostavku tvrdnja vrijedi i za broj $n + 1$, tj. iz $T(n)$ slijedi tvrdnja $T(n + 1)$.

Tad je tvrdnja $T(n)$ istinita za svaki prirodni broj n .

Primjer 3.

Koristeći matematičku indukciju pokažimo istinitost formule

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (2)$$

Tvrdnja $T(n)$ koju želimo dokazati glasi: formula (2) vrijedi za svaki prirodni broj n .

Baza indukcije. $T(1)$ vrijedi, jer u zbroju s lijeve strane imamo samo jedan član, a desna strana iznosi 1:

$$1 = \frac{1 \cdot (1 + 1)}{2}.$$

Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n : formula (2) je istinita.

Korak indukcije. Dodajmo lijevoj strani jednakosti sljedeći pribrojnik i iskoristimo pretpostavku indukcije:

$$\begin{aligned} \underbrace{1 + 2 + \dots + n}_{\text{iskoristimo } T(n)} + (n + 1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1)[(n+1) + 1]}{2}. \end{aligned}$$

Dobili smo formulu istovjetnu formuli (2), s $n + 1$ umjesto n . To znači da tvrdnja vrijedi za broj $n + 1$, dakle, $T(n + 1)$ je istinita tvrdnja. Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n .

Zadatak 1. Dokaži da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{2}.$$

Primjer 4.

Dokažimo da je broj $4^n + 15n - 1$ djeljiv s 9 za svaki prirodni broj n .

Baza indukcije. Za $n = 1$, broj 18 je djeljiv s 9.

Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n . Tada se može napisati

$$4^n + 15n - 1 = 9k$$

za neki prirodni broj k .

Korak indukcije. Provjerimo istinitost tvrdnje za broj $n + 1$.

$$4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 4[4^n + 15n - 1] - 45n + 18 = 9(4k - 5n + 2).$$

Ovaj je broj djeljiv s 9 i tvrdnja je dokazana.

Zadatak 2.

Dokaži:

- 1) Broj $9^{n+1} + 8n - 9$ djeljiv je sa 16, za svaki prirodni broj n .
- 2) Broj $3^n \cdot 5^{n+1} + 2^{n+3}$ djeljiv je s 13, za svaki prirodni broj n .

Primjer 5.

Dokažimo da je zbroj kutova u svakom mnogokutu s $n + 2$ stranice jednak $n \cdot 180^\circ$.

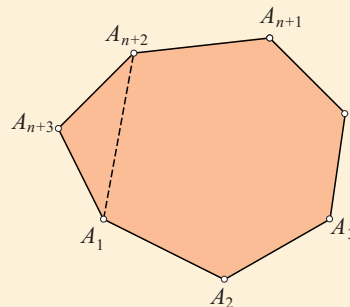
Dokazujemo indukcijom.

Baza indukcije. Za $n = 1$ riječ je o trokutu čiji je zbroj kutova 180° — tvrdnja $T(1)$ vrijedi.

Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja $T(n)$ vrijedi za prirodni broj n : zbroj kutova u mnogokutu s $n + 2$ stranice iznosi $n \cdot 180^\circ$.

Korak indukcije. Promotrimo mnogokut s jednom stranicom više, dakle, s $n + 3$ stranice. Odsijecanjem bilo kojeg trokuta (kao na slici) dobivamo jedan trokut (čiji je zbroj kutova 180°) i jedan mnogokut s $n + 2$ stranice, čiji je zbroj kutova po pretpostavci indukcije jednak $n \cdot 180^\circ$. Zato je zbroj kutova u mnogokutu s $n + 3$ stranice jednak $(n + 1) \cdot 180^\circ$, što je i trebalo dokazati.

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n .



Zadatak 3. Dokaži da je broj dijagonala u mnogokutu s n stranica jednak $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$.

Zadatak 4. U ravni je povučeno n pravaca tako da među njima nema paralelnih. Dokaži da se ti pravci sijeku u $\frac{n(n-1)}{2}$ točaka.



Povijesni kutak

INDUKCIJA U STAROJ GRČKOJ

O indukciji su razmišljali još i stari Grci. Evo glasovitog *sofizma hrpe*, u slobodnoj interpretaciji. Ustanovite koji je dio principa matematičke indukcije narušen u ovome razmišljanju:

- Čini li jedno zrno hrpu?
- Ne, dakako da ne.
- A dva zrna?
- Isto tako ne.
- Ako nekoliko zrna ne čini hrpu, pa mu dodamo jedno jedino zrno, nije li prirodno da ni tad nećemo dobiti hrpu?
- Svakako da imaš pravo.
- Dakle, nijedan broj zrna ne čini hrpu!

Primjer 6.

(**Bernoullijeva nejednakost**) Za svaki prirodni broj n i svaki realni broj $h > -1$ vrijedi

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh. \quad (3)$$

Pritom jednakost vrijedi samo za $n = 1$ ili za $h = 0$.

Za $n = 1$ lijeva i desna strana su jednake, pa tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da (3) vrijedi za prirodni broj n . Sad imamo:

$$\begin{aligned} (1 + h)^{n+1} &= (1 + h)^n(1 + h) \geq (1 + nh)(1 + h) \\ &= 1 + nh + h + nh^2 \geq 1 + (n + 1)h, \end{aligned}$$

i tvrdnja vrijedi i za broj $n + 1$. Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki n . (Na kojem je mjestu korištena pretpostavka $h > -1$?)

Primjer 7.

Dokažimo matematičkom indukcijom

$$2^n > n^2, \quad \text{za sve } n \geq 5.$$

Za $n = 5$ imamo $32 > 25$ i tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da je $2^n > n^2$. Onda je

$$2^{n+1} > 2n^2 = n^2 + n^2 > n^2 + 3n > n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

Ovdje smo koristili očitu nejednakost $n^2 > 3n$ koja vrijedi za $n > 3$.

Zadatak 5. Dokaži matematičkom indukcijom

$$2^n > n^2 + 4n, \quad \text{za sve } n \geq 6.$$

Primjer 8.

Dokažimo nejednakost

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Za $n = 1$ nejednakost se svodi na $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, što je istina.

Pretpostavimo da nejednakost vrijedi za prirodan broj n . Tada je

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2(n+1)}$$

Sada je dovoljno dokazati da vrijedi

$$\frac{\sqrt{2n+1}}{2(n+1)} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}.$$

Ova je nejednakost ekvivalentna s

$$\sqrt{2n+1} \cdot \sqrt{2n+3} < 2n+2.$$

Nakon kvadriranja i sređivanja, dobiva se istinita nejednakost $0 < 1$. Time je korak indukcije dokazan.



Kutak plus

0 INDUKTIVNOM ZAKLJUČIVANJU

Promotrimo sljedeću tvrdnju: broj $991n^2 + 1$ nije potpun kvadrat niti za jedan prirodni broj n . Uvrštavanjem broja n u ovaj izraz uvjerit ćemo se da je tvrdnja istinita za $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 100, \dots, 1000 \dots$. Mogli bismo neoprezno zaključiti da je ona istinita za svaki n . Zapravo, ova će tvrdnja biti istinita za sve brojeve n manje od 12 055 735 790 331 359 447 442 538 767. Međutim, za taj n izraz $991n^2 + 1$ je potpun kvadrat. Interesantno je da se može pokazati kako postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n takvih da je $991n^2 + 1$ potpun kvadrat.

GOLDBACHOVA HIPOTEZA

Svaki je paran broj veći od 2 jednak zbroju dvaju prostih brojeva. Tako, primjerice, vrijedi: $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 3 + 7 = 5 + 5$; $12 = 5 + 7$, $16 = 3 + 13 = 5 + 11 \dots$, $94 = 5 + 89$, $96 = 7 + 89$, $98 = 19 + 79$ (prikaz nije uvijek jednoznačan). Tvrdnja se pokazuje točnom i pri provjeri za sljedeće parne brojeve.

Ova je tvrdnja poznata pod imenom **Goldbachova hipoteza**, po njemačkom matematičaru Christianu Goldbachu (1690. – 1764.) koji ju je prvi formulirao još 1742. god. u pismu L. Euleru. Do danas je provjerena za velik skup početnih prirodnih brojeva (npr. za sve brojeve manje od 10^{14}) i pokazala se istinitom. Međutim, sama tvrdnja još uvijek nije dokazana.

Zadaci 1.2.

- Koristeći induktivni način razmišljanja, predvidi sljedeći član u svakoj od lista:
 - 1, 7, 13, 19, 25, ?;
 - 1, 3, 7, 13, 21, ?;
 - 1, 3, 7, 15, 31, ?;
 - 1, 4, 9, 16, 25, ?;
 - 1, 2, 5, 14, 41, ?;
 - 2, 3, 5, 7, 11, ?;
 - 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, ?;
 - J, D, T, Č, P, ?.
- Matematičkom indukcijom dokaži da za sve $n \in \mathbf{N}$ vrijedi:
 - $-3 + 3 + 9 + \dots + (6n - 9) = 3n^2 - 6n$;
 - $-1 + 3 + 7 + \dots + (4n - 5) = n(2n - 3)$;
 - $-3 - 7 - 11 - \dots - (4n - 1) = -n(2n + 1)$;
 - $5 + 8 + 11 + \dots + (3n + 2) = \frac{1}{2}n(3n + 7)$.
- Matematičkom indukcijom dokaži da za sve $n \in \mathbf{N}$ vrijedi:
 - $2 + 7 + 15 + \dots + \frac{1}{2}n(3n + 1) = \frac{1}{2}n(n + 1)^2$;
 - $-1 + 3 - 5 + \dots + (-1)^n(2n - 1) = (-1)^n \cdot n$;
 - $3 + 6 + 12 + \dots + 3 \cdot 2^{n-1} = 3(2^n - 1)$;
 - $2 + 16 + 56 + \dots + (3n - 2) \cdot 2^n = 10 + (3n - 5) \cdot 2^{n+1}$.
- Matematičkom indukcijom dokaži da za sve $n \in \mathbf{N}$ vrijedi:
 - $1 \cdot 2^n + 2 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-2} + \dots + n \cdot 2 + (n + 1) = 2^{n+2} - (n + 3)$;
 - $1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$;
 - $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}$.
- Uvrsti nekoliko početnih vrijednosti za broj n i pokušaj odrediti izraz za sljedeće zbrojeve. Dobivenu formulu provjeri matematičkom indukcijom.
 - $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1} = ?$
 - $1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^{n-1} = ?$
 - $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = ?$
- Dokaži da za $x \neq 1$ (i $x \neq -1$ u trećem primjeru) i za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi:
 - $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$;
 - $x + 2x^2 + \dots + nx^n = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + n \cdot x^{n+2}}{(x-1)^2}$,
za sve $n \in \mathbf{N}$;
 - $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \dots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$.
- Dokaži matematičkom indukcijom:
 - $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$;
 - $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;
 - $\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$;
 - $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$;
 - $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{n}{2(n+2)}$;
 - $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.
- Dokaži matematičkom indukcijom:

$$\frac{(n+1)(n+2) \dots (2n-1) \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} = 2^n.$$
- Matematičkom indukcijom provjeri sljedeće formule za zbrojeve potencija $S_k = 1^k + 2^k + \dots + n^k$, $k \in \mathbf{N}$.

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$S_3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2;$$

$$S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

10. Koristeći se formulama iz prethodnog zadatka izračunaj sljedeće sume:

- 1) $2 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + \dots + 2(3n - 1)$;
- 2) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n + 1)$;
- 3) $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \dots + (2n - 1)(2n + 1)$;
- 4) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n(3n + 1)$;
- 5) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n + 1)(n + 2)$;
- 6) $2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3^2 + \dots + (n + 1) \cdot n^2$.



11. Matematičkom indukcijom dokaži sljedeću formulu za kvadriranje višestupanog izraza:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \dots + a_{n-1}a_n).$$

12. Matematičkom indukcijom dokaži da za svaki prirodni broj n vrijedi:

- 1) $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$;
- 2) $|a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \dots \cdot |a_n|$.

13. Matematičkom indukcijom dokaži:

- 1) $6^n + 4$ je djeljiv s 5;
 - 2) $7^n - 1$ je djeljiv sa 6;
 - 3) $5^n - 2^3$ je djeljiv s 3;
- za sve prirodne brojeve n .

14. Matematičkom indukcijom dokaži:

- 1) $6 \mid n^3 + 11n$;
- 2) $6 \mid 2n^3 + 3n^2 + 7n$;
- 3) $24 \mid n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$;
- 4) $7 \mid n^7 + 6n$;

za sve prirodne brojeve n .

15. Matematičkom indukcijom dokaži da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

- 1) $9 \mid 7^n + 3n - 1$;
- 2) $11 \mid 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$;
- 3) $17 \mid 6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$;
- 4) $17 \mid 2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$;
- 5) $19 \mid 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$;
- 6) $37 \mid 2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}$;
- 7) $64 \mid 3^{2n+1} + 40n - 67$;
- 8) $57 \mid 7^{n+2} + 8^{2n+1}$.

16. Dokaži da su za sve prirodne brojeve n ispunjene nejednakosti:

- 1) $4^n > n^2$;
- 2) $2^n > n^2 - 2n + 2$.

17. Matematičkom indukcijom dokaži:

- 1) $3^n > 2^n + 3n$, za sve $n \geq 3$;
- 2) $n^3 > 3n + 3$, za sve $n \geq 3$;
- 3) $2^n > n^2$, za sve $n \geq 5$;
- 4) $2^n > n^3$, za sve $n \geq 10$.

18. Dokaži da je broj $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \dots + 7^{4n}$ djeljiv sa 100 za svaki prirodni broj n .

19. Dokaži da za svaki prirodni broj n , $n > 1$, broj $2^{2^n} + 1$ završava znamenkom 7.



20. Dokaži matematičkom indukcijom:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx \\ &= \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{nx}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx \\ &= \frac{\cos \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{nx}{2}; \end{aligned}$$

$$3) \quad \sin x + \sin 3x + \dots + \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x};$$

$$4) \quad \cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}.$$

21. Matematičkom indukcijom dokaži:

$$1) \quad \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}};$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \operatorname{tg} \frac{x}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} - \operatorname{ctg} x. \end{aligned}$$

1.3. Binomni poučak

Faktorije

Umnožak prvih n prirodnih brojeva označavamo ovako²:

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Broj $n!$ čitamo “en faktorijela”. Tako, primjerice, vrijedi:

$$1! = 1,$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2,$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24,$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Korisno je definirati i vrijednost $0!$. Stavljamo: $0! := 1$.

Vidimo da faktorije zadovoljavaju formulu

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

uz početnu vrijednost $0! = 1$. Tako je, primjerice: $6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$, $7! = 7 \cdot 6! = 7 \cdot 720 = 5040$ itd.

Funkcija faktorijela raste izuzetno brzo. Njezine vrijednosti možemo očitavati na svakom boljem džepnom računalu, ali samo za umjerene vrijednosti broja n , obično za $n \leq 69$, $69! \approx 1.711 \cdot 10^{98}$ ili izuzetno za $n \leq 253$, $253! \approx 5.173 \cdot 10^{499}$.

Primjer 1.

Izračunajmo:

$$1) \frac{11!}{9!}; \quad 2) \frac{6! - 5!}{4!}; \quad 3) \frac{9! + 10!}{11!}.$$

$$1) \frac{11!}{9!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9!}{9!} = 11 \cdot 10 = 110.$$

$$2) \frac{6! - 5!}{4!} = \frac{6 \cdot 5! - 5!}{4!} = \frac{5 \cdot 5!}{4!} = \frac{25 \cdot 4!}{4!} = 25.$$

$$3) \frac{9! + 10!}{11!} = \frac{9! + 10 \cdot 9!}{9! \cdot 10 \cdot 11} = \frac{1 + 10}{10 \cdot 11} = \frac{1}{10}.$$

Zadatak 1. Izračunaj: 1) $7! + 8! + 9!$; 2) $12! - 1$; 3) $\frac{25!}{20!}$; 4) $\frac{7! - 6!}{120}$.

² Simbol $:=$ čitaj: “po definiciji jednako”. Time se naznačava da se izraz s lijeve strane *definira* da bude jednak onome s desne strane. Ta se oznaka naročito rabi u različitim programskim jezicima, gdje su moguće i konstrukcije oblika $n := n + 1$ i njima slične.

Binomni koeficijenti

Neka je n prirodan broj i k prirodan broj ili 0 , $k \leq n$. **Binomni koeficijent** označavamo izrazom $\binom{n}{k}$ i definiramo ga ovako:

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k},$$

za $k \geq 1$, dok za $k = 0$ po definiciji stavljamo:

$$\binom{n}{0} := 1.$$

Izraz $\binom{n}{k}$ čita se: “ n povrh (ili iznad) k ”.

Primjer 2.

Za $k = 1, 2, 3$ vrijednosti binomnih koeficijenata su:

$$\begin{aligned}\binom{n}{1} &= \frac{n}{1} = n, \\ \binom{n}{2} &= \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n-1)}{2}, \\ \binom{n}{3} &= \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.\end{aligned}$$

Primjer 3.

Izračunajmo nekoliko binomnih koeficijenata:

$$\begin{aligned}\binom{6}{2} &= \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15, \\ \binom{8}{3} &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56, \\ \binom{8}{5} &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 56, \\ \binom{9}{5} &= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 126, \\ \binom{12}{8} &= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495.\end{aligned}$$

Zadatak 2. Izračunaj: 1) $\binom{5}{2}$, 2) $\binom{7}{3}$, 3) $\binom{9}{5}$, 4) $\binom{11}{4}$, 5) $\binom{15}{2}$.

Zadatak 3. Skrati razlomke: 1) $\frac{n!}{(n-2)!}$; 2) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$.

Računanje binomnih koeficijenata

Vrijednosti binomnog koeficijenta $\binom{n}{k}$ za male brojeve n i k računamo tako da najprije u nazivniku ispišemo umnožak svih brojeva od 1 do k u rastućem poretku, a u brojniku umnožak brojeva u padajućem poretku počevši s n . Faktora u brojniku ima jednako kao u nazivniku. Prije računanja brojnik se skрати s nazivnikom.

Primjer 4.

Odredimo prirodni broj n tako da vrijedi jednakost:

$$5\binom{n}{3} = \binom{n+2}{4}.$$

Nakon raspisivanja i sređivanja, pratimo ekvivalentne jednakosti:

$$\begin{aligned} 5 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{6} &= \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{24}, \\ 20(n-2) &= (n+2)(n+1), \\ n^2 - 17n + 42 &= 0. \end{aligned}$$

Kvadratna jednadžba ima dva rješenja: $n = 3$ i $n = 14$.

Binomni je koeficijent uvijek prirodan broj. To nije očito iz definicijske formule, već ćemo to zaključiti iz sljedećih svojstava binomnih koeficijenata.

Svojstva binomnih koeficijenata

1. Prikaz s pomoću faktoriijela

Brojnik i nazivnik u definiciji binomnog koeficijenta možemo pomnožiti s $(n-k)! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-k)$. Dobit ćemo:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \cdot \frac{(n-k) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ova ‘jednostavnija’ formula nije praktična u računanju koeficijenata, jer se pritom moraju dodatno skraćivati brojnik i nazivnik:

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Daljnijim skraćivanjem i množenjem faktora u brojniku dobivamo broj 126.

Međutim, ova je formula korisna u sređivanju izraza u kojima se javljaju binomni koeficijenti.

Iz Pascalovog trokuta vidimo princip ispisivanja sljedećih redaka: svaki element tog trokuta jednak je zbroju elemenata u prethodnom retku, lijevo i desno od njega (osim rubnih elemenata koji su jednaki 1). Tako, primjerice, vrijedi

$$\begin{aligned}\binom{8}{3} + \binom{8}{4} &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 + \frac{5}{4}\right) \\ &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \binom{9}{4}.\end{aligned}$$

Ovo svojstvo vrijedi za bilo koji element Pascalovog trokuta. To se može zapisati formulom:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Zadatak 4. Dokaži ovu formulu!

Dokaz je najlakše načiniti prateći račun u sljedećem primjeru:

$$\begin{aligned}\binom{12}{4} + \binom{12}{5} &= \frac{12!}{4! \cdot 8!} + \frac{12!}{5! \cdot 7!} = \frac{5 \cdot 12! + 8 \cdot 12!}{5! \cdot 8!} \\ &= \frac{13 \cdot 12!}{5! \cdot 8!} = \frac{13!}{5! \cdot 8!} = \binom{13}{5}.\end{aligned}$$



Povijesni kutak

BLAISE PASCAL



Blaise Pascal (Clermont-Ferrand 19. lipnja 1623. – Pariz, 19. kolovoza 1662.) francuski je filozof, matematičar i fizičar. U šesnaestoj godini napisao je *Traité sur les sections coniques* (Rasprava o presjecima konika), u kojem proučava svojstva krivulja drugog reda. U sljedeće dvije godine konstruirao je stroj za zbrajanje i oduzimanje koji se i danas čuva u Pariškom muzeju. Prvi je točno formulirao i primjenjivao princip matematičke indukcije. Zasnovao je teoriju vjerojatnosti te sastavio shemu binomnih koeficijenata (koja je još otprije bila poznata Kinezima). U fizici je ostvario bitan doprinos u proučavanju tlakova plinova i tekućina. Opisao je ovisnost tlaka zraka o temperaturi i vlazi te se drži začetnikom meteorologije. Po njemu su dobile ime fizikalna jedinica za pritisak, kao i jedan programski jezik.

Autor je glasovitih *Lettres provinciales* (Pisma provincijalu). Kao filozof zastupa tezu o ograničenosti racionalnog mišljenja te da se osnovne istine mogu spoznati tek s pomoću snage vjere. Od 1658. do smrti odaje se vjerskim razmišljanjima rezultat kojih je djelo *Pensées* (Razmišljanja) objavljeno nakon njegove smrti.

Binomni poučak

Naziv binomnih koeficijenata i vrijednosti ispisane u Pascalovom trokutu sugeriraju vezu između tih brojeva i prikaza potencije binoma $(a + b)^n$. Za male vrijednosti broja n dobro su nam poznate formule za **potencije binoma**:

$$\begin{aligned}(a + b)^1 &= 1 \cdot a + 1 \cdot b, \\(a + b)^2 &= 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2, \\(a + b)^3 &= 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3.\end{aligned}$$

Posljednje dvije nazivaju se kvadrat i kub binoma. Koeficijenti u ovim izrazima upravo su binomni koeficijenti.

Množenjem izraza za kub binoma s $a + b$ dobit ćemo sljedeću jednakost:

$$\begin{aligned}(a + b)^4 &= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a + b) \\&= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \\&= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.\end{aligned}$$

Uočimo da je zbroj eksponenata u svakom pribrojniku jednak eksponentu u potenciji binoma. Nadalje, koeficijenti u ovom izrazu su binomni koeficijenti iz jednog retka Pascalovog trokuta.

Binomni poučak

Za svaki $a, b \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ vrijedi:

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \dots \\&\quad + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n.\end{aligned}$$

Dokaz poučka može se provesti s pomoću matematičke indukcije. Za $n = 1, 2, 3$ i 4 pokazali smo da formula vrijedi.

Korak indukcije, prijelaz sa n na $n + 1$ dokazuje se na identičan način poput ovog koji ćemo napraviti za prijelaz s $n = 4$ na $n + 1 = 5$:

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za broj $n = 4$:

$$(a + b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4.$$

Pomnožimo tu jednakost s $a + b$. Dobivamo:

$$\begin{aligned}(a+b)^4(a+b) &= \\&= \left[\binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4 \right] (a+b) \\&= a^5 + \binom{4}{1}a^4b + \binom{4}{2}a^3b^2 + \binom{4}{3}a^2b^3 + \binom{4}{4}ab^4 \\&\quad + a^4b + \binom{4}{1}a^3b^2 + \binom{4}{2}a^2b^3 + \binom{4}{3}ab^4 + \binom{4}{4}b^5.\end{aligned}$$

Koristeći svojstvo binomnih koeficijenata (svojstvo 2), grupirajući članove ove sume uz identične potencije, dobivamo:

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5.$$

Time je ovaj korak matematičke indukcije dokazan.

Zadatak 5. Dovršite dokaz binomnog poučka dokazujući korak indukcije za bilo koji prirodni broj n .

Primjer 5.

Razvijmo po binomnoj formuli:

1)

$$\begin{aligned}(x+1)^5 &= \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4 + \binom{5}{2}x^3 + \binom{5}{3}x^2 + \binom{5}{4}x + \binom{5}{5} \\&= x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1.\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{1}{x}\right)^6 &= \binom{6}{0}x^6 + \binom{6}{1}x^5\left(-\frac{1}{x}\right) + \binom{6}{2}x^4\left(-\frac{1}{x}\right)^2 \\&\quad + \binom{6}{3}x^3\left(-\frac{1}{x}\right)^3 + \binom{6}{4}x^2\left(-\frac{1}{x}\right)^4 \\&\quad + \binom{6}{5}x\left(-\frac{1}{x}\right)^5 + \binom{6}{6}\left(-\frac{1}{x}\right)^6 \\&= x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + \frac{15}{x^2} - \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}.\end{aligned}$$

Zadatak 6. 1) Odredi realni dio kompleksnog broja $(1-i)^5$.
2) Odredi realni dio kompleksnog broja $(1+i)^7$.

Zadatak 7. Izračunaj $(2 - \sqrt{3})^4$ koristeći binomnu formulu.

■ Znak sumacije. Opći član u razvoju binoma

Zapisivanje binomne formule možemo pojednostavniti korištenjem znaka za sumaciju $\sum$. Taj znak je grčko slovo Σ koje odgovara latinskom slovu S , i početno je slovo latinske riječi *summa* koju smo preuzeli i u hrvatskom jeziku. Znak sumacije koristi se za jednostavnije zapisivanje različitih suma. Primjerice,

$$\sum_{k=1}^5 \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}.$$

Varijablu k nazivamo **indeks sumacije**, a ispod i iznad znaka sumacije nalaze se granice unutar kojih treba načiniti zbrajanje: k mijenja se od 1 do 5, uzimajući za vrijednosti prirodne brojeve.

Broj pribrojnika može biti neodređen:

$$\sum_{k=1}^n k^2$$

označava zbroj kvadrata prvih n prirodnih brojeva:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

Izraz k^2 nakon znaka sumacije naziva se **opći član**.

Zapišimo binomnu formulu s pomoću znaka sumacije. Prvi član u razvoju binoma ima oblik $\binom{n}{0}a^n b^0$, drugi $\binom{n}{1}a^{n-1}b^1, \dots$, a $(k+1)$ -vi član glasi $\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$. To je opći član ove sume. Stavljajući $k = 0, k = 1, \dots, k = n$ dobit ćemo redom sve članove u binomnoj formuli:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Primjer 6.

Odredimo četvrti član u razvoju binoma $(\sqrt[3]{x} + \sqrt{x^3})^{10}$.

To je član koji odgovara vrijednosti indeksa $k = 3$ (jer je za prvi član $k = 0$). On iznosi

$$\binom{10}{3} (\sqrt[3]{x})^{10-3} (\sqrt{x^3})^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{\frac{7}{3}} \cdot x^{\frac{9}{2}} = 120 \cdot x^{\frac{41}{6}}.$$

Zadatak 8. Zbroj binomnih koeficijenata prva tri člana u raspisu potencije $(x - 2y)^n$ jednak je 46. Odredi onaj član koji sadrži $x^6 y^3$.

Zadatak 9. Koji član u raspisu potencije $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^9$ sadrži x^4 ?

Primjer 7.

Odredimo onaj član razvoja $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{12}$ koji ne sadrži x .

Opći član u razvoju iznosi:

$$\binom{12}{k} x^{12-k} \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = \binom{12}{k} x^{12-k} \cdot x^{-2k} = \binom{12}{k} x^{12-3k}.$$

Tražimo onaj k za koji je eksponent jednak nuli. Iz $12 - 3k = 0$ slijedi $k = 4$. To je peti član u razvoju, a iznosi $\binom{12}{4} = 495$.

Zadatak 10. U razvoju binoma $\left(x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{3}{2}}\right)^n$ binomni koeficijenti 3. i 7. člana međusobno su jednaki. Postoji li u ovom razvoju član koji ne sadrži x ?



Kutak plus

STIRLINGOVA FORMULA

Približnu vrijednost funkcije $n!$ za velike brojeve n možemo izračunati pomoću računala na sljedeći način. Vrijedi:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Ova se formula naziva **Stirlingova** formula. Još preciznije, vrijedi

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{1}{12n+1}} < n! < \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{1}{12n}}.$$

Za $n = 100$ na taj način dobivamo ocjenu: $9.332615093 \cdot 10^{157} < 100! < 9.332621569 \cdot 10^{157}$, dok je točna vrijednost (računajući s 10 točnih znamenaka) $9.332621544 \cdot 10^{157}$.

1. Koristeći Stirlingovu formulu izračunajte približnu vrijednost broja $200!$.

2. Koliko znamenaka u dekadskom zapisu ima broj $1000!$?

3. Koristeći Stirlingovu formulu izračunajte približnu vrijednost binomnog koeficijenta $\binom{100}{50}$.



Kutak plus

IDENTITETI ZA BINOMNE KOEFICIJENTE

Binomni koeficijenti zadovoljavaju mnogobrojne identitete. Većina tih formula može se dokazati s pomoću veze dvaju polinoma. Iz identiteta

$$(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$$

možemo napisati:

$$\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \dots + \binom{n}{n}x^n \right] \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \dots + \binom{n}{n}x^n \right] = \sum_{r=0}^{2n} \binom{2n}{r} x^r.$$

Polinomi slijeva i zdesna se podudaraju. Zato im se podudara koeficijent uz potenciju x^n :

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \dots + \binom{n}{n}\binom{n}{0} = \binom{2n}{n}.$$

Zbog svojstva simetrije binomnih koeficijenata, ova se jednakost može napisati na način:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

1) Rabeći jednakost $(1+x)(1+x)^n = (1+x)^{n+1}$ izvedi temeljnu rekuraziju za binomne koeficijente (na str. 28).

2) Rabeći jednakost $(1+x)^r(1+x)^s = (1+x)^{r+s}$ izvedi **Vandermondeov identitet**:

$$\sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}.$$

3) Rabeći jednakost: $(1-x)^n(1+x)^n = (1-x^2)^n$, dokaži identitet:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2 = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \binom{n}{\frac{n}{2}}, & n \text{ paran} \\ 0, & n \text{ neparan} \end{cases}$$

Dokaži sljedeće identitete:

$$4) 1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + 3 \cdot \binom{n}{3} + \dots + n \cdot \binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}.$$

$$5) \frac{1}{1} \binom{n}{0} + \frac{1}{2} \binom{n}{1} + \frac{1}{3} \binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \binom{n}{n} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

$$6) \binom{n}{0} + 3 \binom{n}{1} + 5 \binom{n}{2} + 7 \binom{n}{3} + \dots = 2^n(n+1).$$

$$7) \binom{n}{0}\binom{n}{1} + \binom{n}{1}\binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1}\binom{n}{n} = \binom{2n}{n-1}.$$

$$8) \binom{n}{0}\binom{n}{r} + \binom{n}{1}\binom{n}{r+1} + \dots + \binom{n}{n-r}\binom{n}{n} = \binom{2n}{n-r}.$$

Zadatci 1.3.

1. Izračunaj:

$$\begin{array}{ll} 1) 7! + 8! + 9!; & 2) 12! - 1; \\ 3) \frac{25!}{20!}; & 4) \frac{7! - 6!}{120}. \end{array}$$

2. Zapiši kraće:

$$\begin{array}{ll} 1) 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15!; & 2) 12 \cdot 11 \cdot 10!; \\ 3) (n+1) \cdot n \cdot (n-1)!; & \\ 4) (n-1)(n-2)(n-3)! & \end{array}$$

3. Skrati razlomke:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{15!}{13!}; & 2) \frac{8!}{5!}; \\ 3) \frac{n!}{(n-2)!}; & 4) \frac{(n+1)!}{(n-1)!}; \\ 5) \frac{(2n)!}{n!}; & 6) \frac{(n+k)!}{(n+k-2)!}; \\ 7) \frac{(n+1)!}{(n-2)!}; & 8) \frac{2n(2n-1)}{(2n)!}. \end{array}$$

4. Izračunaj:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!}; & 2) \frac{1}{8!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{6!}; \\ 3) \frac{5! + 4!}{3!}; & 4) \frac{99! - 98!}{97!}; \\ 5) \frac{50!}{48!} - \frac{30!}{28!}; & 6) \frac{50!}{49!} + \dots + \frac{2!}{1!} + \frac{1!}{0!}. \end{array}$$

5. Izračunaj:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}; & 2) \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}; \\ 3) \frac{(n-1)!}{n!} + \frac{(n-2)!}{(n-3)!}; & \\ 4) \frac{n!}{(n-1)!} - \frac{(n-1)!}{(n-2)!}. & \end{array}$$

6. Riješi jednačbe:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{(n+2)!}{n!} = 72; & 2) \frac{k!}{(k-4)!} = \frac{2k!}{(k-2)!}; \\ 3) \frac{(k+1)!}{(k-1)!} = 30; & 4) \frac{n! - (n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6}. \end{array}$$

7. Odredi posljednju znamenku zbroja
 $1! + 2! + 3! + \dots + 99!$.

8. Dokaži matematičkom indukcijom da za svaki prirodni broj n vrijedi jednakost:

$$\begin{array}{l} 1) \frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}; \\ 2) 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! \\ = (n+1)! - 1. \end{array}$$

9. Izračunaj: $\binom{10}{2}, \binom{9}{4}, \binom{18}{3}, \binom{10}{7}, \binom{12}{8}$.

10. Izravnim računom provjeri jednakosti:

$$\begin{array}{ll} 1) \binom{10}{7} = \binom{10}{3}; & 2) \binom{12}{10} = \binom{12}{2}; \\ 3) \binom{15}{8} = \binom{15}{7}; & 4) \binom{20}{14} = \binom{20}{6}. \end{array}$$

11. Izravnim računom provjeri jednakosti:

$$\begin{array}{l} 1) \binom{8}{3} + \binom{8}{4} = \binom{9}{4}; \\ 2) \binom{10}{4} + \binom{10}{5} = \binom{11}{5}; \\ 3) \binom{15}{7} + \binom{15}{8} = \binom{16}{8}; \\ 4) \binom{n+1}{n-1} + \binom{n+1}{n} = \binom{n+2}{n}. \end{array}$$

12. Odredi prirodni broj n tako da vrijede jednakosti:

$$\begin{array}{l} 1) \binom{n}{5} = \binom{n}{3}; \quad 2) 2\binom{n}{4} = \binom{n+1}{4}; \\ 3) 7\binom{n}{4} = \binom{n+2}{4}; \quad 4) 5\binom{n}{3} = \binom{n+2}{4}; \\ 5) 3\binom{2n}{n-1} = 5\binom{2n-1}{n}; \\ 6) 17\binom{2n-1}{n} = 9\binom{2n}{n-1}. \end{array}$$

13. Odredi prirodni broj x tako da vrijede jednakosti:

$$\begin{array}{l} 1) 2\binom{x}{4} = 2\binom{x}{3} - \binom{x}{2}; \\ 2) 30\binom{x}{5} + 8\binom{x}{4} = 21\binom{x}{3} - 8\binom{x}{2}; \\ 3) \binom{x}{3} + \binom{x}{5} = \binom{x+1}{3}; \\ 4) \binom{x}{4} + 2\binom{x}{2} = \binom{x+1}{4}. \end{array}$$

14. Dokaži sljedeće identitete direktno, i koristeći svojstva Pascalovog trokuta.

- 1) $\binom{n+2}{k} = \binom{n}{k-2} + 2\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$,
 $2 \leq k \leq n$;
- 2) $\binom{n+3}{k} = \binom{n}{k-3} + 3\binom{n}{k-2} + 3\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$, $3 \leq k \leq n$.



15. Prikaži pomoću binomne formule:

- 1) $(x-1)^4$; 2) $(2x+1)^5$;
- 3) $(2x+1)^6$; 4) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^4$;
- 5) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^5$; 6) $(1+y^2)^4$;
- 7) $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$; 8) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^6$.

16. Izračunaj:

- 1) $(3x+1)^4 + (3x-1)^4$;
- 2) $(x+1)^6 + (x-1)^6$.

17. 1) Napiši tri prva člana raspisa potencije $(a-2)^{10}$.
2) Napiši tri posljednja člana raspisa potencije $(2x+1)^9$.

18. Odredi koeficijent izraza:

- 1) x^3y^4 u raspisu potencije $(2x-3y)^7$;
- 2) x^6y^3 u raspisu potencije $(x-2y)^9$;
- 3) x^6y^5 u raspisu potencije $(x+y)^{11}$.

19. U raspisu potencije $(4x+3)^n$ koeficijenti članova koji sadrže x^3 i x^4 su jednaki. Koliko iznose?

20. U raspisu potencije $(2x+3)^n$ koeficijenti članova koji sadrže x^5 i x^6 su jednaki. Odredi n .

21. U prikazu binoma $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ koeficijenti četvrtog i desetog člana se podudaraju. Odredi onaj član koji ne sadrži x .

22. Odredi onaj član razvoja binoma $\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^3} + \sqrt[3]{a^2}\right)^{12}$ uz potenciju a^{13} .

23. U razvoju binoma odredi:

- 1) član s x^6 od $(x+2)^8$;
- 2) član s x^5 od $(\sqrt{x} + \sqrt{3})^{12}$;
- 3) član od $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ koji ne sadrži x ;
- 4) član od $(x^{3/2} + x^{-1/2})^8$ koji ne sadrži x .

24. Odredi imaginarni dio kompleksnog broja $z = (1-i)^7$.

25. Odredi 13. član u raspisu potencije $(1-i\sqrt{3})^{15}$, gdje je i imaginarna jedinica.

26. Odredi 11. član u raspisu potencije $(\sqrt{2}-i)^{13}$, gdje je i imaginarna jedinica.

27. U raspisu potencije $\left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ je 12 članova.

- 1) Odredi treći član raspisa;
- 2) Odredi slobodni član raspisa.

28. U raspisu potencije $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ je 12 članova.

- 1) Odredi četvrti član raspisa;
- 2) Odredi slobodni član raspisa.

29. Postoji li u raspisu potencije $(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x})^{20}$ član koji sadrži x^7 ?

30. Postoji li u raspisu potencije $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{11}$ član koji sadrži x^3 ?

31. Postoji li u raspisu potencije $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^9$ član koji sadrži x^4 ?

32. Zbroj koeficijenata prvog, drugog i trećeg člana razvoja binoma $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$ iznosi 37. Odredi treći član ovog razvoja.

33. Odredi zbroj koeficijenata u razvoju binoma $(5x^2 - 4y^3)^7$.

34. Odredi x ako je poznato da je treći član u razvoju binoma $(x + x^{\log x})^5$ jednak 1 000 000.

1.4. Prirodni, cijeli i racionalni brojevi

U skupu prirodnih brojeva posebnu ulogu imaju prosti (prim) brojevi.

■ Prost i brojevi. Faktorizacija broja na proste faktore

Prirodni broj veći od 1 je **prost** ako je djeljiv samo s 1 i sa samim sobom. Broj je **složen** ukoliko nije prost, s izuzetkom broja 1 koji ne držimo niti prostim niti složenim. Nekoliko prvih prostih brojeva su 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 itd. Svaki je složen broj nužno djeljiv s nekim prostim brojem većim od 1. Zapravo, svaki se prirodni broj može na jedinstven način napisati u obliku umnoška prostih brojeva:

$$n = p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_m.$$

Primjerice, $15 = 3 \cdot 5$, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ i sl. Ovdje neki od njegovih faktora mogu biti i jednaki. Grupiramo li ih zajedno, dobit ćemo broj oblika:

$$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k}.$$

Primjerice, $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $96 = 2^5 \cdot 3$ i sl.

Primjer 1.

Koliko različitih faktora ima broj 72 (uključujući 1 i sam broj)?

Prikažimo broj 72 kao umnožak prostih faktora: $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$. Svaki faktor ovog broja ima oblik $2^n \cdot 3^m$, pri čemu je $0 \leq n \leq 3$, $0 \leq m \leq 2$. Tako primjerice, za $n = 2$ i $m = 1$ dobivamo faktor $2^2 \cdot 3^1 = 12$.

Ukupan broj faktora je $4 \cdot 3$, jer postoje 4 izbora za eksponent n i 3 izbora za eksponent m . Ispišite sve te faktore poredajući ih po veličini!

Zadatak 1. Koliko različitih faktora ima broj 300?

Zadatak 2. Zbroj svih faktora nekog prostog broja jednak je 998. Koji je to broj?

Zadatak 3. Koji broj manji od 100 ima najviše različitih faktora?

Primjer 2.

Broj 1005 nije prost. Zbroj njegovih znamenki djeljiv je s 3 pa je i sam broj djeljiv sa 3. Nije prost niti broj 1006. On je paran. Jasno, nije prost broj niti 1008. A što je s brojevima 1007 i 1009? Jesu li oni prosti?

Pri provjeri je li neki broj n prost dovoljno je ispitati njegovu djeljivost svim prostim brojevima p koji su manji ili jednaki broju $\sqrt{n}$. (Zašto?)

Broj 1007 nije djeljiv s 3 niti s 5. Izravnim dijeljenjem sa 7, 11 13 i 17 uviđamo da mu to nisu prosti faktori. Pri dijeljenju s 19, dobivamo $1007 = 19 \cdot 53$. Zato 1007 nije prost.

Provjera broja 1009 pokazuje da je on prost. Broj treba podijeliti svim prostim brojevima manjim ili jednakim 31. (Uz ovdje spomenute, treba provjeriti djeljivost s 23, 29 i 31.)

Zadatak 4. Koji su od sljedećih brojeva prosti: 901, 903, 905, 907, 909, 911? Za one koji nisu, napiši faktorizaciju na proste faktore.

Beskonačnost skupa prostih brojeva

Prostih brojeva ima beskonačno mnogo.

Dokaz. Jednostavan dokaz ove činjenice bio je poznat još starim Grcima. Dokazujemo pretpostavivši suprotno: skup P prostih brojeva je konačan. Neka su mu elementi $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$. Načinimo broj $n = p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_m + 1$. On je veći od svih brojeva $p_1, \dots, p_m$ i zato mora biti složen. To znači da je djeljiv s nekim prostim brojem p_j iz skupa P . Kako je istim brojem djeljiv i umnožak $p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_m$, iz toga slijedi da je s p_j djeljiva i razlika $n - p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_m = 1$, što je nemoguće. Dobili smo proturječje s pretpostavkom da je skup P konačan.

Relativno prosti brojevi

Brojevi koji nemaju zajedničkih djelitelja nazivaju se **relativno prosti**. Njihova **najveća zajednička mjera** (najveći zajednički djelitelj) jednak je 1, što zapisujemo ovako: $M(x, y) = 1$.

Najveću zajedničku mjeru dvaju brojeva možemo odrediti poznavajući faktORIZACIJU obaju brojeva. Najveća zajednička mjera sadrži zajedničke proste faktore onoliko puta koliko se nalaze i u jednom i u drugom broju.

Primjer 3.

$$M(4, 6) = M(2^2, 2 \cdot 3) = 2,$$

$$M(24, 36) = M(2^3 \cdot 3, 2^2 \cdot 3^2) = 2^2 \cdot 3 = 12,$$

$$M(378, 693) = M(2 \cdot 3^3 \cdot 7, 3^2 \cdot 7 \cdot 11) = 3^2 \cdot 7 = 63,$$

$$M(72, 175) = M(2^3 \cdot 3^2, 5^2 \cdot 7) = 1.$$



O PROSTIM BROJEVIMA

Otkrivanje sve većih prostih brojeva oduvijek je bio veliki izazov matematičarima. Danas to ima vrlo praktično značenje. Najvažnije metode šifriranja za slanje povjerljivih podataka elektronskim putem (poput elektroničkog plaćanja karticama) temelji se na svojstvima prostih brojeva. Ključ za šifriranje i dešifriranje poruke temelji se na odabiru prirodnog broja n koji je dobiven kao umnožak točno dva prosta faktora. Brojevi koji su u uporabi u standardnim algoritmima imaju preko 300 znamenaka. Razbijanje šifre svodi se na otkrivanje faktorizacije takvog broja n , što je problem koji niti računala ne mogu obaviti u razumnom vremenu.

Utrka za otkrivanjem sve većih brojeva započela je 1588. godine, kad je Pietro Cataldi provjerio da su $2^{17} - 1$ i $2^{19} - 1$ prosti brojevi. Ako je broj n složen, tad je djeljiv s prostim brojem koji ne premašuje $\sqrt{n}$. Cataldi je svoj račun temeljio na tablici prostih brojeva manjih od 750, što je bilo korektno jer je korijen broja $2^{19} - 1$ približno broj 724. Takva je provjera mukotrpna, jer zahtijeva djeljenje sa *svim* prostim brojevima manjim od 724.

Brojevi oblika $M_p = 2^p - 1$ nazivaju se **Mersenneovi brojevi**. Da bi taj broj bio prost, nužno je da p bude prost (dokaži tu tvrdnju!). Cataldi je tvrdio da su i brojevi $2^p - 1$ prosti za $p = 23, 29, 31, 37$, ali to s pomoću svoje tablice nije mogao provjeriti. Godine 1640. Pierre Fermat je pokazao da prosti djelitelji broja $2^p - 1$ moraju biti oblika $2kp + 1$ za neki prirodni broj k . Sad je bilo vrlo jednostavno vidjeti da M_{23} nije prost, jer je djeljiv s 47 ($k = 1$), M_{37} je djeljiv s 223 ($k = 3$), a M_{29} s 233 ($k = 4$). Da je $2^{31} - 1$ uistinu prost, dokazao je L. Euler 1738. godine. Međutim, interesantno je da je on tvrdio da su $2^{41} - 1$ i $2^{47} - 1$ prosti, što nije istina.

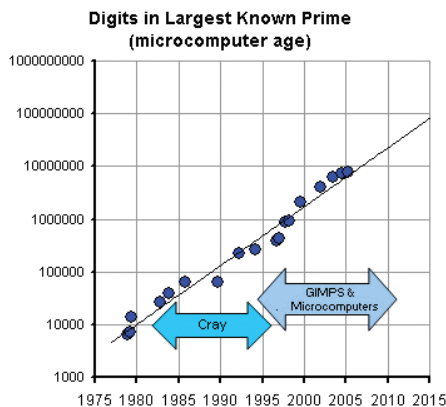
Godine 1876. Lucas je otkrio da je $2^{127} - 1$ prost broj. Taj broj ima 39 znamenaka: 170 141 183 460 469 231 731 687 303 715 884 105 727. Taj je broj ostao rekorder za narednih 75 godina, i ujedno je najveći prosti broj koji nije otkriven s pomoću računala.

Mersenneovi brojevi. Svi do danas poznati prosti brojevi oblika $2^p - 1$ dobivaju se za $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937, 21701, 23209, 44497, 86243, 110503, 132049, 216091, 756839, 859433, 1\,257\,787$ (378 632 znamenke), 1 398 269 (420 921 znamenka), 2 976 221 (895 932 znamenke), 3 021 377 (909 526 znamenaka), 6 972 593 (2 098 960 znamenaka), 13 466 917 (4 053 946 znamenaka), 20 996 011 (6 320 430 znamenaka), 24 036 583 (7 235 733 znamenaka), 25 964 951 (7 816 230 znamenaka), 30 402 457 (9 152 052 znamenaka), 32 582 657 (9 808 358 znamenaka), 37 156 667 (11 185 272 znamenaka), 42 643 801 (12 837 064 znamenaka), 43 112 609 (12 978 189 znamenaka), 57 885 161 (17 425 170 znamenaka), otkriven 25. siječnja 2013.

Broj prostih brojeva. U knjizi “*Tablice i formule: matematika, fizika, astronomija, kemija*” dan je popis prvih 3480 prostih brojeva (od 2 do 32 423). Ako je $\pi(n)$ broj prostih brojeva koji nisu veći od n , onda je $\pi(1000) = 168$, $\pi(10000) = 1229$, $\pi(10^5) = 9592$, $\pi(10^6) = 78\,498$, $\pi(10^7) = 664\,579$, $\pi(10^8) = 5\,761\,455$, $\pi(10^9) = 50\,847\,534$, $\pi(10^{10}) = 455\,052\,512$. Za jako velike brojeve n , vrijedi približna formula $\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n}$.

Na mrežnim stranicama primes.utm.edu možete pronaći tablicu prvih 15 000 000 prostih brojeva (od 2 do 275 604 541) te linkove do stranica s najnovijim otkrićima u vezi s prostim brojevima.

Ovaj zanimljivi dijagram na toj stranici pokazuje korelaciju između broja znamenaka najvećeg prostog broja i godine otkrića.



Primjer 4.

Za svaki prirodni broj n broj $n^3 - n$ djeljiv je sa 6. Dokažimo.

Napišimo broj u obliku

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1).$$

Brojevi $n - 1$, n , $n + 1$ su tri uzastopna prirodna broja. Točno jedan među njima mora biti djeljiv s 3. Barem jedan od njih djeljiv je s 2. Zato je njihov umnožak djeljiv s 6.

Primjer 5.

Dokažimo da je zbroj kubova triju uzastopnih cijelih brojeva djeljiv s 9.

Najprije imamo: $(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 = 3n(n^2 + 2)$. Ako je n djeljiv s 3, onda je ovaj broj očito djeljiv s 9. A ako n nije djeljiv s 3, tada je on oblika $n = 3k \pm 1$ te je broj $n^2 + 2$ djeljiv s 3. Naime, $(3k \pm 1)^2 + 2 = 9k^2 \pm 6k + 3 = 3(3k^2 \pm 2k + 1)$.

Primjer 6.

Dokažimo da je za svaki prirodni n broj $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ djeljiv s 11.

Broj možemo napisati ovako:

$$3^{2n+2} + 2^{6n+1} = 9 \cdot 9^n + 2 \cdot 64^n = 9 \cdot (11 - 2)^n + 2 \cdot (66 - 2)^n$$

Prikažemo li ove potencije s pomoću binomne formule, svaki član osim posljednjeg biti će djeljiv s 11. Posljednji pribrojnici u oba člana u zbroju daju:

$$9 \cdot (-2)^n + 2 \cdot (-2)^n = 11 \cdot (-2)^n$$

pa je čitava suma djeljiva s 11.

Zadatak 5. Dokaži da je za svaki prirodni broj n broj $3^{4n} - 4^{3n}$ djeljiv sa 17.

Primjer 7.

Djeljivost sa 7. Za djeljivost s brojem 7 nema jednostavnog pravila. Možda će nekom biti prihvatljivo ovo: Udvostruči znamenku jedinica i oduzmi je od početnog broja kojemu je prekrížena znamenka jedinica. Postupak ponovi potreban broj puta. Broj je djeljiv sa 7 onda i samo onda ako je broj dobiven ovim postupkom djeljiv sa 7. Primjerice:

$$8303 \mapsto 830 - 6 = 824 \mapsto 82 - 8 = 74,$$

$$8792 \mapsto 879 - 4 = 875 \mapsto 87 - 10 = 77$$

pa 8303 nije djeljiv sa 7, a 8792 jeste. Dokažimo ovaj kriterij.

Početni broj možemo napisati u obliku $10x + y$. Tu je y znamenka jedinica, a x broj dobiven iz početnog križanjem te znamenke. Sada imamo

$$10(x - 2y) = 10x + y - 21y$$

Brojevi 7 i 10 su relativno prosti, pa je $10(x - 2y)$ djeljiv sa 7 onda i samo onda ako je $x - 2y$ djeljiv sa 7. No, desna strana je djeljiva sa 7 onda i samo onda kad je početni broj $10x + y$ djeljiv sa 7. Time je tvrdnja dokazana.

■ Proširenje skupa prirodnih brojeva

Operacije zbrajanja (+) i množenja (·) definirane su u *skupu prirodnih brojeva* $\mathbf{N}$. To znači da je zbroj prirodnih brojeva ponovno prirodan broj, kao i umnožak dvaju takvih brojeva. Njihova osnovna svojstva su:

$x + y = y + x,$	(komutativnost zbrajanja)
$x + (y + z) = (x + y) + z,$	(asocijativnost zbrajanja)
$x \cdot y = y \cdot x,$	(komutativnost množenja)
$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$	(asocijativnost množenja)
$1 \cdot x = x,$	(neutralnost jedinice za množenje)
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,$	(distributivnost množenja prema zbrajanju).

Operacije oduzimanja i dijeljenja nisu definirane u skupu prirodnih brojeva. To znači da ne možemo uvijek oduzeti ili podijeliti dva po volji odabrana prirodna broja tako da i rezultat bude prirodni broj. Zato vrlo jednostavna jednadžba

$$x + n = m$$

u kojoj su n i m prirodni brojevi, ne mora imati rješenje u skupu $\mathbf{N}$.

Da bismo uvijek mogli riješiti tu jednadžbu, moramo skup $\mathbf{N}$ proširiti nulom i negativnim cijelim brojevima. Na taj način dobivamo skup $\mathbf{Z}$ cijelih brojeva:

$$\mathbf{Z} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots\}.$$

U ovom većem skupu za operacije zbrajanja i množenja vrijede ista svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti kao i u skupu prirodnih brojeva. Tim svojstvima dodajemo dva nova:

- $x + 0 = x$ (neutralnost nule za zbrajanje),
- za svaki $x \in \mathbf{Z}$ postoji $-x \in \mathbf{Z}$ takav da je $x + (-x) = 0$ (postojanje suprotnog broja).

Dakle, u skupu cijelih brojeva za svaki broj x postoji njemu **suprotan broj** $-x$ koji zbrojen s x daje nulu. Ako je x pozitivan, onda je $-x$ negativni broj iste apsolutne vrijednosti. Ako je x negativan, onda je $-x$ pozitivni broj iste apsolutne vrijednosti. Nadalje, suprotan broj suprotnog broja jednak je početnom broju: $-(-x) = x$.

Korištenjem pojma suprotnog broja u skup cijelih brojeva uvodimo *izvedenu* operaciju oduzimanja:

$$y - x := y + (-x).$$

To znači da je $y - x$ samo dogovorni jednostavniji zapis za zbrajanje broja y sa suprotnim brojem broja x .

Definicija operacije oduzimanja

Oduzimanje dvaju brojeva je zbrajanje prvog broja i suprotnog broja drugog broja.

Ovo nam svojstvo osigurava da je jednačba

$$x + n = m$$

u kojoj su n i m cijeli brojevi, rješiva u skupu $\mathbf{Z}$. Njezino je rješenje cijeli broj $m + (-n) = m - n$.

■ Polje racionalnih brojeva

Ako su n i m cijeli brojevi, jednačba

$$nx = m$$

nema uvijek rješenje u skupu cijelih brojeva.

Da obuhvatimo rješenja te jednačbe, moramo skup cijelih brojeva proširiti razlomcima.

Racionalan broj je broj oblika $\frac{m}{n}$, pri čemu je m cijeli, a n prirodni broj. Skup svih racionalnih brojeva označavamo s $\mathbf{Q}$. Očito je $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$.

Aksiomi polja racionalnih brojeva

U skupu racionalnih brojeva operacije zbrajanja i množenja imaju sljedeća svojstva³:

- $R_1 \quad x + y = y + x, \quad \forall x, y \in \mathbf{Q}$
(komutativnost zbrajanja),
- $R_2 \quad x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in \mathbf{Q}$
(asocijativnost zbrajanja),
- $R_3 \quad x + 0 = x, \quad \forall x \in \mathbf{Q}$
(neutralnost nule za zbrajanje),
- $R_4 \quad (\forall x \in \mathbf{Q})(\exists (-x) \in \mathbf{Q}) x + (-x) = 0$
(postojanje suprotnog broja),
- $R_5 \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad \forall x, y \in \mathbf{Q}$
(komutativnost množenja),
- $R_6 \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \quad \forall x, y, z \in \mathbf{Q}$
(asocijativnost množenja),
- $R_7 \quad 1 \cdot x = x, \quad \forall x \in \mathbf{Q}$
(neutralnost jedinice za množenje),
- $R_8 \quad (\forall x \in \mathbf{Q}, x \neq 0)(\exists x' \in \mathbf{Q}) x' \cdot x = 1$
(postojanje recipročnog broja),
- $R_9 \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad \forall x, y, z \in \mathbf{Q}$
(distributivnost množenja prema zbrajanju).

Kažemo da skup $\mathbf{Q}$ čini **polje**.

³ Znak $\forall$ dolazi od obratno napisanog početnog slova njemačke riječi *Alle* (svi). Čita se: za svaki. Znak $\exists$ dolazi od obratno napisano početnog slova njemačke riječi *Existieren* (postojati), koja je nastala po latinskoj riječi istog značenja. Čita se: postoji.

Recipročni broj x' broja x je dobro nam znani broj $\frac{1}{x}$ ili x^{-1} . Tako rješenje jednadžbe

$$a \cdot x = b,$$

gdje su $a \neq 0$ i b racionalni brojevi, možemo nakon množenja s recipročnim brojem pisati u obliku:

$$a'(a \cdot x) = a' \cdot b$$

$$(a' \cdot a)x = a' \cdot b$$

$$x = a' \cdot b$$

$$x = a^{-1} \cdot b = \frac{1}{a} \cdot b = \frac{b}{a}.$$

Time smo zapravo *definirali* novu operaciju, **dijeljenje**, koja je definirana u skupu racionalnih brojeva: količnik dvaju racionalnih brojeva (s djelitelem različitim od nule) ponovo je racionalni broj. Dijeljenje broja b racionalnim brojem a zapravo se svodi na množenje broja b recipročnim brojem broja a .

Definicija operacije dijeljenja

Dijeljenje je množenje recipročnim brojem.

Stoga kad ističemo definiciju skupa $\mathbf{Q}$, spominjemo samo *dvije* operacije na tom skupu: zbrajanje i množenje. Druge dvije elementarne operacije, oduzimanje i dijeljenje, izvedene su operacije iz množenja i zbrajanja i predstavljaju samo jednostavniji zapis za zbrajanje sa suprotnim elementom, odnosno množenje recipročnim brojem.

■ $\mathbf{Q}$ je uređeno polje

U skupu racionalnih brojeva možemo definirati relaciju poretka $<$ ovako:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff 0 < \frac{c}{d} - \frac{a}{b}. \quad (1)$$

Računajući razliku (1) zaključujemo:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff 0 < \frac{bc - ad}{bd} \iff ad < bc. \quad (2)$$

(Prisjetimo se da su nazivnici u zapisu racionalnih brojeva prirodni, dakle, pozitivni brojevi.) Tako, primjerice, vrijedi: $\frac{7}{12} < \frac{3}{5}$, jer je $7 \cdot 5 < 3 \cdot 12$.



Češće promatramo sličnu relaciju poretka $\leq$

$$x \leq y \iff (x = y \text{ ili } x < y).$$

Aksiomi relacije poretka u polju $\mathbf{Q}$

- R_{10} $y \leq x$ ili $x \leq y$,
 R_{11} ako je $x \leq y$ i $y \leq x$, onda je $x = y$,
 R_{12} ako je $x \leq y$ i $y \leq z$, onda je $x \leq z$,
 R_{13} ako je $x \leq y$, onda za svaki $z \in \mathbf{Q}$ vrijedi $x + z \leq y + z$,
 R_{14} ako je $0 \leq x$ i $0 \leq y$, onda je $0 \leq xy$.

Polje racionalnih brojeva je **uređeno polje**. Za svaka dva racionalna broja možemo reći jesu li oni jednaki ili je jedan od njih veći (i koji je to). Međutim, to nije uvijek jednostavno učiniti, vidi Kutak plus.

Primjer 8.

Poredajmo po veličini brojeve $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{5}{8}$, $z = \frac{4}{7}$.

Riječ je o jednostavnim brojevima (s malim brojnikom i nazivnikom) i usporedbu neće biti teško učiniti. Pritom nećemo uspoređivati po dva broja međusobno, već ćemo, određujući najmanji zajednički višekratnik, odjednom odrediti poredak svih brojeva:

$$x = \frac{112}{168}, \quad y = \frac{105}{168}, \quad z = \frac{96}{168},$$

te je $z < y < x$.

Jednostavniji način za usporedbu ovih brojeva jest napisati ih u **decimalnom zapisu**, koji dobivamo direktnim dijeljenjem ovih brojeva:

$$x = 0.6666 \dots \quad y = 0.625, \quad z = 0.57143 \dots$$

**Kutak plus****USPOREDBA RACIONALNIH BROJEVA**

Poredajmo po veličini brojeve:

$$x = \frac{1346269}{2178309}, \quad y = \frac{5824280}{9423883}, \quad z = \frac{10816520}{17501497}.$$

Točan odgovor je: za ove brojeve vrijedi $y = z < x$. Na koji smo način to provjerili? Brojevi su preveliki da bi se umnožak u 2) mogao izračunati s dovoljnom preciznošću na džepnom računalu. Izračunajmo umjesto toga (računalom) decimalni prikaz ovih brojeva. Dobivamo:

$$x = 0.61803398875 \dots \quad y = 0.61803398875 \dots \quad z = 0.61803398875 \dots$$

Vidimo da odgovor na vrlo jednostavno pitanje može biti poprilično složen.

■ Decimalni prikaz racionalnog broja

Pozicijski dekadski zapis brojeva može se proširiti i na racionalne brojeve. Takav prikaz broja nazivamo **decimalni prikaz**. Tako, primjerice, broj $\frac{1}{2}$ ima decimalni prikaz 0.5, broj $\frac{11}{8}$ ima decimalni prikaz 1.375, $\frac{1}{100} = 0.01$ itd. Ove prikaze dobivamo dijeljenjem brojnika s nazivnikom.

Što je s brojem $\frac{1}{3}$? Njegov decimalni prikaz *nije konačan*. Dijeleći brojnik s nazivnikom, dobivamo za međurezultate dijeljenja brojeve 0.3, 0.33, 0.333, 0.3333 itd. Dakle je

$$\frac{1}{3} = 0.333333 \dots$$

a znamenka 3 se ponavlja u beskonačnost. Ovaj broj zapisujemo još na način 0.3̇, gdje točka iznad broja pokazuje da se znamenka 3 ponavlja.

Prikaz racionalnih brojeva može biti beskonačan decimalni broj sa znamenkama koje se ponavljaju i na složenije načine. Primjerice, broj $\frac{1}{7}$ ima prikaz:

$$\frac{1}{7} = 0.1428571428571428 \dots = 0.\dot{1}4285\dot{7}.$$

Ovdje se ponavlja skupina od šest znamenaka. Kažemo da ovaj decimalni prikaz ima **period** duljine 6, a počinje neposredno iza decimalne točke. Točku stavljamo na početnu i završnu znamenku perioda. Ovakav se broj naziva **čisto periodični** decimalni broj.

Period ne mora počinjati neposredno nakon decimalne točke:

$$\frac{37}{14} = 2.6428571428571428 \dots = 2.6\dot{4}2857\dot{1}.$$

Za takav broj kažemo da ima **mješovito periodični** decimalni prikaz. Opći oblik takvog prikaza je:

$$x = \underbrace{a_k \dots a_0}_{\text{cjelobrojni dio}} . \underbrace{b_1 \dots b_r}_{\text{predperiod}} \underbrace{\dot{c}_1 \dots \dot{c}_p}_{\text{period}}$$

U postupku dijeljenja dvaju prirodnih brojeva ostataka može biti samo konačno mnogo, jer su manji od djelitelja. Zato se postupak dijeljenja ili završava u konačno mnogo koraka (kad se dobije ostatak nula), ili od nekog trenutka ponavlja.

Decimalni prikaz racionalnih brojeva

Svaki racionalni broj ima konačan ili beskonačan periodični decimalni prikaz.

Vrijedi li i obratni zaključak? Odgovara li svakom periodičnom decimalnom broju racionalan broj? Odgovor je potvrđan. Pogledajmo najprije poseban slučaj kad je cjelobrojni dio jednak nuli, a decimalni dio čisto periodičan. Neka je $x = 0.\dot{2}0\dot{5}$.

$$\begin{aligned}x &= 0.\dot{2}0\dot{5} = 0.205205 \dots, \\10^3 \cdot x &= 205.205205 \dots = 205 + 0.205205 \dots = 205 + x, \\(1000x - x) &= 205 \implies x = \frac{205}{999}.\end{aligned}$$

Decimalni prikaz racionalnih brojeva, obrat

Vrijedi sljedeći prikaz:

$$0.\dot{c}_1 \dots \dot{c}_p = \frac{c_1 \dots c_p}{10^p - 1} = \frac{c_1 \dots c_p}{99 \dots 9} \quad (3)$$

Svaki periodičan decimalni zapis odgovara racionalnom broju.

Primjer 9.

$$\begin{aligned}0.\dot{3} &= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, & 0.\dot{5} &= \frac{5}{9}, & 0.\dot{1}\dot{2} &= \frac{12}{99} = \frac{4}{33}, \\0.\dot{2}3809\dot{5} &= \frac{238095}{999999} = \frac{26455}{111111} = \frac{2405}{10101} = \frac{5 \cdot 13 \cdot 37}{3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37} = \frac{5}{21}, \\1.\dot{4} &= 1 + \frac{4}{9} = \frac{9+4}{9} = \frac{13}{9}, \\2.\dot{0}7\dot{4} &= 2 + \frac{74}{999} = \frac{2 \cdot 999 + 74}{999} = \frac{2072}{999} = \frac{56}{27}.\end{aligned}$$

Primjer 10.

$$\begin{aligned}2.91\dot{6} &= 2.91 + \frac{0.\dot{6}}{100} = \frac{291}{100} + \frac{6}{900} = \frac{291 \cdot 9 + 6}{900} = \frac{2625}{900} = \frac{35}{12}, \\12.15\dot{7}4\dot{0} &= 12.15 + \frac{0.\dot{7}4\dot{0}}{100} = \frac{1215}{100} + \frac{740}{999 \cdot 100} = \frac{1215 \cdot 999 + 740}{99900} \\&= \frac{1214525}{99900} = (\text{kratimo s } 25) = \frac{48581}{3996} = \frac{1313}{108}, \\1.24\dot{9} &= 1.24 + \frac{0.\dot{9}}{100} = \frac{124}{100} + \frac{9}{9 \cdot 100} = \frac{124 + 1}{100} = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

Napomena. Prema prethodnom primjeru, vidimo da decimalne brojeve s konačnim decimalnim prikazom možemo promatrati i kao brojeve s beskonačnim periodičnim prikazom, sa znamenkom 9 u periodu:

$$\frac{5}{4} = 1.25 = 1.24999 \dots = 1.24\dot{9}, \quad 1 = 0.999 \dots = 0.\dot{9}.$$

Zadatak 6. Zapiši u obliku razlomka racionalne brojeve $1.2\dot{3}\dot{5}$, $0.01\dot{2}1\dot{2}$. Provjeri račun koristeći džepno računalo.

Primjer 11.

Izračunajmo: 1) $1.2\dot{4} + 0.62\dot{1}\dot{3}$, 2) $3.82\dot{3} + 5.74\dot{2}$.

Pretvaranje broja u razlomak nepotrebno bi otežalo račun. Umjesto toga, decimalne znamenke ćemo napisati tako da periodi počinju istom decimalom i jednako dugo traju. Na taj ih način možemo zbrojiti:

$$1) 1.2\dot{4} + 0.62\dot{1}\dot{3} = 1.244\dot{4} + 0.621\dot{3} = 1.865\dot{7},$$

$$2) 3.82\dot{3} + 5.74\dot{2} = 3.823\dot{3} + 5.742\dot{4} = 9.565\dot{7}.$$

Točan se rezultat može naslutiti uporabom džepnog računala na sljedeći način:

$$3.82333333333 + 5.74242424242 = 9.56575757575.$$

Primjer 12.

Izračunajmo $0.1\dot{2}\dot{5} + 0.4\dot{7}$

$$0.1\dot{2}\dot{5} + 0.4\dot{7} = 0.12\dot{5} + 0.47\dot{4} = 0.59\dot{9} = 0.59 = 0.6$$

Prevedite ove decimalne brojeve u razlomke i uvjerite se u točnost računa. Provedite račun i s pomoću džepnog računala.

Zadatak 7. Izračunaj $x - y$ i $x + y$ ako je $x = 1.2\dot{3}\dot{4}$, $y = 0.81\dot{5}$.



Kutak plus

FERMATOVI BROJEVI

Za $n = 0, 1, 2, 3, 4$ broj $F_n = 2^{2^n} + 1$ je prost: dobivamo redom brojeve 3, 5, 17, 257, 65537. Na osnovi toga je P. Fermat tvrdio da su ti brojevi prosti za svaki prirodni broj n . Međutim, L. Euler je 1732. god. pokazao da je već sljedeći broj $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297$ djeljiv s 641, $F_5 = 641 \cdot 6\,700\,417$. Do danas nije pronađen niti jedan novi prost Fermatov broj, a za mnoge se zna da su složeni (npr. svi brojevi za $5 \leq n \leq 16$). U binarnom zapisu Fermatovi brojevi imaju prikaze 11, 101, 10001, 100000001, 100...001 (15 znamenka 0) itd. Ti su brojevi interesantni jer je poznato da se pravilni mnogokut čiji je broj stranica prost broj može konstruirati ravnalom i šestarom onda i samo onda ako je broj njegovih stranica Fermatov broj. Tako se, primjerice, mogu konstruirati pravilni trokut i peterokut, ali ne može sedmerokut. Ovu je tvrdnju dokazao Gauss, a tome u spomen svjedoči postolje njegovog spomenika u obliku pravilnog 17-terokuta.

Zadaci 1.4.

1. Ispitaj koji su od sljedećih brojeva prosti: 237, 839, 929, 5833, 17 947, 22 279, 28 709.
2. Uvjeri se da su svi brojevi između 26960 i 26980 složeni.
3. Napiši faktORIZACIJU sljedećih prirodnih brojeva: 312, 556, 1001, 5828, 12481.
4. Neka je tvrdnja T: Ako je broj oblika $111 \dots 11$ prost, onda mu je broj znamenaka prost broj.
 - 1) Dokaži ovu tvrdnju.
 - 2) Iskaži obratnu tvrdnju. Je li ona istinita?
 - 3) Vrijedi $111 = 3 \cdot 37$. Je li to u suprotnosti sa tvrdnjom T? Objasni svoj zaključak?
 - 4) Vrijedi $1111 = 11 \cdot 101$. Je li to u suprotnosti s tvrdnjom T?
 - 5) Pokušaj pronaći barem dva prosta broja ovog oblika. Za to će biti nužna pomoć računala.
5. Koristeći algoritam djeljivosti brojem 7, ustanovi koji od sljedećih brojeva su djeljivi sa 7
 - 1) 10002000300020001;
 - 2) 10003000400030001;
 - 3) 10004000500040001;
 - 4) 40004000300020001.
 (Brojevi su veliki da se do rezultata ne bi došlo neposrednim dijeljenjem na džepnom računalu.)
6. Na koji način, koristeći džepno računalo, možeš riješiti prethodni zadatak pomoću samo dva dijeljenja?
7. **Djeljivost s 13.** Broj je djeljiv s 13 onda i samo onda ako je s 13 djeljiv broj dobiven ovom transformacijom: znamenka jedinica broja se učtverostruči i doda početnom broju kojemu je prekrivena znamenka jedinica (ovaj se postupak može ponoviti). Dokaži ovaj kriterij.
8. Koristeći algoritam iz prethodnog zadatka, ustanovi koji od sljedeća dva broja je djeljiv s 13: $x = 1000010000100007$ ili $y = 1000010000100009$? (Brojevi su veliki da se do rezultata ne bi došlo neposrednim dijeljenjem na džepnom računalu.)
9. Na koji način, koristeći džepno računalo, možeš riješiti prethodni zadatak pomoću samo dva dijeljenja?
10. Ako je zbroj prvih n prirodnih brojeva za 187 veći od zbroja prvih $2n$ prirodnih brojeva, koliki je zbroj prvih $3n$ prirodnih brojeva?

— ◆ —
11. Ako umnošku četiriju uzastopnih cijelih brojeva dodamo 1, dobit ćemo kvadrat nekog cijelog broja. Dokaži!
12. Dokaži da broj $n^2 - 8$ nikad nije djeljiv s 5.
13. Jesu li brojevi 4^{44} , 5^{55} , 9^{99} potpuni kvadrati?
14. Rastavljanjem na faktore dokaži: $120 \mid n^5 - 5n^3 + 4n$, za sve $n \in \mathbf{N}$.

— ◆ —
15. Koliki mogu biti djelitelj i količnik u postupku dijeljenja cijelih brojeva ako je djeljenik 557, a ostatak 85?
16. Koliki mogu biti djelitelj i ostatak u postupku dijeljenja cijelih brojeva ako je djeljenik 1517, a količnik 75?
17. Povećanjem djeljenika za 52, a djelitelja za 4, količnik i ostatak se nisu promijenili. Izračunaj količnik.
18. Odredi najmanji četveroznamenkasti broj koji pri dijeljenju sa 2 daje ostatak 1, pri dijeljenju sa 3 ostatak 2, pri dijeljenju s 5 ostatak 4, a pri dijeljenju s 7 ostatak 6.
19. Za koje je cijele brojeve x, y i z ispunjena jednakost

$$(x - 2) \cdot (y + 1) \cdot (z - 3) = 1?$$
20. U skupu cijelih brojeva riješi jednadžbu

$$(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) = 3024.$$
21. U skupu cijelih brojeva riješi jednadžbe:
 - 1) $x^2 - y^2 = 105$;
 - 2) $2x^2 + 5xy - 12y^2 = 28$;
 - 3) $x + y = xy$;
 - 4) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$.

- 22.** Aritmetička sredina 10 različitih prirodnih brojeva jednaka je 11. Koju najveću moguću vrijednost može imati neki od tih brojeva?
- 23.** Aritmetička sredina 27 brojeva je 72. Ako su dva od tih 27 brojeva brojevi 13 i 41, kolika je aritmetička sredina ostalih 25 brojeva?
- 24.** Odredi broj c ako je $a : b = 3 : 2$, $b : c = 3 : 5$, te $a + b + c = \frac{25}{36}$.
- 25.** Broj 1 708 podijeli na tri dijela a , b i c tako da bude $a : b = 3 : 5$ i $a : c = 1 : 2$.
- 26.** Ako je $a : b = 2 : 3$, $b : c = 1 : 2$, koliko je $\frac{a-b}{a+b} : \frac{b-c}{b+c}$?
- 27.** Ako je omjer razlike, zbroja i umnoška dvaju brojeva jednak $1 : 2 : 6$, koliki je količnik tih brojeva?
- 28.** Broj 750 podijeli na dva dijela tako da 8 % prvog dijela zajedno sa 24 % drugoga čini 11.2 % od danog broja.



- 29.** Koji je broj veći: $A = \frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{5}{7} + \frac{7}{9}$ ili $B = \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7}$?
- 30.** Koji je broj veći: $A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$ ili $B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{2}{81}$.
- 31.** Koji je broj veći:
 1) $A = \frac{54\,311\,215}{54\,311\,216}$ ili $B = \frac{45\,311\,521}{45\,311\,522}$;
 2) $A = \frac{1\,234\,512\,345}{4\,567\,845\,678}$ ili $B = \frac{1\,234\,512\,346}{4\,567\,845\,679}$.
- 32.** Ako je $a < b$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, onda je $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$. Dokaži!
- 33.** Dokaži; ako je $a+b \geq 1$, onda je i $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$.



- 34.** Odredi 100. decimalu u decimalnom zapisu racionalnih brojeva $\frac{5}{3}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{4}{7}$.
- 35.** Odredi period u decimalnom zapisu racionalnih brojeva $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{2}{7}$. U svakom od primjera odredi 150. decimalu.
- 36.** Zapiši u obliku razlomka racionalne brojeve
 $a = 0.363636\dots$
 $b = 0.135135135\dots$
 $c = 0.133213321332\dots$
- 37.** Zapiši u obliku razlomka racionalne brojeve $a = 0.\dot{6}3$, $b = 0.\dot{1}3\dot{5}$, $c = 0.\dot{1}2\dot{5}$.
- 38.** Dani su racionalni brojevi $a = 0.531531531\dots$, $b = 0.873873873\dots$. Prikaži zbroj $a + b$ i razliku $a - b$ u obliku razlomka.
- 39.** Izračunaj $a + b$ i $a - b$ za brojeve $a = 2.1\dot{3}4$, $b = 3.2\dot{2}\dot{5}$.
- 40.** Koliko je $a : b$ ako je $a = 0.875$, $b = 1.\dot{2}\dot{7}$?
- 41.** Napiši umnožak brojeva $a = 0.91\dot{6}$ i $b = 0.\dot{3}\dot{6}$ u obliku razlomka.



- 42.** Za koje je cijele brojeve m razlomak $\frac{m^2 - 2m + 1}{m + 2}$ cijeli broj?
- 43.** Ako je $x^{-1} = 3^{-1} + 4^{-1}$, koliko je x ?
- 44.** Odredi x ako je
 1) $x^{-2} = \frac{1}{3^{-2}} + \frac{1}{4^{-2}}$; 2) $x^{-2} = \frac{1}{3^{-2} + 4^{-2}}$.
- 45.** Odredi brojeve x i y ako je $x^{-1} + y^{-1} = 5$ i $x^{-1} \cdot y^{-1} = 6$.
- 46.** Napiši sedam racionalnih brojeva koji dijele interval $\left[\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right]$ na osam jednakih dijelova.
- 47.** Napiši decimalni prikaz nekog racionalnog broja koji se nalazi unutar intervala $\left[\frac{23}{77}, \frac{24}{77}\right]$.
- 48.** Nađi neki broj između $\frac{4}{7}$ i $\frac{5}{7}$ koji je kvadrat nekog racionalnog broja. Koliko rješenja postoji?

1.5. Realni brojevi

U svakodnevnom računu obično se koristimo prirodnim, cijelim i ponekad racionalnim brojevima (kroz razlomke ili decimalne brojeve). Međutim, mnoga računanja imaju za rezultat novu vrstu brojeva, koju su ljudi u prošlosti nazivali **iracionalnim**. Tako primjerice, površina kruga kojemu je duljina promjera prirodan broj nije racionalan broj. Isto vrijedi i za njegov opseg.

Još od starogrčke matematike poznato je da je *dijagonala kvadrata nesumjerljiva s njegovom stranicom*. Prevedeno na jezik brojeva, time se iskazuje tvrdnja da je dijagonala kvadrata kojemu je stranica 1 iracionalan broj. Uistinu, ta dijagonala iznosi $\sqrt{2}$, a dobro je poznato da taj broj nije racionalan.

Primjer 1.

Ako je p prost broj, dokažimo da $\sqrt{p}$ nije racionalan.

Pretpostavimo suprotno: za prirodne brojeve m i n vrijedi $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$. Pritom brojeve m i n po potrebi skratimo tako da na koncu budu relativno prosti. Onda kvadriranjem dobivamo

$$p = \frac{m^2}{n^2} \quad \text{tj.} \quad n^2 p = m^2.$$

Lijeva je strana djeljiva s p , pa je to onda i desna strana. Kako je p prost, to je moguće samo onda kad je m djeljiv s p . Zato vrijedi $m = kp$ za neki prirodni broj k , pa dobivamo

$$n^2 p = k^2 p^2 \quad \text{tj.} \quad n^2 = k^2 p.$$

Sad na isti način zaključujemo da je i n djeljiv s p , što je proturječenje s pretpostavkom da su m i n relativno prosti. Zato $\sqrt{p}$ ne može biti racionalan.

Zadatak 1. Dokaži da je $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ iracionalan broj.

Primjer 2.

Ako n nije potencija broja 10, onda je $\log n$ iracionalan.

Pretpostavimo suprotno: $\log n = \frac{p}{q}$, gdje su p i q relativno prosti prirodni brojevi. Ova jednakost ekvivalentna je jednakosti $10^p = n^q$. No ona je nemoguća, ako n nije potencija broja 10. Zato je pretpostavka koja je do nje dovela pogrešna, pa $\log n$ nije racionalan.

Zadatak 2. Dokaži da je $\log_3 2$ iracionalan broj.

Realne brojeve dobivamo upotpunjujući skup racionalnih brojeva — dodajući mu iracionalne brojeve — ali tako da na novom skupu vrijede sva svojstva algebarskih operacija koja su vrijedila među racionalnim brojevima. Postoje dva jednostavna načina na koja možemo intuitivno pojmiti realne brojeve:

Opis skupa realnih brojeva

1. Geometrijski opis. Skup realnih brojeva možemo poistovjetiti s brojevnim pravcem: svakom realnom broju odgovara jedna točka brojevnog pravca i obratno — svakoj točki s brojevnog pravca odgovara jedan realni broj.

2. Algebarski opis. Skup realnih brojeva sadrži sve decimalne brojeve oblika

$$\pm a_0.b_1b_2b_3 \dots b_n \dots$$

pri čemu je a_0 neki prirodni broj (cjelobrojni dio), a $b_1, b_2, \dots$ znamenke decimalnog prikaza.

Zapamtimo da svaki racionalni broj ima *konačan ili beskonačan periodični decimalni zapis*. Prema tome, broj zapisan beskonačnim *neperiodičnim* decimalnim prikazom mora biti iracionalan.

■ Intervali. Omeđeni i neomeđeni skupovi

Najjednostavniji podskupovi brojevnog pravca su intervali. Postoje četiri tipa intervala:

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\} \quad (\text{zatvoreni interval – segment}),$$

$$\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\} \quad (\text{otvoreni interval}),$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\} \quad (\text{poluotvoreni interval}),$$

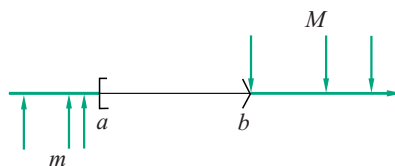
$$\langle a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\} \quad (\text{poluotvoreni interval}).$$

Interval I određen je svojim rubnim točkama a i b . a se naziva početak ili donji rub intervala, a b je završetak ili gornji rub tog intervala. Ovdje je $a < b$. Samo kod zatvorenog intervala može se dopustiti da bude $a = b$, pri čemu je interval $[a, a]$ zapravo skup $\{a\}$ koji sadrži samo točku a .

Moguće je da pojedina granica intervala bude beskonačna. Primjerice, ako je $b = \infty$, onda vrijedi $[a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x\}$, a za $a = -\infty$ imamo, na primjer, $\langle -\infty, b \rangle = \{x \in \mathbf{R} : x < b\}$. I čitav skup $\mathbf{R}$ je interval: $\langle -\infty, \infty \rangle = \mathbf{R}$.

S vrstom rubnih točaka povezan je pojam omeđenosti intervala. Interval je **omeđen** ako su mu rubovi a i b konačni realni brojevi.

Svaki broj $m \leq a$ naziva se **donja međa**, a svaki broj $M \geq b$ naziva se **gornja međa** intervala I .



interval i primjeri njegovih donjih i gornjih međa

Ako je neki od rubova intervala a , b jednak $-\infty$ ili ∞ , onda je interval **neomeđen**. Tako je, primjerice, interval

$$[1, \infty) = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 1\}$$

neomeđen, jer nije omeđen odozgo. Interval

$$\langle -\infty, -2 \rangle = \{x \in \mathbf{R} : x < -2\}$$

je neomeđen, jer nije omeđen odozdo.



Pojmovi omeđenosti te donje i gornje međe proširuju se i na po volji uzete podskupove brojevnog pravca.

Donja međa skupa S je svaki broj m manji ili jednak bilo kojem elementu skupa S . **Gornja međa** skupa S je svaki broj M veći ili jednak bilo kojem elementu skupa S .

Naglasimo odmah da, kao i za intervale, donja i gornja međa nekog skupa ne moraju postojati.



Kutak plus

DECIMALNI PRIKAZ IRACIONALNIH BROJEVA

Brojevi $\sqrt{2}$ i π su iracionalni, pa je njihov decimalni prikaz neperiodičan. Zakon nizanja njihovih znamenaka nam je nepoznat:

$$\sqrt{2} = 1.41421\ 35623\ 73095\ 04880\ 16887\ 24209\ 69807\ 85696\ \dots$$

$$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ \dots$$

Na temelju ovih znamenaka ne znamo odrediti niti sljedeću znamenku njihovog prikaza.

S druge strane, lako je opisati decimalni prikaz mnogih iracionalnih brojeva. Takvi su, primjerice:

$$0.1234567891011121314151617181920212223242526\ \dots$$

$$0.1010010001000010000010000001000000010000000\ \dots$$

U prvom su slučaju napisani redom svi prirodni brojevi, u drugom potencije 10^n za $n \geq 1$. Oba su ova prikaza neperiodična, jer se u jednom i u drugom može pronaći niz istovjetnih znamenaka po volji odabrane duljine, dakle dulji od bilo kojeg unaprijed zadanog perioda.

Omeđeni skupovi

Neprazan podskup S brojevnog pravca je **omeđen** ako postoje brojevi m i M takvi da za svaki $x \in S$ vrijedi

$$m \leq x \leq M.$$

Dakle, svaki omeđeni skup ima konačnu donju i gornju među. U protivnom, za skup kažemo da je **neomeđen**.

■ Minimum, maksimum, supremum i infimum skupa

Međe mogu ali ne moraju pripadati skupu. S tim u vezi definiramo pojmove supremuma i maksimuma nekog skupa:

Supremum skupa

Supremum skupa S jest broj β sa svojstvima:

- 1) β je *gornja međa* skupa S
- 2) β je najmanja gornja međa.

Pišemo $\beta = \sup S$. Ako skup nije omeđen odozgo, onda supremum ne postoji pa stavljamo $\sup S = \infty$.

Ako supremum β pripada skupu S , onda za njega kažemo da je **maksimum** skupa S i pišemo $\beta = \max S$.

Analogno ovom, definira se pojam infimuma i minimuma skupa:

Infimum skupa

Infimum skupa S jest broj α sa svojstvima

- 1) α je *donja međa* skupa S .
- 2) α je najveća donja međa.

Pišemo $\alpha = \inf S$. Ako skup nije omeđen odozdo, onda stavljamo $\inf S = -\infty$.

Ako α pripada skupu S , onda za njega kažemo da je **minimum** skupa S i pišemo $\alpha = \min S$.

Primjer 3.

Uvjerimo se da za omeđene intervale vrijedi:

$$\begin{array}{ll} I = [a, b], & a = \min I, \quad b = \max I, \\ I = \langle a, b \rangle, & a = \inf I, \quad b = \max I, \\ I = [a, b), & a = \min I, \quad b = \sup I, \\ I = \langle a, b \rangle, & a = \inf I, \quad b = \sup I. \end{array}$$

Koje svojstvo karakterizira supremum? Supremum je *najmanja gornja međa* skupa. To znači da svaki broj manji od supremuma više nije gornja međa tog skupa.

Jednako tako, infimum je *najveća donja međa* skupa. To znači da svaki broj veći od infimuma više nije donja međa tog skupa.

Primjer 4.

Navedimo nekoliko primjera podskupova brojevnog pravca i odredimo njihove gornje ili donje međe. Istaknimo pripadaju li one skupu ili mu ne pripadaju.

$$\begin{array}{ll} S = \langle 0, 1 \rangle \cup \langle 1, 4 \rangle, & \inf S = 0, \quad \max S = 4, \\ S = \{x \in \mathbf{Q} : x^2 < 2\}, & \inf S = -\sqrt{2}, \quad \sup S = \sqrt{2}, \\ S = \{y \in \mathbf{R} : y = -x^2 + 2, x \in \mathbf{R}\}, & \inf S = -\infty, \quad \max S = 2, \\ S = \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, & \min S = 1, \quad \sup S = \infty. \end{array}$$

Primjer 5.

Odredimo infimum, supremum, minimum i maksimum skupa

$$S = \{x^2 + 1 : x \in \mathbf{R}, -1 < x < 2\}.$$

U rubnim točkama intervala, funkcija $f(x) = x^2 + 1$ uzima vrijednosti $f(-1) = 2$, $f(2) = 5$. Koordinate tjemeni ove parabole su $(0, 1)$. Zato funkcija preslikava interval $\langle -1, 2 \rangle$ u interval $S = [1, 5)$. Prema tome je

$$\inf S = \min S = 1, \quad \sup S = 5.$$

Maksimum skupa S ne postoji.

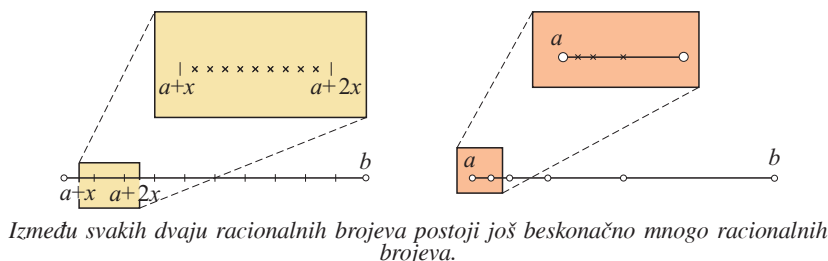
Skup racionalnih brojeva je gust

Udaljenost dvaju uzastopnih cijelih brojeva iznosi 1. To znači da u intervalu duljine manje od 1 postoji najviše jedna cjelobrojna točka.

Položaj racionalnih brojeva na brojevnom pravcu bitno je drukčiji. Pokazat ćemo da između svakih dvaju racionalnih brojeva postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva. Više je mogućih dokaza. Obrazložimo dva slična razmišljanja.

Ako su brojevi a i b racionalni, tada je racionalan i broj $x = \frac{b-a}{10}$. Promotrimo brojeve $a, a+x, a+2x, \dots, a+10x = b$. Svi su oni racionalni i leže unutar intervala $[a, b]$. Točno je 11 takvih brojeva. Stavimo sad $x = \frac{b-a}{100}$. Ponovo su brojevi oblika $a, a+x, a+2x, \dots, a+100x = b$ racionalni brojevi unutar intervala $[a, b]$. Njih je sada 101. Dijelivši razliku $b-a$ na sve više dijelova, zaključujemo da možemo pronaći po volji mnogo racionalnih brojeva unutar ovog intervala.

Pogledajmo još jednu konstrukciju. Podijelimo interval $[a, b]$ na dva jednaka dijela. Djelišna točka iznosi $x = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$ i to je racionalan broj. Sad možemo interval $[a, x]$ ponovo podijeliti na dva jednaka dijela; djelišnoj točki odgovara racionalni broj.



U svakom koraku možemo sve prethodne intervale podijeliti na pola djelišnim točkama koje su racionalni brojevi. Tako unutar intervala $[a, b]$ pronalazimo jednu, pa dvije, četiri, osam, šesnaest itd. racionalnih točaka. Prema tome, između svakih dvaju racionalnih brojeva postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva. Slična tvrdnja vrijedi i za odnos realnih i racionalnih brojeva.

Gustoća skupa racionalnih brojeva

Između svakih dvaju racionalnih brojeva postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva.

Između svakih dvaju realnih brojeva postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva. Kažemo da su racionalni brojevi **gusti** na brojevnom pravcu.

Skup $\mathbf{R}$ je potpun

Aksiom potpunosti skupa realnih brojeva

R_{15} U skupu $\mathbf{R}$ svaki omeđeni podskup ima infimum i supremum.

Po ovom svojstvu se razlikuje skup realnih brojeva od skupa racionalnih brojeva. Naime, takvo svojstvo ne vrijedi u skupu racionalnih brojeva!

Skup racionalnih brojeva nije potpun

Supremum i infimum omeđenog podskupa racionalnih brojeva ne mora biti racionalan broj.

Ilustracija za to je sljedeći skup racionalnih brojeva

$$\{x \in \mathbf{Q} : x^2 < 2\}.$$

Njegov infimum je broj $-\sqrt{2}$, a supremum $\sqrt{2}$ i to nisu racionalni brojevi.

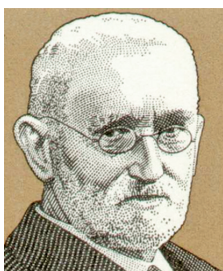
Zorno to zamišljamo tako što prihvaćamo da unutar skupa racionalnih brojeva (shvaćenih kao točke brojevnog pravca) postoje šupljine. Te šupljine upravo su iracionalni brojevi. S druge je strane skup realnih brojeva je **potpun**, on nema šupljina. To zamišljamo tako da svakoj točki brojevnog pravca odgovara neki realni broj.



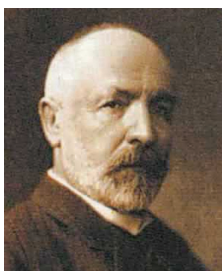
Povijesni kutak

REALNI BROJEVI

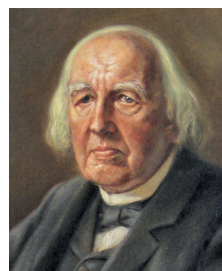
Realni su brojevi precizno opisani relativno kasno, tek krajem XIX. st. Najveći su doprinos u tome imali njemački matematičari Wilhelm Dedekind (1831. – 1916.), Georg Cantor (1845. – 1918.) i Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815. – 1897.).



W. Dedekind



G. Cantor



K. T. W. Weierstraß

Strogi opis skupa realnih brojeva dobivamo tako da propišemo *sustav aksioma* koje realni brojevi moraju zadovoljavati, a koji su dovoljni da potpuno opišu skup realnih brojeva. To su svojstva $R_1 - R_{14}$, navedena pri opisu racionalnih brojeva. Ona se moraju nadopuniti aksiomom R_{15} o potpunosti skupa realnih brojeva.

Zadatci 1.5.

1. Dokaži da je broj $\sqrt{3}$ iracionalan. Dokaži da su iracionalni i brojevi $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{2}$.
2. Ako su x i y prirodni brojevi takvi da je barem jedan od brojeva $\sqrt{x}$ ili $\sqrt{y}$ iracionalan, onda je iracionalan i broj $\sqrt{x} + \sqrt{y}$. Dokaži!
3. Dokaži: Broj $a + b\sqrt{2}$ je iracionalan broj za svaka dva racionalna broja a i b , $b \neq 0$.
4. Dokaži; ako broj $\frac{n}{a}$, gdje je $n \in \mathbf{N}$ i $n > 1$, te $a \in \mathbf{N}$, nije prirodan broj, on je iracionalan.
5. Dokaži da je broj $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ iracionalan.
6. Dokaži da su sljedeći brojevi iracionalni:
 - 1) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$; 2) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$;
 - 3) $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$; 4) $\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$.
7. Dokaži da su brojevi
 - 1) $(1 - \sqrt{2})^2(3 + 2\sqrt{2})$;
 - 2) $(\sqrt{3} + 1)^2(4 - 2\sqrt{3})$;
 - 3) $(\sqrt[6]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}) \cdot \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ racionalni.
8. Brojeve $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$ i $\sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}}$ prikaži u obliku $x + \sqrt{y}$.
9. Dokaži da su brojevi
 - 1) 0.1234567891011...
 - 2) 0.14916253649...
 - 3) 0.248163264128...
 - 4) 0.121221222122221... iracionalni.
10. Odredi sve $x \in \mathbf{Q}$ za koje je broj $\sqrt{4x^2 + x - 1}$ racionalan broj.
11. Dokaži da su sljedeći brojevi iracionalni:
 - 1) $\log_2 3$; 2) $\log_{18} 36$.
12. Dokaži da su sljedeći brojevi iracionalni;
 - 1) $\cos 15^\circ$; 2) $\sin 15^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 5^\circ$; 4) $\cos 20^\circ$.
13. Dokaži da je broj $\cos 1^\circ$ iracionalan.
14. Dokaži da je $\operatorname{tg} 1^\circ$ iracionalan broj.
15. Izračunaj:
 - 1) $\sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$;
 - 2) $\sqrt{5\sqrt{2} - 7} \cdot \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}$;
 - 3) $\left[16^{-0.25} - (2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\right] \left[16^{-0.25} + (2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\right]$;
 - 4) $\left[9^{-\frac{1}{2}} + (3\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}}\right] \left[9^{-\frac{1}{2}} - (3\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}}\right]$.
16. Dokaži:
 - 1) $\frac{\sqrt{8} - |1 - \sqrt{2}|}{|2 - \sqrt{2}| - |\sqrt{8} - 3|} = 3 + 2\sqrt{2}$;
 - 2) $\frac{|3 - \sqrt{3}| - |5 - \sqrt{27}|}{|\sqrt{27} - 3| + |1 - \sqrt{3}|} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$;
 - 3) $\frac{|4 - \sqrt{18}| + |3 - \sqrt{8}|}{|4 - \sqrt{2}| - |\sqrt{8} - 3|} = 3 - 2\sqrt{2}$;
 - 4) $\frac{|3 - \sqrt{12}| - |\sqrt{3} - 1|}{|\sqrt{27} - 5| + |2\sqrt{3} - 7|} = 4\sqrt{3} - 7$.
17. Racionaliziraj nazivnik sljedećih razlomaka:
 - 1) $\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}}$; 2) $\frac{2\sqrt{5} + 5\sqrt{2}}{5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}}$;
 - 3) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$; 4) $\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$.
18. Koliko je $|1 - \sqrt{2}| - |\sqrt{2} - \sqrt{3}| - |\sqrt{3} - \sqrt{4}| - \dots - |\sqrt{99} - \sqrt{100}|$?
19. Riješi jednačbu $x \cdot [x] = 28$.
20. Izračunaj: $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{49}] + [\sqrt{50}]$?
21. Za koji je najmanji cijeli broj k umnožak $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{2}} \cdot \dots \cdot 2^{\frac{2k-1}{2}}$ veći od 256?
22. Izračunaj: $\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$.



- 23.** Izračunaj broj $\sqrt{5}$ točno na 4 decimale služeći se računalom, ali koristeći samo operaciju množenja.
- 24.** Koristeći samo operacije zbrajanja i množenja odredi $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ s točnošću od 4 decimale.
- 25.** Odredi niz uklopljenih intervala unutar kojih se nalazi broj $\sqrt[3]{2}$. Dopušteno je koristiti se džepnim računalom, primjenjujući samo operacije množenja. Na taj način odredi broj $\sqrt[3]{2}$ s preciznošću od 5 znamenaka.
- 26.** Napiši neki iracionalan broj koji leži u intervalu $[0.12600011, 0.12600025]$.



- 27.** Odredi najmanji interval koji sadrži skupove
- 1) $\{x^2 : 1 < x \leq 3\}$; 2) $\{x^2 : -1 < x \leq 3\}$;
 - 3) $\{x^2 - 3x : 2 < x \leq 3\}$;
 - 4) $\{x^2 - 3x : 1 < x \leq 3\}$;
 - 5) $\{x^2 - 3x : -1 < x \leq 3\}$;
 - 6) $\{x : x^2 - 2x \leq 3\}$.
- 28.** Odredi infimum, supremum, minimum i maksimum (ako postoje) sljedećih podskupova u $\mathbf{R}$:
- 1) $S = \{x \in \mathbf{Z} : -6 \leq x < 3\}$;
 - 2) $S = \{x \in \mathbf{Q} : -6 \leq x < 3\}$;
 - 3) $S = \{x \in \mathbf{R} : -6 \leq x < 3\}$;
 - 4) $S = \{x \in \mathbf{R} : -6 \leq x^2 < 3\}$;
 - 5) $S = \{x \in \mathbf{R} : x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbf{N}, m < n\}$.
- 29.** Odredi infimum, supremum, minimum i maksimum (ako postoje) sljedećih podskupova u $\mathbf{R}$:
- 1) $S = \{x \in \mathbf{N} : 1 \leq e^x < 20\}$;
 - 2) $S = \{x \in \mathbf{Q} : 1 \leq e^x < 20\}$;
 - 3) $S = \{x^2 \in \mathbf{R} : -1 < x < 3\}$;
 - 4) $S = \{x^2 \in \mathbf{R} : 1 < x < 3\}$.

- 30.** Utvrdi imaju li sljedeći skupovi minimum, maksimum i odredi njihov infimum i supremum:

- 1) $S = \left\{n - \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\right\}$;
- 2) $S = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbf{N}\right\}$;
- 3) $S = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbf{N}\right\}$.

1.6. Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja

Algebarski prikaz kompleksnog broja

Rješenja jednačbe $x^2 + 1 = 0$ nisu realni brojevi. Skup realnih brojeva $\mathbf{R}$ proširit ćemo do skupa kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$ tako da mu priključimo imaginarnu jedinicu: rješenje ove jednačbe. **Imaginarna jedinica** i je takav kompleksan broj za koji vrijedi $i^2 + 1 = 0$, tj. $i^2 = -1$. Pritom zahtijevamo da i u novom skupu vrijede sva pravila $R_1 - R_9$ za računske operacije zbrajanja i množenja u skupu $\mathbf{R}$.

Skup kompleksnih brojeva

Skup kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$ sadrži sve brojeve oblika

$$z = x + yi, \quad (1)$$

gdje su x i y realni brojevi. x nazivamo **realni dio**, a y **imaginarni dio** kompleksnog broja z . Pišemo $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Prikaz (1) naziva se **algebarski prikaz** kompleksnog broja z .

Algebarske operacije

U skupu kompleksnih brojeva definirane su algebarske operacije zbrajanja i množenja koje imaju svojstvo komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti. s pomoću zbrajanja i množenja možemo definirati i izvedene algebarske operacije oduzimanja i dijeljenja.

Formule za množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva ne treba pamtit, već se ove operacije izvode kao s algebarskim izrazima, uvažavajući činjenicu da je $i^2 = -1$.

Primjer 1.

Izvršimo naznačene operacije:

$$(4 + 2i) + (-3 + i) = 1 + 3i,$$

$$(3 - \sqrt{2}i) - (\sqrt{2} + i) = 3 - \sqrt{2} - (\sqrt{2} + 1)i,$$

$$(5 + 3i) \cdot 2i = 10i + 6i^2 = -6 + 10i,$$

$$(3 + 2i)(1 - 2i) = 3 + 2i - 6i - 4i^2 = 7 - 4i,$$

$$(2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i,$$

$$(1 + 2i)^3 = 1 + 6i + 12i^2 + 8i^3 = 1 + 6i - 12 - 8i = -11 - 2i.$$

Primjer 2.

Vrijedi: $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = i$.
Dalje se račun ponavlja.

Svaki se prirodni broj n može napisati u obliku $n = 4k + r$, gdje je r ostatak pri dijeljenju s 4, $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Tada je:

$$i^n = i^{4k+r} = i^{4k} \cdot i^r = i^r.$$

Primjerice, $i^{23} = i^{4 \cdot 5 + 3} = i^3 = -i$, $i^{2010} = i^{4 \cdot 502 + 2} = i^2 = -1$ i slično.

Neka je $z = x + yi$ bilo koji kompleksni broj. Sa $\bar{z}$ označavamo broj

$$\bar{z} := x - yi. \quad (2)$$

Za brojeve z , $\bar{z}$ kažemo da čine par **kompleksno konjugiranih** brojeva. Za umnožak takvih dvaju brojeva vrijedi

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2. \quad (3)$$

Dakle *umnožak kompleksnog broja i njemu kompleksno-konjugiranog broja je uvijek realan nenegativan broj*. Nadalje, $z \cdot \bar{z} = 0$ ako i samo ako je $x = 0$ i $y = 0$, dakle, $z = 0$.

Pri dijeljenju kompleksnih brojeva koristimo tu činjenicu u postupku koji je analogan onom kod racionalizacije iracionalnih izraza:

Primjer 3.

Podijelimo kompleksne brojeve:

$$\begin{aligned} \frac{3-5i}{2i} &= \frac{3-5i}{2i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{3i-5i^2}{2i^2} = \frac{3i+5}{-2} = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i, \\ \frac{3+2i}{1-2i} &= \frac{3+2i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{3+2i+6i+4i^2}{1-4i^2} = \frac{-1+8i}{5} \\ &= -\frac{1}{5} + \frac{8}{5}i. \end{aligned}$$

Kompleksna ravnina

Svatom kompleksnom broju $z = x + iy$ odgovara uređeni par realnih brojeva (x, y) . Želimo li grafički prikazati kompleksni broj, prirodno je takvom broju pridružiti točku $M(x, y)$ u ravnini. Tako skup $\mathbb{C}$ možemo poistovjetiti s ravninom u kojoj je uveden Kartezijev koordinatni sustav.

Os Ox Kartezijevog sustava u ravnini naziva se **realna os** u $\mathbb{C}$. Na njoj (i samo na njoj) leže realni brojevi. Os Oy naziva se **imaginarna os** i ona sadrži **imaginarne brojeve** — kompleksne brojeve čiji je realni dio jednak nuli. Ovu ravninu nazivamo **kompleksna ravnina** ili **Gaussova ravnina**.



Povijesni kutak

KARL FRIEDRICH GAUSS

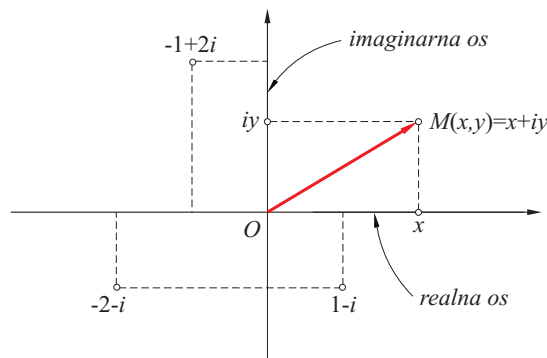


Karl Friedrich Gauß (Braunschweig, 30. travnja 1777. – Göttingen, 23. veljače 1855.) po mnogima najveći matematičar svih vremena (*princeps mathematicorum*). S 19 godina riješio je problem konstrukcije pravilnog sedamnaesterokuta. S 22 godine prvi je dokazao osnovni stavak algebre, po kojem svaki polinom ima barem jednu (kompleksnu) nul-točku. Djelom *Disquisitiones arithmeticae* (1801.) postavio je osnove suvremenoj teoriji brojeva. Bitno je doprinio svim područjima matematike, tako da mnogi pojmovi i tvrdnje nose njegovo ime. Od 1807. g. vodi katedru matematike i astronomije na Göttingenškom sveučilištu i upravlja mjesnom zvjezdarnicom. Bio je i veliki praktičar. S 24 godine izračunao je putanju planetoida Ceresa koji se bio izgubio iz vida nedugo nakon što je bio otkriven, a zatim i planetoida Palade. Priredio je i matematičke tablice koje su bile u uporabi preko stopešest godina.

Vrijednost

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (4)$$

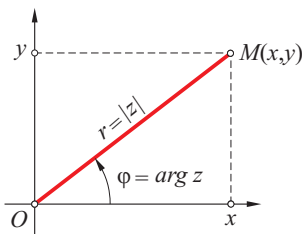
nazivamo **modul** ili **apsolutna vrijednost** kompleksnog broja. Vrijednost $|z|$ označava udaljenost točke $T(x, y)$ od ishodišta koordinatnog sustava, a $|z_1 - z_2|$ udaljenost dviju točaka $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2)$ koje odgovaraju kompleksnim brojevima z_1 i z_2 .



Svakoj točki $M(x, y)$ Kartezijeve ravnine odgovara kompleksni broj $z = x + iy$. Na osi apscisa nalaze se realni brojevi, na osi ordinata imaginarni.

■ Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja

Pokazat ćemo kako se složene operacije s kompleksnim brojevima (množenje, dijeljenje, potenciranje, korjenovanje) mogu jednostavnije računati ukoliko izaberemo drukčiji, ponešto neobičan prikaz kompleksnog broja. Taj se prikaz zasniva na koordinatnom sustavu u ravnini koji se razlikuje od Kartezijevog — na **polarnom sustavu**.



Položaj točke M opisuju Kartezijeve koordinate (x, y) , ali i polarne koordinate (r, φ) .

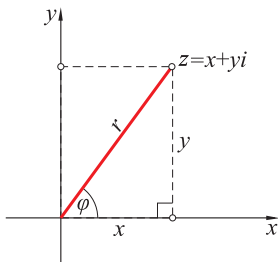
Neka je $M(x, y)$ točka Gaussove ravnine koja odgovara broju $z = x + iy$, pri čemu je $z \neq 0$. Njezin položaj možemo odrediti i s pomoću sljedećih dvaju podataka:

- udaljenosti r točke do ishodišta O ,
- kuta φ između spojnice OM i pozitivnog dijela x -osi.

Broj r je realan pozitivni broj, a za mjeru kuta φ uzimamo vrijednost unutar intervala $[0, 2\pi)$. r i φ nazivaju se **polarne koordinate** kompleksnog broja z (slika). Te su koordinate jednoznačno određene točkom z . Vrijedi i obrat: ako su r_1 i φ_1 polarne koordinate broja z_1 , a r_2 i φ_2 polarne koordinate broja z_2 pa je $r_1 \neq r_2$ ili $\varphi_1 \neq \varphi_2$, onda je nužno $z_1 \neq z_2$ (razmislite zašto!). Za broj $z = 0$ vrijedi $r = 0$, a kut φ nije određen.

Primjer 4.

Za broj $z = 1 + i$ vrijedi $r = \sqrt{2}$, jer je to udaljenost točke $T(1, 1)$ do ishodišta. Također $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Nacrtajte sliku!



veza između Kartezijevih i polarnih koordinata

Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja

Kartezijeve i polarne koordinate vezane su relacijama:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases} \quad (5)$$

Prikaz kompleksnog broja z u obliku

$$x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (6)$$

naziva se **trigonometrijski prikaz** broja z .

Modul r kompleksnog broja iznosi:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (7)$$

Kut φ nazivamo **argument** kompleksnog broja i označavamo s $\varphi = \arg(z)$ i određujemo iz veze:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \quad (8)$$

Jednadžbom (8) kut φ nije potpuno određen. Naime, ova jednadžba ima dva rješenja unutar intervala $[0, 2\pi)$ (koja se međusobno razlikuju za π). Koje je od njih 'pravo', određujemo s pomoću predznaka brojeva x i y , odnosno na osnovi informacije o kvadrantu u kojem se nalazi broj z . Ako je $x = 0$, tada je broj imaginaran, pa je njegov argument $\pi/2$ za $y > 0$, odnosno $3\pi/2$ za $y < 0$.

Primjer 5.

Prikažimo u trigonometrijskom obliku sljedeće brojeve:

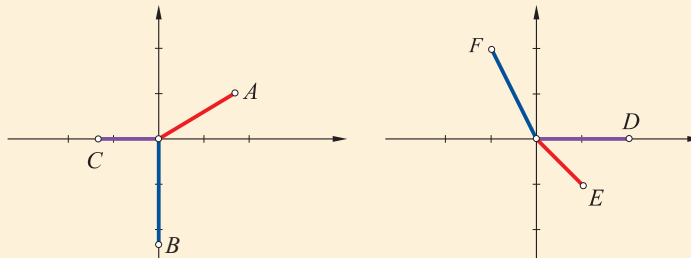
- 1) $\sqrt{3} + i$; 2) $-2i$; 3) $-\sqrt{2}$; 4) 2 ;
 5) $1 - i$; 6) $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$; 7) $-1 - \sqrt{3}i$; 8) $-1 + 2i$.

$$1) \left. \begin{aligned} r &= |\sqrt{3} + i| = \sqrt{3+1} = 2, \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}, \quad \varphi = \frac{\pi}{6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$2) r = |-2i| = 2; \quad \varphi = \frac{3\pi}{2} \text{ te je } z = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$3) r = |-\sqrt{2}| = \sqrt{2}, \quad \varphi = \pi, \quad z = \sqrt{2} (\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$4) r = |2| = 2, \quad \varphi = 0, \quad z = 2 (\cos 0 + i \sin 0)$$



određivanje trigonometrijskog prikaza kompleksnog broja

- 5) $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Vrijedi $\operatorname{tg} \varphi = -1$, a kako je broj u četvrtom kvadrantu, vrijedi $\varphi = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$, te slijedi:

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right).$$

- 6) $r = \sqrt{2+2} = 2$. Vrijedi ponovo $\operatorname{tg} \varphi = -1$, ali je broj u drugom kvadrantu pa je $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Dakle $z = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$.

- 7) $r = \sqrt{1+3} = 2$. $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}$. Kut je u trećem kvadrantu pa je $\varphi = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$. Dakle $z = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$.

- 8) $r = |-1 + 2i| = \sqrt{5}$, $\operatorname{tg} \varphi = -2$. Iz $\operatorname{tg} \varphi = 2$ slijedi $\varphi = 63^\circ 26' 6''$. Broj je u drugom kvadrantu pa je $\varphi = 180^\circ - 63^\circ 26' 6'' = 116^\circ 33' 54''$. Dobivamo $z = \sqrt{5} (\cos 116^\circ 33' 54'' + i \sin 116^\circ 33' 54'')$ (vidi sliku).

Zadatak 1. Zapiši u trigonometrijskom obliku brojeve $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = -1 + 3i$.

Primjer 6.

Prikažimo u trigonometrijskom obliku kompleksne brojeve:

$$1) z = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}; \quad 2) z = -2 \cos \frac{\pi}{6} - 2i \sin \frac{5\pi}{6}.$$

1) Broj z možemo zapisati u obliku $z = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$. Modul broja z jednak je 1. Valja još odrediti njegov argument. No broj je u kompleksnoj ravnini smješten u IV. kvadrant pa je $\arg(z) = \varphi = \frac{5\pi}{3}$.

2) Broj z možemo zapisati u obliku $z = 2\left(-\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}\right)$. Modul broja z jednak 2. Broju z u kompleksnoj ravnini je ravnini pridružena točka u III. kvadrantu pa je $\arg(z) = \varphi = \frac{7\pi}{6}$.

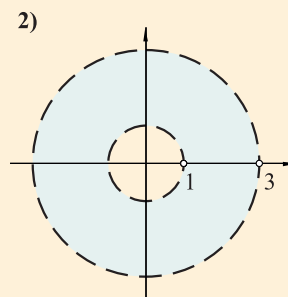
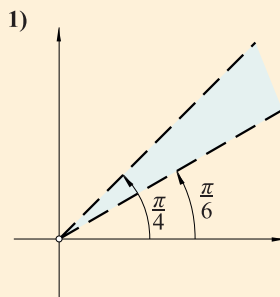
Tako je konačno $z = 2\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)$.

Primjer 7.

Odredimo sve točke kompleksne ravnine za koje je

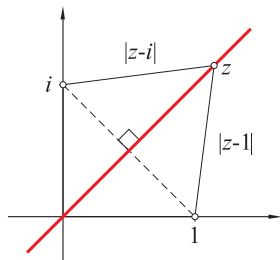
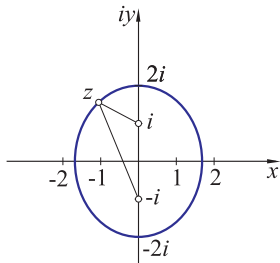
$$1) \frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{4}; \quad 2) 1 < |z| < 3.$$

1) Neka je $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Vrijedi $\varphi = \arg z$. Uvjetom $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{4}$ postavljen je samo uvjet na kut φ , ali ne i na modul r . Dakle, r može biti bilo koji, a φ se mora nalaziti unutar intervala $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$. Traženi je skup kut u kompleksnoj ravnini određen zrakama $\varphi = \frac{\pi}{6}$ i $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (slika lijevo).



2) Prikažimo ponovo kompleksni broj z u trigonometrijskom obliku: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Sada je $|z| = r$ i uvjet prelazi u $1 < r < 3$, dok nema ograničenja na kut φ . Stoga je uvjetom određen kružni prsten na slici desno. Rubovi nisu uključeni u područje.

Primjer 8.



Odredimo skup svih kompleksnih brojeva z određenih uvjetima

$$1) |z - 1| = |z - i|; \quad 2) |z - i| + |z + i| = 4.$$

- 1) Ovaj skup čine sve točke koje su jednako udaljene od $(1, 0)$ i $(0, 1)$. Taj je skup pravac, simetrala dužine kojoj su $1 = (1, 0)$, $i = (0, 1)$ krajnje točke.

$$|z - 1| = |z - i|,$$

$$(x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y - 1)^2,$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1,$$

$$-2x = -2y,$$

$$y = x.$$

- 2) Ovaj skup čine sve točke $z = x + yi$ za koje je zbroj udaljenosti do točaka i , $-i$ jednak 4. Riječ je o elipsi sa žarištima u $i = (0, 1)$ i $-i = (0, -1)$, čiju jednadžbu možemo dobiti ovako:

$$|x + (y - 1)i| + |x + (y + 1)i| = 4,$$

$$\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} + \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = 4,$$

$$\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = 4 - \sqrt{x^2 + (y + 1)^2},$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 16 + x^2 + y^2 + 2y + 1 - 8\sqrt{x^2 + (y + 1)^2},$$

$$y + 4 = 2\sqrt{x^2 + (y + 1)^2},$$

$$y^2 + 8y + 16 = 4x^2 + 4y^2 + 8y + 4,$$

$$4x^2 + 3y^2 = 12.$$

Množenje kompleksnih brojeva

Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja vrlo je pogodan za opis operacije množenja, a onda potenciranja i korjenovanja kompleksnih brojeva.

Izaberimo bilo koja dva kompleksna broja (različita od nule) i prikažimo ih u trigonometrijskom obliku:

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$$

$$z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Korištenjem adicijskog teorema za trigonometrijske funkcije, za njihov umnožak dobivamo izraz:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ &\quad + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Formule (9) predstavljaju trigonometrijski prikaz broja $z_1 z_2$. Njegov je modul $r_1 r_2$, a argument $\varphi_1 + \varphi_2$. Zato vrijedi

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad (10)$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \quad (11)$$

Množenje kompleksnih brojeva

Kompleksni brojevi prikazani u trigonometrijskom obliku množe se tako da im se pomnože moduli, a argumenti zbroje:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Zadatak 2. Izračunaj umnožak brojeva

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right), \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right).$$



Kutak plus

NEJEDNAKOSTI U SKUPU C

Možemo li za dva kompleksna broja reći koji je veći, a koji manji? Je li broj $4 + 3i$ veći od $1 + 2i$?

U skupu kompleksnih brojeva *ne postoji relacija poretka* koja ima svojstva $R_{10} - R_{14}$ relacije poretka u skupu realnih brojeva. Ta svojstva govore da za svaki broj $z \neq 0$ mora vrijediti točno jedna od relacija $z < 0$ ili $z > 0$. Nadalje, relacija poretka ima sljedeće svojstvo:

$$z < 0 \implies 0 < -z.$$

Zaista, po svojstvu R_{13} slijedi

$$z < 0 \implies z + (-z) < 0 + (-z) \quad \text{tj.} \quad 0 < -z.$$

Ako u polju kompleksnih brojeva postoji relacija poretka $\leq$, tada za broj i mora vrijediti $i < 0$ ili $0 < i$. U posljednjem slučaju, po R_{14} vrijedilo bi $0 < i^2 = -1$, što je proturječenje. Ako je pak $i < 0$, tada je $0 < -i$ i odavde $0 < (-i)^2 = -1$, pa ponovno dobivamo isto proturječenje.

Prema tome, nije moguće definirati relaciju poretka u polju kompleksnih brojeva. Stoga kompleksne brojeve ne možemo uspoređivati po veličini.

Dijeljenje kompleksnih brojeva

Formula slična onoj za množenje vrijedi i za operaciju dijeljenja.

$$\begin{aligned}
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} \\
 &= \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} \cdot \frac{\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2}{\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2} \\
 &= \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos(-\varphi_2) + i \sin(-\varphi_2))}{r_2(\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2)} \\
 &= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \tag{12}
 \end{aligned}$$

Iz ovog prikaza vidimo da je modul ovog broja $\frac{r_1}{r_2}$, a argument $\varphi_1 - \varphi_2$:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2. \tag{13}$$

Dijeljenje kompleksnih brojeva

Kompleksne brojeve dijelimo tako da im podijelimo module, a argumente oduzmemo

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Primjer 9.

Izračunajmo $\frac{(1+i)(1-i\sqrt{3})}{(1-i)(\sqrt{3}+i)}$.

Prikažimo brojeve u trigonometrijskom obliku:

$$1 + i = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

$$1 - i\sqrt{3} = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right),$$

$$1 - i = r_3(\cos \varphi_3 + i \sin \varphi_3) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right),$$

$$\sqrt{3} + i = r_4(\cos \varphi_4 + i \sin \varphi_4) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

Stoga je traženi broj jednak:

$$\begin{aligned}
 &\frac{r_1 r_2}{r_3 r_4} (\cos(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4)) \\
 &= 1 \cdot \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3} - \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3} - \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right] \\
 &= \cos 0 + i \sin 0 = 1.
 \end{aligned}$$



Kutak plus

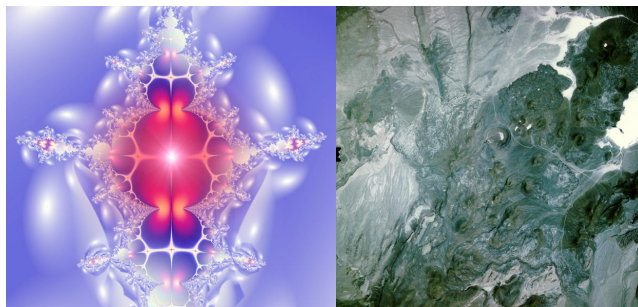
FRAKTALI

Teorija **fraktala** je jedna od najnovijih teorija kojim su matematičari obogatili svijet. Vjerojatno niti jedno drugo područje moderne matematike nije imalo toliki utjecaj kod “laika” poput ovog. Razlog je više nego jasan. Geometrijska interpretacija fraktala stvara dotad neviđene slike u kojima se miješa imaginacija zamišljenih svjetova s detaljima koje priroda stvara svuda oko nas. List paprati, plod cvjetače (da ne spominjemo šenon — križanca cvjetače i brokule....) morska obala, zorni su primjeri kako je fraktalno ponašanje ugrađeno u prirodne zakone.

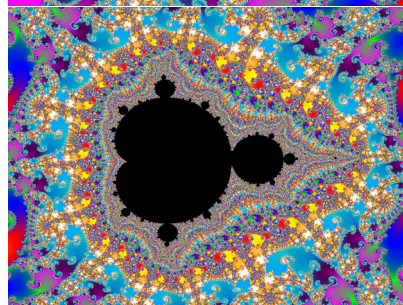
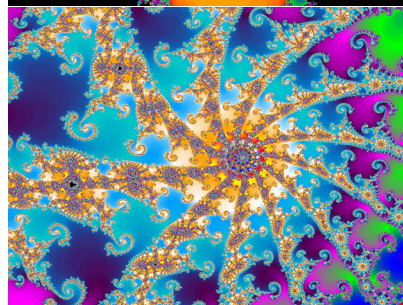
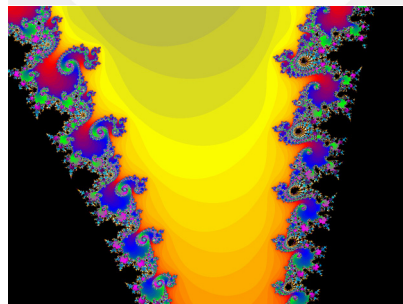
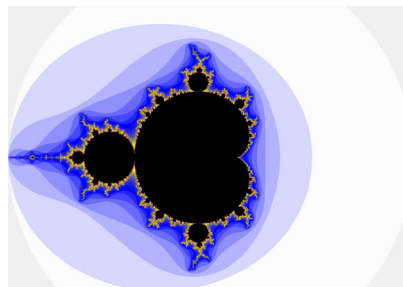
Što je to fraktal? Neprecizna, ali intuitivno jasna definicija kaže da je fraktal lik povećavanjem kojeg se otkriva sve veća i veća složenost.

Slike na ovoj stranici dobro opisuju tu složenost. Slike u desnom stupcu predstavljaju dijelove istog fraktala, vjerojatno najpoznatijeg od svih, **Mandelbrotovog skupa**. Ime je dobio po začetniku ove teorije **Benoitu Mandelbrotu** (rođen u Varšavi, 1924., školovan u Francuskoj). Taj se lik dobiva promatranjem rekurzivnog niza kompleksnih brojeva $z_{n+1} = z_n^2 + z_0$. Ovisno o ponašanju tog niza (modulu n -tog člana) svakoj se točki z_0 pridjeli jedna boja iz unaprijed priređene palete. Fraktalno svojstvo skupa očituje se u njegovoj izrazito nepravilnoj granici. Uočiti ćete da duboko unutar Mandelbrotovog skupa postoje mali djelići koji su po obliku potpuno slični čitavom skupu. Svaka sljedeća slika tek je neznatni djelić prethodne (možete li otkriti na kojem mjestu?!). Prva slika obuhvaća 3.1×10^9 puta veću površinu od četvrte slike! Moglo bi se pronaći barem milijun različitih interesantnih slika istog reda veličine, skrivene unutar početne slike. Daljnjim smanjivanjem, taj broj neograničeno raste.

Izborom različitih rekurzivnih formula $z_{n+1} = f(z_n)$ dobivaju se mnogi drugi fraktali. Stotine mrežnih stranica posvećene su fraktalima. Potražite galerije slika fraktala na internetu!



Druga slika u gornjem redu nije kompjutorski generirana, već snimka mjesečevog kratera u infracrvenom dijelu spektra.



Zadaci 1.6.

1. Izračunaj:

- 1) $(3 - 5i) + (-2 + 3i)$;
- 2) $(3 - 2i)(1 + i)(2 + 3i)$;
- 3) $(3 + 2i)^3$;
- 4) $(2 + i)^4$;
- 5) $1 + i + i^2 + \dots + i^9 + i^{10}$;
- 6) $(1 + i^{50})(1 - i^{51})$;
- 7) $\frac{i}{i-1} + \frac{i+1}{i}$;
- 8) $\frac{i-1}{i-2} + \frac{i+1}{i+2}$.

2. Odredi realni i imaginarni dio sljedećih kompleksnih brojeva:

- 1) $\left(\frac{i^5 + 2}{i^{19} + 1}\right)^2$;
- 2) $\frac{(1 + i)^5}{(1 - i)^3}$;
- 3) $\left(\frac{2}{1 + i\sqrt{3}}\right)^4$.

3. Pokaži da operacije zbrajanja i množenja kompleksnih brojeva imaju sljedeća svojstva:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$

(komutativnost zbrajanja)

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3),$$

(asocijativnost zbrajanja)

$$z_1 z_2 = z_2 z_1,$$

(komutativnost množenja)

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3),$$

(asocijativnost množenja)

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

(distributivnost množenja).

4. Odredi skup svih točaka z u kompleksnoj ravnini koje se mogu prikazati u obliku $z = \cos t + i \sin t$.

5. Neka je $w = \frac{z-1}{z+1}$, $z \neq \pm 1$. Dokaži da je $\operatorname{Re} w = 0$ ako i samo ako je $|z| = 1$.

6. Odredi skup svih točaka z u kompleksnoj ravnini za koje je $\left(\frac{z-1}{z}\right)^2$ realan.

7. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi $\bar{z} = z^3$.

8. Odredi skup svih kompleksnih brojeva z određenih uvjetima

- 1) $\operatorname{Im} z^2 = 2$;
- 2) $|z - i| + |z + i| = 4$;
- 3) $|z - 1| = |z - i|$;
- 4) $\operatorname{Re}(1 + z) = |z|$;
- 5) $|z - 3| + |z + 3| = 8$;
- 6) $|z - 1| - |z + 1| = 1$;
- 7) $\operatorname{Re} \frac{z-2}{z-2i} = 0$;
- 8) $\operatorname{Im} \frac{z-2}{z-2i} = 0$;
- 9) $\operatorname{Re} \frac{z-z_1}{z-z_2} = 0$;
- 10) $\operatorname{Im} \frac{z-z_1}{z-z_1} = 0$.

9. Odredi skup svih kompleksnih brojeva z određenih uvjetima

- 1) $|z - 1| > 1$;
- 2) $|z - 3i + 2| > 2$;
- 3) $1 \leq |z - i| \leq 3$;
- 4) $\pi < \arg z < 3\pi/4$;
- 5) $|z| > 2 + \operatorname{Im} z$;
- 6) $|2z| > |1 + z^2|$.



10. Prikaži u Gaussovoj ravnini sljedeće brojeve:

- 1) $z = \cos \pi + i \sin \pi$;
- 2) $z = 2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$;
- 3) $z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$;
- 4) $z = \sqrt{5}\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)$;
- 5) $z = 3\left(\cos \frac{11\pi}{3} + i \sin \frac{11\pi}{3}\right)$.

11. Odredi i nacrtaj točke zadane polarnim koordinatama r i φ :

- 1) $(1, \frac{\pi}{4})$;
- 2) $(2, -\frac{\pi}{4})$;
- 3) $(3, \frac{\pi}{2})$;
- 4) $(2, \pi)$;
- 5) $(1, -\frac{\pi}{2})$;
- 6) $(3, \frac{5\pi}{4})$;
- 7) $(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$;
- 8) $(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3})$.

12. Za točke iz prethodnog zadatka odredi Kartezijeve koordinate.

13. Odredi argumente kompleksnih brojeva:

- 1) $z = -1 + i$; 2) $z = -1 - i\sqrt{3}$;
 3) $z = \sqrt{3} - i$; 4) $z = -\frac{1}{2} + 3i$.

14. Odredi modul i argument i zapiši u trigonometrijskom obliku sljedeće brojeve:

- 1) i ; 2) $-2i$; 3) 4 ;
 4) -6 ; 5) $-1 + i$; 6) $-1 - i\sqrt{3}$;
 7) $1 + 2i$; 8) $3 - 2i$.

15. Zapiši u trigonometrijskom obliku sljedeće kompleksne brojeve:

- 1) $z = 1 - i$; 2) $z = -i$;
 3) $z = \sqrt{2}$; 4) $z = \sqrt{3} + i$;
 5) $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

16. Kompleksne brojeve

- 1) $z_1 = 2 \cos \frac{7\pi}{4} - 2i \sin \frac{\pi}{4}$;
 2) $z_2 = -\cos \frac{\pi}{17} + i \sin \frac{\pi}{17}$;
 3) $z_3 = -2 \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$;
 4) $z_4 = -3 \left(\cos \frac{\pi}{7} - i \sin \frac{\pi}{7} \right)$;
 5) $z_5 = 1 + \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$
 zapiši u trigonometrijskom obliku.

17. Zapiši u trigonometrijskom obliku sljedeće kompleksne brojeve:

- 1) $z = 3 \cos \frac{11\pi}{4} - 3i \sin \frac{5\pi}{4}$;
 2) $z = -\cos \frac{\pi}{11} + i \sin \frac{\pi}{11}$;
 3) $z = 3 \left(\sin \frac{\pi}{12} - i \cos \frac{\pi}{12} \right)$;
 4) $z = -\sqrt{2} \cos \frac{5\pi}{4} - i\sqrt{2} \sin \frac{11\pi}{4}$;
 5) $z = 1 + \cos \frac{10\pi}{9} + i \sin \frac{10\pi}{9}$;
 6) $z = 1 - \cos \frac{5\pi}{3} - i \sin \frac{5\pi}{3}$.

18. Izračunaj:

- 1) $\left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$;
 2) $\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \cdot \sqrt{6} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$;
 3) $\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$;
 4) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \cdot \sqrt{3} \left(\cos \pi + i \sin \pi \right)$;
 5) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{4} + i \sin \frac{11\pi}{4} \right) \cdot \sqrt{8} \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right)$.

19. Koliko je:

- 1) $\frac{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right)}{0.5 (\cos 110^\circ + i \sin 110^\circ)}$;
 2) $\frac{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}}{\sqrt{3} \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)}$?

20. Zapiši u trigonometrijskom obliku brojeve:

- 1) $z = \frac{i - 1}{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}}$;
 2) $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2i \left(\cos \frac{5\pi}{3} - i \sin \frac{5\pi}{3} \right)}$;
 3) $z = \frac{\sqrt{3} - i}{i \left(\cos \frac{7\pi}{6} - i \sin \frac{7\pi}{6} \right)}$;
 4) $z = \frac{i - 1}{i \left(1 - \cos \frac{2\pi}{5} \right) + \sin \frac{2\pi}{5}}$.

21. Odredi umnožak i kvocijent brojeva napisanih u trigonometrijskom obliku:

- 1) $z_1 = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$,
 $z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$;
 2) $z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$,
 $z_2 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$;
 3) $z_1 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} \right)$,
 $z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{21} + i \sin \frac{\pi}{21} \right)$.

1.7. Potenciranje i korjenovanje kompleksnih brojeva

Potenciranje kompleksnih brojeva

Pokazali smo da se kompleksni brojevi z_1 i z_2 množe ovako:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Uvrstimo ovdje $z_1 = z_2$. Dobivamo

$$z^2 = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi). \quad (1)$$

Primjenom iste formule slijedi:

$$\begin{aligned} z^3 &= z^2 \cdot z = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) \cdot r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= r^3 (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi). \end{aligned}$$

Indukcijom ćemo dobiti općenitu formulu.

Potenciranje kompleksnih brojeva

Potencija broja z napisanog u trigonometrijskom obliku, računa se **De Moivreovom**⁴ formulom:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (2)$$

Iz nje čitamo:

$$|z^n| = |z|^n, \quad (3)$$

$$\arg(z^n) = n \arg z. \quad (4)$$

Primjer 1.

Izračunajmo $(-1 + i\sqrt{3})^{60}$.

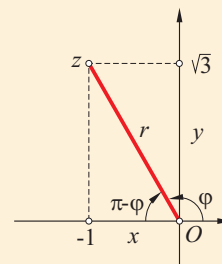
Prikažimo $-1 + i\sqrt{3}$ u trigonometrijskom obliku. On se nalazi u drugom kvadrantu i vrijedi

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2,$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \varphi) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}.$$

Dakle, $r = 2$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$:

$$-1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$



⁴ Abraham de Moivre, (1667. – 1754.) engleski matematičar

Sada možemo primijeniti de Moivreovu formulu (2):

$$\begin{aligned} (-1 + i\sqrt{3})^{60} &= 2^{60} \left[\cos\left(60 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(60 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ &= 2^{60} [\cos(40\pi) + i \sin(40\pi)] = 2^{60}. \end{aligned}$$

Zadatak 1. Ako je $z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$, $z_2 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}$, koliko je $z_1^3 \cdot z_2^2$?

Korjenovanje kompleksnih brojeva

S pojmom korjenovanja upoznali smo se još u prvom razredu, kad smo govorili da je to operacija inverzna operaciji potenciranja. Međutim, ograničili smo se na korjenovanje pozitivnih realnih brojeva, pri čemu takav korijen ima samo jednu vrijednost i ta je vrijednost pozitivan realni broj. Tako, primjerice, vrijedi $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{5} = 2.236 \dots$ itd. Isto se događa za bilo koji parni korijen pozitivna broja, primjerice $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt[6]{16} = 1.587 \dots$. Govorili smo da i neparni korijen također ima samo jednu vrijednost, međutim, ona može biti i negativna: $\sqrt[3]{8} = 2$, ali $\sqrt[3]{-8} = -2$. Ovako izračunane vrijednosti korijena nazivamo **aritmetički korijen** realnog broja.

Pojam korijena vezan je uz rješavanje nekih jednadžbi. Tako primjerice, jednadžba $x^2 - 3 = 0$ ima *dva realna rješenja*, od kojih je jedno $\sqrt{3}$, a drugo suprotnog predznaka, $-\sqrt{3}$. Jednadžba $x^2 + 4 = 0$ ima također dva rješenja suprotnih predznaka: $2i$ i $-2i$. U ovom slučaju pri rješavanju moramo odrediti vrijednost korijena negativnog broja -4 .

Korijen kompleksnog broja

n -ti korijen kompleksnog broja z je svako rješenje jednadžbe $w^n = z$.
Pišemo $w = \sqrt[n]{z}$.

Ovaj se pojam korijena razlikuje od prije navedenog *aritmetičkog korijena* (iako se zapisuje na isti način).

Primjer 2.

Odredimo sve brojeve w za koje je $w^3 = 8$.

Traženi brojevi su rješenja jednadžbe $w^3 - 8 = 0$. Kako je to jednadžba trećeg stupnja, očekujemo da će ona imati tri rješenja. Ta su rješenja ujedno nul-točke polinoma $w^3 - 8$. Jedna njegova nul-točka je $w_1 = 2$. Dijeljenjem polinoma sa $w - 2$ dobivamo, po formuli za razliku kubova

$$w^3 - 8 = (w - 2)(w^2 + 2w + 4).$$

Preostale dvije nul-točke dobivamo rješavajući jednadžbu

$$w^2 + 2w + 4 = 0 \implies w_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3},$$

i to su kompleksni brojevi.

Uvjerimo se da za njih uistinu vrijedi $w^3 = 8$. Imamo:

$$\begin{aligned} (-1+i\sqrt{3})^3 &= (-1)^3 + 3(-1)^2 i\sqrt{3} + 3(-1)i^2(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3 i^3 \\ &= -1 + 3\sqrt{3}i + 9 - 3\sqrt{3}i = 8. \end{aligned}$$

Na isti se način dobiva $(-1 - i\sqrt{3})^3 = 8$.

Prema tome, treći korijen u skupu kompleksnih brojeva ima tri različite vrijednosti:

$$w^3 = 8 \iff w_1 = 2, \quad w_2 = -1 + i\sqrt{3}, \quad w_3 = -1 - i\sqrt{3}.$$

Pokazat ćemo da za $z \neq 0$ uvijek postoji n njegovih različitih n -tih korijena. Uobičajeno je da se korijen kompleksnog broja označava istim simbolom kao i aritmetički korijen realnog broja i to ponekad može izazvati zabunu. Tako, primjerice, ako je z realan broj, primjerice $z = 8$, tada je 2 jedini aritmetički treći korijen ovog broja, dok kompleksni korijen $\sqrt[3]{8}$ ima tri vrijednosti: 2, $-1 + i\sqrt{3}$ i $-1 - i\sqrt{3}$.

Primjer 3.

Vrijedi:

$$\begin{aligned} (1+i)^4 &= (1+2i+i^2)^2 = (2i)^2 = -4, \\ (-1+i)^4 &= (1-2i+i^2)^2 = (-2i)^2 = -4, \\ (-1-i)^4 &= (1+2i+i^2)^2 = (2i)^2 = -4, \\ (1-i)^4 &= (1-2i+i^2)^2 = (-2i)^2 = -4. \end{aligned}$$

Vidimo da su brojevi $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$ četvrti korijeni broja -4 .



Odredimo sad n -ti korijen kompleksnog broja z , $z \neq 0$. Stavimo $w = \sqrt[n]{z}$, tj. $z = w^n$ i prikazimo te brojeve u trigonometrijskom obliku:

$$\begin{aligned} z &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \\ w &= \rho(\cos \psi + i \sin \psi). \end{aligned}$$

Tada iz

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho^n (\cos n\psi + i \sin n\psi)$$

slijedi:

$$\begin{aligned} \rho^n &= r \implies \rho = \sqrt[n]{r}, \\ n\psi &= \varphi + 2k\pi \implies \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}. \end{aligned}$$

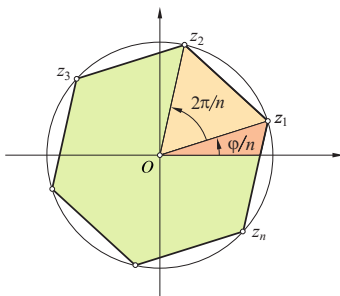
U ovoj je formuli $\sqrt[n]{r}$ aritmetički n -ti korijen pozitivnog broja r , to je pozitivan realni broj.

U izrazu za argument ψ , k uzima sve cjelobrojne vrijednosti. No to ne znači da ćemo dobiti beskonačno mnogo *različitih* vrijednosti za argument ψ , jer će se nakon nekog vremena te vrijednosti razlikovati za višekratnik od 2π pa će stoga definirati isti argument. Uvrštavanjem redom za $k = 0, 1, \dots, n-1$ dobivamo sljedeće *različite* vrijednosti argumenta ψ :

$$\frac{\varphi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2\pi}{n} \dots \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}.$$

Prva sljedeća vrijednost je $\frac{\varphi + 2n\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi$ i ona daje isti argument kao i $\frac{\varphi}{n}$.

Sve sljedeće vrijednosti mogu se također dobiti iz gornjih vrijednosti dodavanjem višekratnika broja 2π . Isto vrijedi i za negativne brojeve k .



Svi n -ti korijeni kompleksnog broja različitog od nule vrhovi su pravilnog n -terokuta sa središtem u ishodištu. Polumjer n -terokuta iznosi $\sqrt[n]{r}$, a argument prvog od njih je φ/n .

Korijen kompleksnog broja

n -ti korijen kompleksnog broja $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ima točno n različitih vrijednosti:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5)$$

Svi ti brojevi imaju isti modul $\sqrt[n]{r}$. Oni leže na kružnici sa središtem u ishodištu i polumjerom $\sqrt[n]{r}$. Argumenti uzastopnih dvaju brojeva razlikuju se za $2\pi/n$. Zato tih n brojeva određuje pravilan n -terokut u kompleksnoj ravnini.

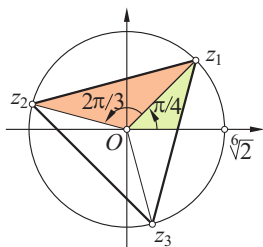
Primjer 4.

Odredimo sve vrijednosti korijena 1) $\sqrt[3]{-1+i}$; 2) $\sqrt[4]{16}$; i prikazimo ih u kompleksnoj ravnini.

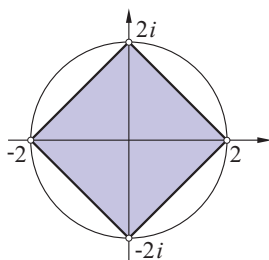
1) Napišimo broj $-1+i$ u trigonometrijskom obliku:

$$-1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Prema tome, vrijedi $|-1+i| = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ i po formuli (5) dobivamo sljedeće vrijednosti:



treći korijeni broja $-1 + i$



Četvrti korijeni broja 16 leže u vrhovima kvadrata sa središtem u ishodištu, čiji je jedan vrh u točki $(2, 0)$.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{-1+i} &= \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{3\pi/4 + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 2k\pi}{3} \right) \\ &= \sqrt[6]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2.\end{aligned}$$

Uvrštavanjem zadanih vrijednosti broja k dobivamo sljedeće tri vrijednosti ovoga korijena:

$$\begin{aligned}k = 0 : \quad z_1 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \\ k = 1 : \quad z_2 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right), \\ k = 2 : \quad z_3 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right).\end{aligned}$$

Ti su brojevi prikazani na slici.

2) Broj 16 u trigonometrijskom obliku ima prikaz

$$16 = 16 (\cos 0 + i \sin 0),$$

pa je

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{16} &= \sqrt[4]{16} \left(\cos \frac{0 + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{4} \right), \\ &= 2 \left(\cos \frac{k\pi}{2} + i \sin \frac{k\pi}{2} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3.\end{aligned}$$

Ovdje moramo razlikovati broj $\sqrt[4]{16}$ s lijeve strane jednakosti: to je četvrti korijen kompleksnog(!) broja 16 i on ima četiri vrijednosti. S desne strane jednakosti $\sqrt[4]{16}$ nalazi se četvrti korijen pozitivnog realnog broja 16, koji ima samo jednu (pozitivnu) vrijednost.

Uvrštavanjem vrijednosti za k , dobivamo:

$$\begin{aligned}k = 0 : \quad z_1 &= 2 (\cos 0 + i \sin 0) = 2, \\ k = 1 : \quad z_2 &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2i, \\ k = 2 : \quad z_3 &= 2 (\cos \pi + i \sin \pi) = -2, \\ k = 3 : \quad z_4 &= 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -2i.\end{aligned}$$

Vidimo da smo $\sqrt[4]{16}$ mogli pronaći i bez upotrebe De Moivreove formule, znajući da je jedna vrijednost broj 2, a sljedeće tri predstavljaju preostale vrhove kvadrata sa središtem u ishodištu (slika).

Zadatci 1.7.

1. Dani su brojevi $z_1 = \frac{2}{3} \left(\cos \frac{7}{5}\pi + i \sin \frac{7}{5}\pi \right)$,
 $z_2 = \frac{3}{4} \left(\cos \frac{5\pi}{9} + i \sin \frac{5\pi}{9} \right)$. Izračunaj z_1^3 i z_2^4 .

2. Izračunaj:

- 1) $\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)^6$;
- 2) $\left[2(\cos 18^\circ + i \sin 18^\circ) \right]^{10}$;
- 3) $\left[\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{15} \right) \right]^5$;
- 4) $\left[\sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right) \right]^{42}$.

3. Izračunaj sljedeće potencije:

- 1) $\left[2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right]^3$;
- 2) $\left[2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right]^4$;
- 3) $\left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^4$;
- 4) $\left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^6$;
- 5) $\left[4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right]^{-2}$;
- 6) $\left[3 \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) \right]^{-4}$.

4. Koliko je $z_1^{12} : z_2^5$ ako je

$$z_1 = \sqrt{2} \left(-\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right),$$

$$z_2 = 2\sqrt{2} \sin \frac{5\pi}{16} - i2\sqrt{2} \cos \frac{5\pi}{16}?$$

5. Izračunaj:

- 1) $(i - \sqrt{3})^{13}$;
- 2) $(1 - i)^{11}$;
- 3) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{50}$.

6. Ako je $z = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$, koliko je $(1+z)^n$?

7. Dokaži:

- 1) $(1+i)^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$;
- 2) $(\sqrt{3}-i)^n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{6} - i \sin \frac{n\pi}{6} \right)$.

8. Ako je $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$,
 izračunaj $z_1^n + z_2^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

9. Izračunaj:

- 1) $\left[\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{5\pi}{12} \right) \right]^{-6}$;
- 2) $\left(-\frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{15} - \frac{i}{2} \sin \frac{4\pi}{15} \right)^{-5}$.

10. Zapiši u trigonometrijskom obliku broj:

- 1) $\left(\frac{2}{i\sqrt{3}-1} \right)^6$;
- 2) $\frac{i-1}{\sqrt{3}+i}$;
- 3) $\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$;
- 4) $\frac{1}{1-i\sqrt{3}} - \frac{1}{i\sqrt{3}+1}$.

11. Odredi argument i modul kompleksnog broja:

$$1) z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2i \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)}$$

$$2) z = \frac{i-1}{\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}}$$

$$3) z = (\sqrt{2}-i)^{10} \cdot (1-i\sqrt{2})^{20}$$

$$4) z = \frac{(1-i\sqrt{3})^{15}}{-\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{17\pi}{6} \right)}$$

12. Koristeći De Moivreovu formulu dokaži sljedeće identitete:

- 1) $\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha$;
- 2) $\sin 3\alpha = 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha$;
- 3) $\cos 4\alpha = \cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha$;
- 4) $\sin 4\alpha = 4 \cos^3 \alpha \sin \alpha - 4 \cos \alpha \sin^3 \alpha$.

13. Ako je $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \alpha$, dokaži da je $x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\alpha$.



14. Izračunaj naznačene korijene:

1) $\sqrt{-i}$; 2) $\sqrt{3+4i}$; 3) $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$.

15. Nadi sve vrijednosti korijena i predoči ih u Gaussovoj ravni:

1) $\sqrt[3]{-1}$; 2) $\sqrt[3]{8}$; 3) $\sqrt[3]{-27}$;

4) $\sqrt[4]{i}$; 5) $\sqrt[6]{1}$. 6) $\sqrt[3]{i}$;

7) $\sqrt[3]{-2+2i}$; 8) $\sqrt[4]{-1}$; 9) $\sqrt[6]{-1}$;

10) $\sqrt[8]{-1}$.

16. Odredi sve vrijednosti sljedećih korijena:

1) $\sqrt[4]{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$; 2) $\sqrt[3]{2+2i}$;

3) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$.

17. Izračunaj:

1) $\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$; 2) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$;

3) $\sqrt[12]{\frac{1}{1-i\sqrt{3}}}$.



18. Odredi sve kompleksne brojeve z takve da je:

1) $z^4 = \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$;

2) $z^3 = -\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}$.

19. Prikaži u trigonometrijskom obliku kompleksne brojeve $z = 1-i\sqrt{3}$ i $w = -3 \cos \frac{\pi}{4} - 3i \sin \frac{3\pi}{4}$.

Izračunaj z^5 i $\sqrt[4]{w}$.

20. Prikaži u trigonometrijskom obliku kompleksne brojeve $z = -\sqrt{3} - i$ i $w = \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{4\pi}{3}$.

Izračunaj $\sqrt[3]{z}$ i w^5 .

21. Ako je $z = -4 \cos \frac{5\pi}{6} + 4i \sin \frac{7\pi}{6}$, izračunaj $\bar{z}^3$ i $\sqrt[4]{z}$.

22. Ako je $z = -\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$, izračunaj z^4 i $\sqrt[5]{\bar{z}}$.

23. Odredi ona rješenja jednadžbe $z^7 + \bar{z} = 0$, $z \in \mathbb{C}$ za koja je $\text{Im}(z) > 0$.

24. Pokaži da vrijedi

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n = \begin{cases} 2, & \text{ako je } n = 3k, \\ -1, & \text{ako je } n = 3k \pm 1. \end{cases}$$

25. Riješi jednadžbe:

1) $z^6 + 64 = 0$;

2) $z^4 + 1 = 0$;

3) $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$;

4) $z^3 + i = 0$;

5) $z^5 - i = 0$;

6) $z^6 - 1 = 0$.