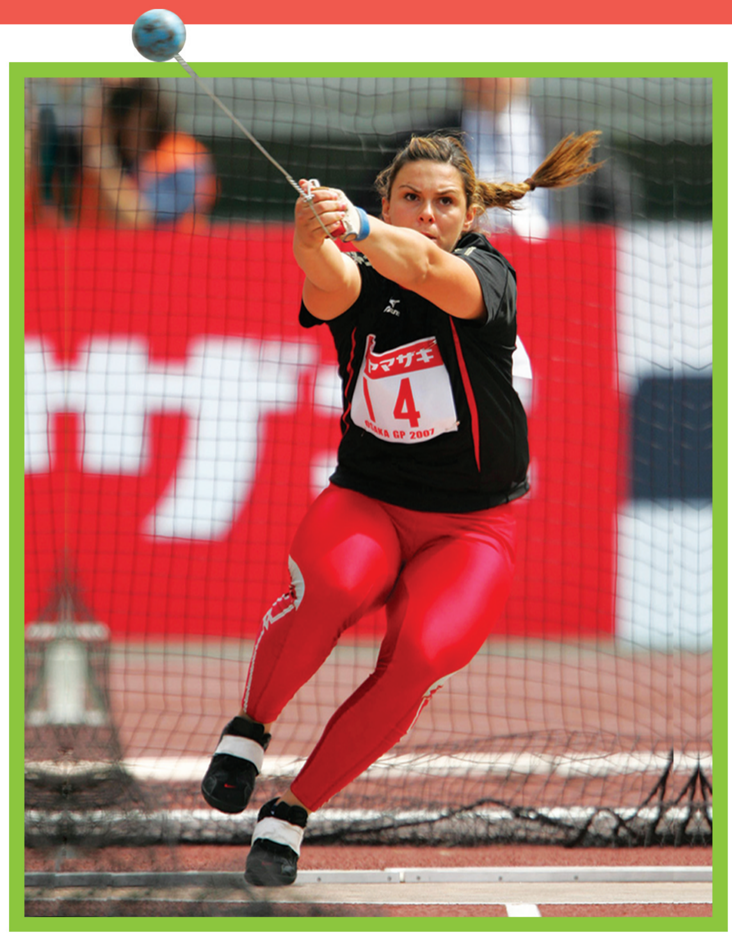
1 Kut i brojevna kružnica



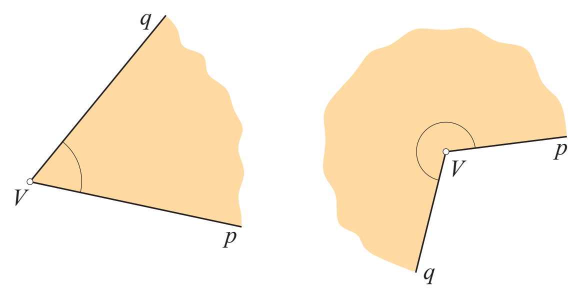
Ivana Brkljačić,
kladivo je letjelo preko 75 metara.

1.1. Kut

Ivana Brkljačić i Sandra Perković pripadaju skupini najuspješnijih hrvatskih atletičarki. Ivana se bavila bacanjem kladiva, a Sandra baca disk i kuglu. Sigurno ste primijetili kako se atletičarke prije nego što izbace kladivo, disk ili kuglu zavrte oko svoje osi. Koliki kut pritom opišu? Ima li smisla ovo pitanje? Da, ima, i upravo o tome će biti govora u ovom odjeljku.

Definicija kuta

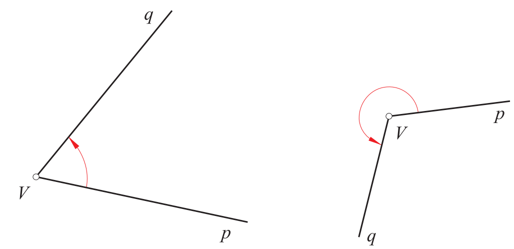
U dosadašnjem smo školovanju kut definirali kao dio ravnine određen dvjema zrakama (polupravcima) sa zajedničkim početkom. Označavali smo ga simbolom $\sphericalangle pVq$. Pritom moramo posebno označiti (lukom ili na koji drugi način) na koji dio ravnine određen tim parom zraka mislimo.



Mjera kuta je pozitivan broj, između 0° i 360°. Ovisno o tome kolika im je mjera, za neke smo kutove govorili da su šiljasti, pravi, tupi, ispruženi, izbočeni i puni.

U složenijim primjenama trigonometrije morat ćemo rješavati probleme u kojima kut može imati mjeru veću od 90°. Štoviše, pokazuje se da za mnoge probleme moramo dopustiti da kut ima mjeru veću od 360°, ili pak da ona bude negativna. Zato ćemo proširiti pojam kuta i njegove mjere.

Zamislimo da se neka zraka vrti oko svoje početne točke V. Neka je njezin početni položaj zraka p, a završni zraka q. Pri toj vrtnji zraka je “prebrisala” dio ravnine koji zovemo kut i označavamo s $\sphericalangle pVq$. Kako bismo opisali način vrtnje, uz početnu i završnu zraku nacrtat ćemo i kružni luk sa strelicom koja označava smjer vrtnje.

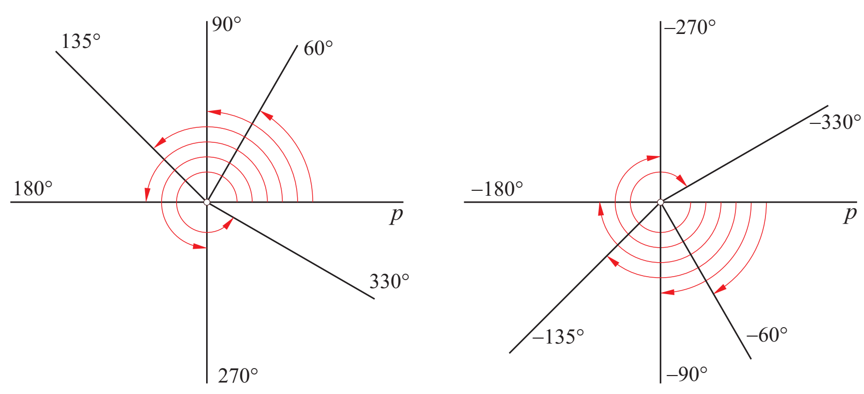


Kut

Kut je uređen par (p, q) dviju zraka koje imaju isti početak V. Označavamo ga s $\sphericalangle pVq$. Točku V nazivamo **vrh**, zraku p nazivamo **prvi krak** (ili početni krak), a zraku q **drugi krak** (ili završni krak) kuta $\sphericalangle pVq$.

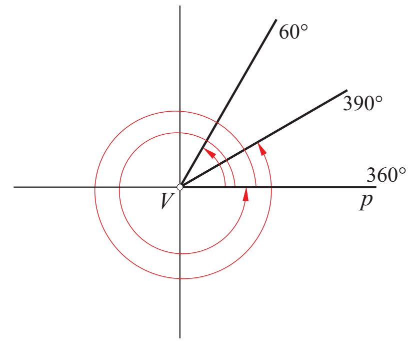
Sada ćemo pojam mjere proširiti i na orijentirani kut.

Ako iz početne zrake p kuta $\sphericalangle pVq$ dolazimo do završne zrake q vrtnjom u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu, tad kažemo da se zraka vrti u **pozitivnom smjeru**. *Mjera kuta dobivenog vrtnjom u pozitivnom smjeru je pozitivna.*

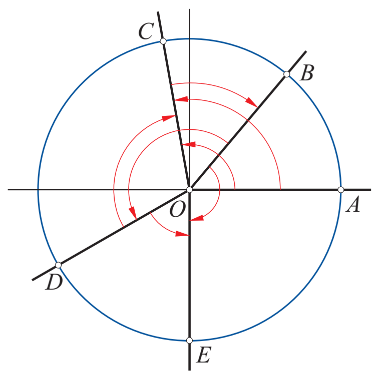


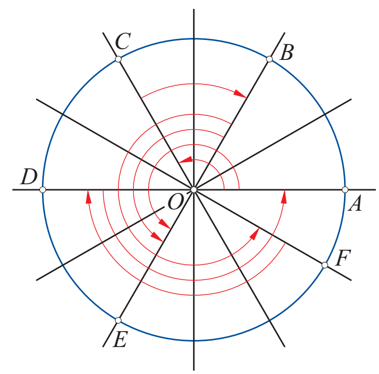
Ako se pak vrtnja odvijala u **negativnom smjeru** (u smjeru kretanja kazaljke na satu), tad uzimamo da je *mjera kuta negativna*. Na slici su navedene pozitivne mjere (lijevo) i negativne mjere (desno) nekih kutova s početnim krakom p.

Neka se vrtnja u kutu odvija u pozitivnom smjeru. Puni kut ima mjeru 360°. Kod njega se zraka q nakon jednog punog okreta podudara sa zrakom p. Nastavi li se zraka q vrtjeti u istom smjeru, dobit ćemo kut s mjerom većom od 360°.



Zadatak 1. Na slici lijevo nacrtana je kružnica i istaknute točke A, B, C, D, E. Ako je mjera kuta $\sphericalangle AOC$ jednaka 100°, mjera kuta $\sphericalangle BOD$ jednaka 160° i mjera kuta $\sphericalangle BOE$ jednaka -140°, kolike su mjere kutova $\sphericalangle DOC$, $\sphericalangle DOE$, $\sphericalangle AOC$ i $\sphericalangle COB$?



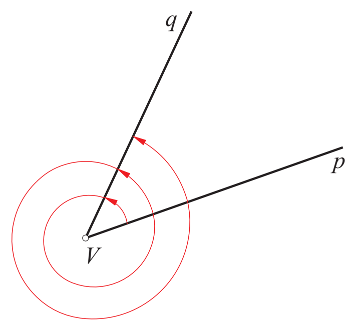


Na slici desno kružnica je podijeljena na dvanaest jednakih dijelova. Kolike su mjere kutova $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle AOE$, $\sphericalangle BOE$, $\sphericalangle DOA$, $\sphericalangle BOF$, $\sphericalangle FOD$, $\sphericalangle COB$ označenih na slici?

Mjerenje kutova česta je i praktična potreba. Provodi se nekim od brojnih instrumenata, primjerice **kutomjerom**. Dobro nam je poznat onaj najjednostavniji — *školski kutomjer*. No u raznim strukama kao što su primjerice geodetska, strojarska ili građevinska često su potrebna preciznija mjerenja kutova. U tu svrhu imamo razne, uglavnom digitalne, instrumente. Jedan vidimo na slici.

Određivanje mjere kuta. Glavna mjera

Nacrtajmo sad po volji odabrani kut $\sphericalangle pVq$. Kolika je njegova mjera? Ovdje znamo početnu i završnu zraku kuta, ali ne znamo kako se točno odvijala vrtnja koja je zraku p prevela u zraku q. Naime, pri vrtnji zraka p može i po više puta "prebrisati" cijelu ravninu dok ne dođe u položaj q. Zato isti kut može imati više različitih mjera.



Kut $\sphericalangle pVq$ ima beskonačno mnogo mjera. Svake dvije među njima razlikuju se za višekratnik od 360°.

Neka je α neka mjera kuta $\sphericalangle pVq$. Tad istom kutu odgovara i mjera od $\alpha+360^\circ$ ili pak $\alpha+720^\circ$ i općenito $\alpha+k\cdot 360^\circ$ za neki prirodni broj k, ali isto tako i mjera $\alpha-360^\circ$, $\alpha-720^\circ$, općenito $\alpha-k\cdot 360^\circ$ za neki prirodni broj k. To naglašavamo pišući da je mjera kuta $\sphericalangle pVq$ neki broj iz skupa

$$\{\alpha+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

Tako primjerice, za $\alpha=30^\circ$ sve mjere kuta čine skup

$$\{30^\circ, 30^\circ\pm 360^\circ, 30^\circ\pm 720^\circ\ldots\}=\{\ldots-690^\circ,-330^\circ,30^\circ,390^\circ,750^\circ\ldots\},$$

a ako je $\alpha=-120^\circ$ jedna mjera kuta $\sphericalangle pVq$, onda su sve njegove mjere

$$\{-120^\circ,-120^\circ\pm 360^\circ,-120^\circ\pm 720^\circ\ldots\}$$
$$=\{\ldots-840^\circ,-480^\circ,-120^\circ,240^\circ,600^\circ\ldots\}.$$

Bilo kakvu početnu mjeru α odabrali, u ovom će se skupu naći mjera α' za koju vrijedi $0\leqslant\alpha'<360^\circ$. Tu mjeru nazivamo **glavna mjera** kuta $\sphericalangle pVq$.

Primjer 1.

Ako je $\alpha=370^\circ$ mjera kuta $\sphericalangle pVq$, onda je njegova glavna mjera $\alpha'=370^\circ-360^\circ=10^\circ$.

Ako je $\alpha=1230^\circ$ mjera kuta $\sphericalangle pVq$, onda je $\alpha'=1230^\circ-3\cdot 360^\circ=150^\circ$ njegova glavna mjera.

Ako je $\alpha=-70^\circ$ mjera kuta $\sphericalangle pVq$, onda je $\alpha'=-70^\circ+360^\circ=290^\circ$ njegova glavna mjera.

Formulu za računanje glavne mjere napisat ćemo rabeći funkciju **najveći cjelobrojni dio**.

Za svaki realni broj x s $\lfloor x \rfloor$ označavamo najveći cijeli broj manji ili jednak broju x. Funkciju $f(x) = \lfloor x \rfloor$ nazivamo najveći cjelobrojni dio.

Za pozitivne brojeve x vrijedi primjerice $\lfloor 2.3403 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 3.1415\ldots \rfloor = 3$, $\lfloor 4 \rfloor = 4$. Dakle, najveći cjelobrojni dio pozitivnog broja dobijemo tako da zanemarimo decimalni dio broja.

Ako je argument ove funkcije negativan, onda je primjerice $\lfloor -3.232 \rfloor = -4$, $\lfloor -\sqrt{5} \rfloor = \lfloor -2.236\ldots \rfloor = -3$, ali $\lfloor -5 \rfloor = -5$.

Glavna mjera kuta

Glavna mjera α' kuta α određuje se formulom

$$\alpha' = \alpha - k \cdot 360^\circ,$$

gdje je $k = \left\lfloor \dfrac{\alpha}{360} \right\rfloor$.

Primjer 2. Odredimo glavnu mjeru kuta za koji je $\alpha = 1276^\circ$.

Imamo $\dfrac{\alpha}{360} = \dfrac{1276}{360} = 3.54\ldots$ pa je $k = \left\lfloor \dfrac{\alpha}{360} \right\rfloor = \lfloor 3.54\ldots \rfloor = 3$ i

$$\alpha' = 1276^\circ - 3 \cdot 360^\circ = 196^\circ.$$

Primjer 3. Odredimo glavnu mjeru α' kuta za koji je $\alpha = -5320^\circ$.

Sad je $\quad k = \left\lfloor \dfrac{\alpha}{360} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{-5320}{360} \right\rfloor = \lfloor -14.77\ldots \rfloor = -15$

pa dobivamo

$$\alpha' = -5320^\circ - (-15) \cdot 360^\circ = 80^\circ.$$

Zadatak 2. Odredi glavnu mjeru kuta ako je:

1) $\alpha = 788^\circ$; **2)** $\alpha = -2310^\circ$; **3)** $\alpha = 3000^\circ 20'$;

4) $\alpha = -3450^\circ 40'$; **5)** $\alpha = 1390^\circ 15' 35''$; **6)** $\alpha = -2820^\circ 35' 20''$.

Zadatci 1.1.

1. Dva kuta, α i β, $0^\circ < \alpha$, $\beta < 90^\circ$ *komplementarna* su ako je $\alpha + \beta = 90^\circ$. Odredi komplement kuta α ako je:

1) $\alpha = 38^\circ$; **2)** $\alpha = 47^\circ 15'$;
3) $\alpha = 82^\circ 49' 33''$; **4)** $\alpha = 11^\circ 11' 11''$;
5) $\alpha = 75^\circ 43' 45''$; **6)** $\alpha = 10^\circ 59' 01''$.

2. Dva kuta, α i β, $0^\circ < \alpha$, $\beta < 180^\circ$ *suplementarna* su ako je $\alpha + \beta = 180^\circ$. Odredi suplement kuta α ako je:

1) $\alpha = 33^\circ$; **2)** $\alpha = 48^\circ 25'$;
3) $\alpha = 121^\circ 44' 33''$; **4)** $\alpha = 111^\circ 11' 11''$;
5) $\alpha = 79^\circ 59' 59''$; **6)** $\alpha = 100^\circ 01' 01''$.

3. Koliki su vanjski kutovi trokuta ako su dva unutarnja kuta $112^\circ 44' 38''$ i $28^\circ 52' 13''$?

4. Odredi kut β za koji je $\alpha + \beta = 360^\circ$ ako je:

1) $\alpha = 220^\circ 35'$; **2)** $\alpha = 115^\circ 47'$;
3) $\alpha = 299^\circ 40' 55''$; **4)** $\alpha = 11^\circ 22' 33''$;
5) $\alpha = 89^\circ 59' 59''$.

5. Mjere unutarnjih kutova trokuta u omjeru su $4 : 5 : 6$. Koliki su ti kutovi? Odredi mjere vanjskih kutova tog trokuta.

6. Omjer veličina unutarnjih kutova trokuta je $3 : 4 : 5$. Koliki su ti kutovi?

7. Omjer veličina vanjskih kutova trokuta je $4 : 5 : 6$. Koliki su unutarnji kutovi tog trokuta?

8. Mjere unutarnjih kutova konveksnog četverokuta u omjeru su $5 : 7 : 8 : 12$. Koliki su ti kutovi?

9. Ako je mjera kuta α, izrazi tu mjeru u stupnjevima, minutama i sekundama:

1) $\alpha = 13.715^\circ$; **2)** $\alpha = 73.87^\circ$;
3) $\alpha = 44.3358^\circ$; **4)** $\alpha = -122.4445$;
5) $\alpha = 133.2345^\circ$; **6)** $\alpha = -47.6534^\circ$.

10. Zapiši u decimalnom obliku mjeru kuta:

1) $45^\circ 15' 33''$; **2)** $95^\circ 27' 18''$;
3) $75^\circ 24' 48''$; **4)** $101^\circ 11' 10''$.

11. Koliki kut opiše velika kazaljka sata u vremenu od 7 h 10 min do 13 h 45 min?

12. Odredi mjeru i glavnu mjeru kuta što ga opiše velika kazaljka sata u vremenu od 8 h $52'$ do 15 h $13'$.

13. Odredi mjeru i glavnu mjeru kuta što ga opiše velika kazaljka sata u vremenu od 19 h $31'$ do 6 h $56'$ sljedećeg dana.

14. Odredi mjeru i glavnu mjeru kuta što ga opiše mala kazaljka sata u vremenu od 9 h $15'$ u utorak do 23 h $37'$ sljedeće subote.

15. Odredi najmanju pozitivnu mjeru kuta α:

1) $\alpha = -825^\circ$; **2)** $\alpha = -477^\circ$.

16. Odredi glavnu mjeru kuta α ako je:

1) $\alpha = 555^\circ$; **2)** $\alpha = 2000^\circ$;
3) $\alpha = 7770^\circ$; **4)** $\alpha = 678^\circ$;
5) $\alpha = 1987^\circ$; **6)** $\alpha = 3600^\circ$.

17. Odredi glavnu mjeru kuta α ako je:

1) $\alpha = -414^\circ$; **2)** $\alpha = -990^\circ$;
3) $\alpha = -3130^\circ$; **4)** $\alpha = -678^\circ 55' 32''$;
5) $\alpha = -1987^\circ 12' 56''$.

18. Odredi glavnu mjeru kuta α ako je:

1) $\alpha = 555^\circ$; **2)** $\alpha = -1210^\circ$;
3) $\alpha = 2000^\circ$; **4)** $\alpha = 7770^\circ$;
5) $\alpha = -990^\circ 45' 15''$; **6)** $\alpha = -2121^\circ 21' 21''$.

19. CD se u uređaju okreće 480 puta u jednoj minuti. Koliki kut opiše neka točka na CD-u u 1 sekundi?

20. Koliki kut opiše minutna kazaljka za vrijeme od 10 h $15' 42''$?

21. Koliki kut opiše točka na vrhu elise helikoptera u $1/2$ sekunde ako se elisa okreće 1000 puta u minuti?

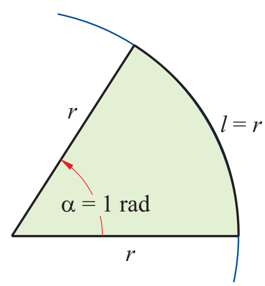
22. Ako bacačica kladiva načini 4.5 okretaja prije nego što ga ispusti, koliki kut pritom opiše kladivo?

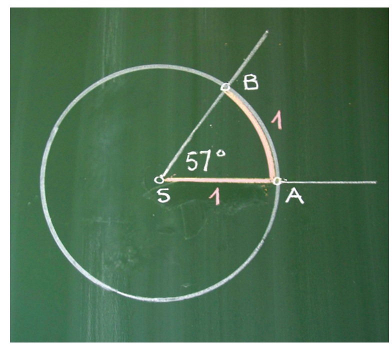
1.2. Radijanska mjera kuta

Što je radijan?

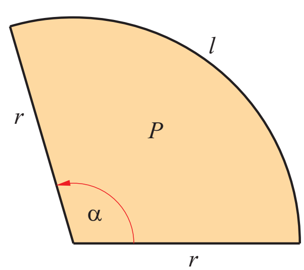
Mjere kutova dosad smo izražavali u stupnjevima. Međutim, osim stupnjeva možemo odabrati i drugu jedinicu za mjerenje. Uobičajena je druga jedinica **radijan**[1].

Nacrtajmo kružnicu polumjera r sa središtem u vrhu kuta. Izdvojimo luk l te kružnice čija je duljina r. Taj luk određuje kut za koji kažemo da ima mjeru 1 radijan. Pišemo $\alpha = 1$ rad, ili kratko, $\alpha = 1$.





Ako je duljina l luka kružnice jednaka polumjeru r, tada središnji kut ima mjeru 1 radijan. Njegova mjera u stupnjevima je približno $57°$.



Općenito, radijanska mjera kuta određuje se kao omjer duljine luka prema polumjeru luka:

$$\alpha \text{ rad} = \frac{l}{r}.$$

Tako primjerice, pravom kutu odgovara mjera od $\dfrac{\frac{1}{4}\cdot 2r\pi}{r} = \dfrac{\pi}{2} = 1.5707\ldots$ radijana, ispruženom $\pi = 3.14159\ldots$ radijana, dok punom kutu odgovara mjera od $\dfrac{2r\pi}{r} = 2\pi = 6.2831\ldots$ radijana.

Ako je mjera kuta izražena u radijanima, tada je duljina l kružnog luka na kružnici polumjera r jednaka $\alpha \cdot r$.

[1] U uporabi je (sve rjeđe) i treća jedinica **grad**; puni kut ima 400 grada.

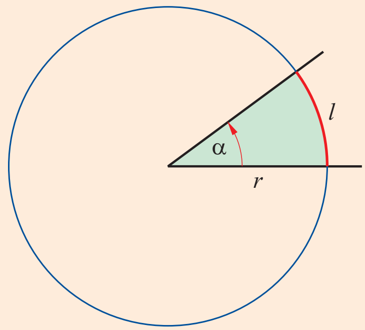
Duljina luka i površina kružnog odsječka

Ako poznajemo mjeru kuta α u radijanima, onda je duljina pripadnog luka jednaka

$$l = \alpha \cdot r.$$

Površina kružnog isječka je

$$P = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}\alpha r^2.$$



Pretvorba stupnjeva u radijane

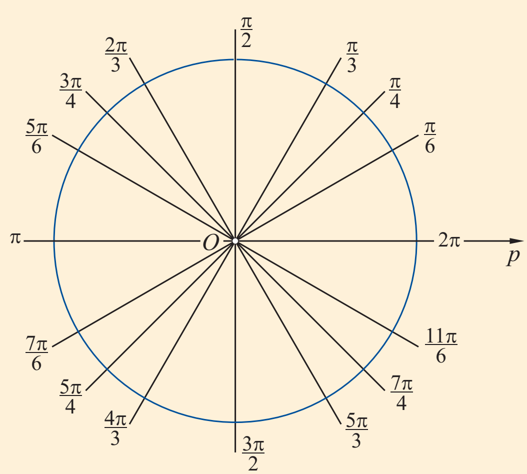
Ispruženom kutu (polovici punog kuta) mjere 180° odgovara radijanska mjera π. Ako je zadana mjera kuta u stupnjevima, tada se odgovarajuća mjera u radijanima određuje iz omjera:

$$\alpha^\circ : 180 = \alpha \text{ rad} : \pi.$$

Odavde je

$$\alpha \text{ rad} = \frac{\alpha^\circ}{180} \cdot \pi \qquad (1)$$

Primjer 1. Nacrtajmo kružnicu u Kartezijevu pravokutnom sustavu. Neka je prva zraka kuta pozitivni dio osi apscisa i neka se drugi krak vrti u pozitivnom smjeru. Nacrtajmo neke istaknute kutove i zapamtimo njihove radijanske mjere:



Napišimo te vrijednosti u tablicu:

stupnjevi	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
radijani	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

stupnjevi	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
radijani	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

Primjer 2.

Kutu mjere $\alpha = 20^\circ$ odgovara radijanska mjera

$$\alpha = \frac{20}{180} \cdot \pi = \frac{\pi}{9} = 0.34906\ldots \text{ rad.}$$

Kutu mjere 45° odgovara radijanska mjera

$$\alpha = \frac{45}{180} \cdot \pi = \frac{\pi}{4} = 0.78539\ldots \text{ rad.}$$

Kutu mjere $\alpha = 201^\circ$ odgovara radijanska mjera

$$\alpha = \frac{201}{180} \cdot \pi = 3.50811\ldots \text{ rad.}$$

Zadatak 1. Popuni sljedeću tablicu:

stupnjevi	15°	22.5°	157.5°	97.5°	198°
radijani					

Primjer 3.

Pretvorimo u stupnjeve sljedeće kutove:

$$5^\circ 8' 26'' = 5 + \frac{8}{60} + \frac{26}{3600} = 5.14056^\circ$$

$$29^\circ 0' 12'' = 29 + \frac{12}{3600} = 29.00333^\circ$$

$$47^\circ 14' 2'' = 47 + \frac{14}{60} + \frac{2}{3600} = 47.23389^\circ.$$

Zadatak 2. Odredi radijanske mjere kutova u tablici

10°		$38^\circ 12' 34''$		$423^\circ 12' 33''$	
33°		$-78^\circ 4' 21''$		1220°	
124°		$-245^\circ 13' 2''$		1°	

Na većini džepnih računala postupak pretvorbe stupnjeva u radijane je programiran. Proučite stoga upute koje ste dobili uz svoje računalo.

Pretvorba radijana u stupnjeve

Ako je zadana mjera kuta u radijanima, tada se mjera u stupnjevima računa na način

$$\alpha^\circ = \frac{\alpha \text{ rad}}{\pi} \cdot 180^\circ.$$

Primjer 4. Odredimo mjeru u stupnjevima ako je $\alpha = \dfrac{\pi}{8}$ te $\beta = \dfrac{7\pi}{3}$.

Iz navedene formule slijedi:

$$\alpha = \frac{\frac{\pi}{8}}{\pi} \cdot 180^\circ = \frac{180^\circ}{8} = 22.5^\circ = 22^\circ 30',$$

$$\beta = \frac{\frac{7\pi}{3}}{\pi} \cdot 180^\circ = \frac{7 \cdot 180^\circ}{3} = 420^\circ.$$

Primjer 5. Odredimo mjeru u stupnjevima kuta mjere 1 rad.

Sad je

$$1 \text{ rad} = \frac{1}{\pi} \cdot 180^\circ = 57.295779\ldots^\circ.$$

Decimalni dio stupnja pretvaramo u minute i sekunde. To radimo na uobičajeni način: množeći decimalni dio sa 60 dobit ćemo broj minuta, a decimalni dio minuta ćemo na isti način pretvoriti u sekunde:

$$0.295779^\circ = (0.295779 \cdot 60)' = 17.7467'$$

$$0.7467' = (0.7467 \cdot 60)'' = 44.80''$$

Dakle, $1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 45''$.

Zadatak 3. Popuni sljedeću tablicu:

radijani	1.5	-2	3.14	π	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{7\pi}{10}$
stupnjevi						

Zadatak 4. Ako vrh minutne kazaljke sata duge 8 cm, prijeđe put od 12 cm, koliko je pritom prošlo vremena?

Primjer 6.

Manji zupčanik ima polumjer $r = 0.2$ m, veći $R = 0.5$ m.

1) Ako se veći kotač zakrene za $135°$, za koliko se stupnjeva zakrene manji?

2) Ako se manji kotač zakrene za $135°$, za koliko se zakrene veći?

1) Kad se veći kotač zakrene za $135°$, točka na njegovom rubu prijeđe put od $l = r \cdot \alpha = 0.5 \cdot 135 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 1.178$ metara.

Isti put prijeđe i točka na rubu manjeg kotača pa iz $r \cdot \beta = 1.178$ dobijemo $\beta = 337.5°$.

Kad se veći kotač zakrene za $135°$, manji se zakrene za $\beta = 337.5°$.

2) Označimo sada $\beta = 135°$ pa iz $\alpha \cdot 0.5 = 135° \cdot 0.2$ dobijemo $\alpha = 54°$.

Zadatak 5. Najpoznatija analogna ura na svijetu zasigurno je londonski Big Ben. Njegova manja kazaljka duga je 2.7 metara, a duljina veće iznosi 4.3 metra.

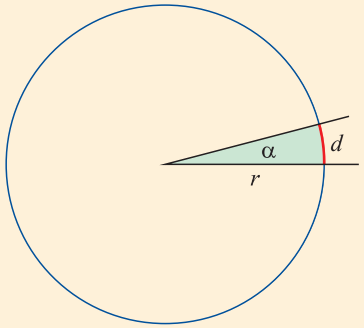
1) Koliki put opiše vrh veće kazaljke tijekom 24 sata?

2) Koliko vremena treba manjoj kazaljci da njezin vrh prijeđe put od 10 metara?

Primjer 7.

Najsjevernija točka Hrvatske je mjesto Žabnik kod Sv. Martina na Muri u Međimurju. Njegova je geografska dužina $46°33'$. Najjužnija je točka Hrvatske na otočiću Galijula blizu Palagruže s geografskom dužinom $42°23'$. Oba mjesta imaju istu geografsku širinu $16°22'$. Koliko je *široka* Hrvatska?

Žabnik i Galijula imaju istu geografsku širinu, ta su dva mjesta na istom meridijanu. Uzmemo li da je polumjer Zemlje $R = 6378$ km, tada je širina Hrvatske jednaka duljini luka kružnice ovog polumjera sa središnjim kutom



$$\alpha = 46°33' - 42°23' = 4°10'$$
$$= 4.1\dot{6} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0.072722 \text{ rad.}$$

Širina Hrvatske iznosi: $d_1 = R \cdot 0.072722 \approx 464$ km.

A koliko je *duga* Hrvatska?

Kolika je udaljenost Iloka, njene najistočnije točke i rta Lako kod Savudrije koji je najzapadnija točka Hrvatske? Ilok i Savudrija imaju istu sjevernu geografsku širinu ($\Phi \approx 45°20'$), na istoj su paraleli. No geografska dužina Iloka je $\lambda_1 = 19°27'$, a Savudrije $\lambda_2 = 13°30'$.

Dok meridijani imaju jednaku duljinu, s paralelama to nije slučaj. Zbog toga najprije valja izračunati polumjer 45. paralele.

$$r = R\cos 45° = 4510 \text{ km.}$$

I sada računamo duljinu luka kružnice sa središnjim kutom

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 19°27' - 13°30' = 5°57' = 5.95° \approx 0.103847 \text{ rad.}$$

Duljina Hrvatske je $d_2 = 4510 \cdot 0.103847 \approx 468$ km.

Primjer 8.

Pri kružnom gibanju *kutna brzina* ω je omjer prirasta kuta i prirasta vremena: $\omega = \dfrac{\alpha}{t}$. Pritom se α izražava u radijanima.

Koja je veza između kutne (ω) i linearne (v) brzine? Pogledajmo:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{r \cdot \alpha}{t} = r \cdot \frac{\alpha}{t} = r\omega.$$

Riješimo sljedeći zadatak.

Na visini 1500 km iznad Zemlje kruži satelit. Za jedan njegov pun obilazak potrebno je 2.5 sata. Polumjer Zemlje iznosi oko 6400 km.

1) Kolika je kutna brzina satelita?

2) Kolika je linearna brzina satelita?

1) Iz $\omega = \dfrac{\alpha}{t}$ slijedi $\omega = \dfrac{2\pi}{2.5} = 0.8\pi \approx 2.513$ rad/h. Primijetimo kako kutu od 2.513 radijana odgovara kut od $144°$.

2) Polumjer r kružne putanje satelita iznosi $r = 1500 + 6400 = 7900$ km. Iz $v = r \cdot \omega$ dobijemo $v = 7900 \cdot 2.513 = 19\,853$ km/h.

Kutak plus

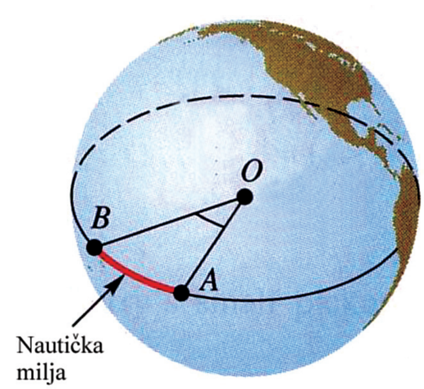
NAUTIČKA MILJA

U mjerenju udaljenosti između dviju točaka tijekom vremena pojavljivale su se razne mjerne jedinice. Sve od starog pa do novijeg doba bile su utemeljene na prosječnim duljinama dijelova ljudskog tijela (palac, stopa, lakat). Danas je osnovna mjera za duljinu metar. Uvedena je 1791., a bila je vezana uz duljinu meridijana koji prolazi kroz Pariz. Godine 1960. prihvaćena je nova definicija metra preko valne duljine narančasto-crvene zrake u spektru Kriptona-86, a od 1983. definicija metra vezana je uz laser.

U zrakoplovstvu i pomorstvu i danas je ustaljena mjera *nautička milja*. Kako je ta mjera bila neusuglašena, a zbog njezine važnosti, 1929. godine velik je broj zemalja prihvatio dogovor po kojem jedna nautička milja iznosi 1852 m. Dogovor nisu prihvatile velike države kao što su Velika Britanija, Sovjetski Savez i Amerika, no ova posljednja ipak ga je usvojila 1954. godine.

Nautička milja se definira kao luk na glavnoj kružnici Zemlje kojem pripada središnji kut od 1 minute.

Kako Zemljina kugla nije idealna sfera, središnjem kutu od $1'$ odgovaraju različiti lukovi na njezinoj površini. Njihova duljina varira od 1843 na polu do 1862 metra na ekvatoru. Duljina tog luka u Doverskom kanalu je otprilike 1853 metra. Zato Englezi definiraju nautičku milju kao iznos od (točno) 6080 stopa, odnosno 1853.184 metra.



Kako se dobivaju ove veličine? Spomenuti meridijan koji prolazi kroz Pariz ima duljinu od točno 20 000 000 metara. Taj okrugli broj je posljedica definicije metra, a ne čudne podudarnosti.

Da dobijemo nautičku milju, duljinu meridijana moramo podijeliti sa 180×60. Dobiva se broj 1851.85. Zato je međunarodnim dogovorom uzeto da nautička milja iznosi (točno) 1852 metra.

Zadatci 1.2.

1. Odredi glavnu mjeru kuta α ako je njegova mjera u radijanima jednaka:

1) $\dfrac{55\pi}{8}$; **2)** $-\dfrac{113\pi}{12}$; **3)** $\dfrac{1234\pi}{3}$;

4) -33; **5)** $\dfrac{531\pi}{4}$; **6)** 1000.

2. Odredi u radijanima mjeru komplementa kuta φ ako je:

1) $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$; **2)** $\varphi = \dfrac{5\pi}{12}$;

3) $\varphi = \dfrac{3\pi}{8}$; **4)** $\dfrac{4\pi}{9}$.

3. Odredi u radijanima mjeru kuta od:

1) $30°$, $45°$, $75°$, $120°$, $135°$;
2) $210°$, $225°$, $300°$, $330°$, $360°$;
3) $7°30'$, $15°$, $20°$, $22°30'$, $25°$;
4) $220°$, $400°$, $480°$, $570°$, $720°$.

4. Popuni sljedeću tablicu:

stupnjevi	$22°30'$	$187°30'$	$108°45'$	$192°$	$316°15'$	$270°$
radijani						

5. Odredi u stupnjevima mjeru kuta zadanu u radijanima:

1) $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{5}$, $\dfrac{3\pi}{7}$, $\dfrac{5\pi}{8}$, $\dfrac{2\pi}{9}$;
2) $\dfrac{4\pi}{3}$, $\dfrac{7\pi}{3}$, $\dfrac{11\pi}{3}$, $\dfrac{14\pi}{3}$, $\dfrac{22\pi}{3}$;
3) π, 5, 3π, 0.35, 4.28.

6. Popuni sljedeću tablicu:

radijani	3	2.22	5.62	11	0.7
stupnjevi					

7. Duljina tetive dane kružnice jednaka je duljini polumjera kružnice. Izrazi u radijanima mjeru središnjeg kuta koji pripada toj tetivi.

8. Na danoj kružnici istaknut je luk čija je duljina jednaka duljini promjera kružnice. Izrazi u stupnjevima središnji kut koji pripada tom luku.

9. Točkama A, B, C i D kružnica je podijeljena na lukove čije su duljine u omjeru $6:3:4:5$.
Izrazi u radijanima glavne mjere središnjih kutova koji pripadaju lukovima što su određeni točkama A, B, C i D.
Izrazi u radijanima glavne mjere unutarnjih kutova četverokuta $ABCD$.

10. Duljina polumjera kružnice je 5 cm. Izrazi u radijanima i stupnjevima glavne mjere središnjih kutova koji pripadaju lukovima te kružnice ako su duljine lukova 12 cm, 18 cm i 31 cm.

11. Polumjer kružnice iznosi 25 cm. Odredi duljinu kružnog luka te kružnice ako mu pripada središnji kut od 1.25 radijana.

12. Kolika je zračna udaljenost Osijeka i Budimpešte ako je geografska duljina Osijeka i Budimpešte približno jednaka (oko $19°$ istočne duljine) i ako je geografska širina Osijeka $45°33'$, a Budimpešte $47°30'$? Uzmi da je polumjer Zemlje $r = 6380$ km.

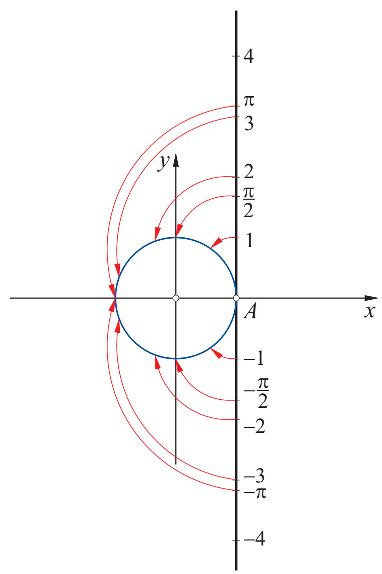
13. Split i i Beč imaju približno istu geografsku duljinu (Split $16°28'$, Beč $16°22'$). Ako je geografska širina Splita $43°31'$, a Beča $48°12'$, kolika je zračna udaljenost Splita i Beča?

1.3. Brojevna kružnica

U pravokutnom (Kartezijevu) sustavu $(O;x,y)$ nacrtajmo kružnicu k čije je središte u ishodištu sustava, a polumjer joj je 1. Neka je $A=(1,0)$ točka na presjeku kružnice i osi apscisa.

Prislonimo brojevni pravac uz kružnicu k tako da svojim ishodištem dira kružnicu u točki A. Zamislimo da se taj pravac (bez rastezanja) namata oko kružnice. Tada će se njegov interval $[0,2\pi\rangle$ preslikati na čitavu kružnicu, jer je opseg kružnice 2π. Isto će se dogoditi i s intervalom $[2\pi,4\pi\rangle$, kao i s intervalom $[-2\pi,0\rangle$ (i svakim drugim intervalom duljine 2π).

Tako se svaki realni broj t s brojevnog pravca preslikava u jednu točku $E(t)$ na kružnici k. Tu kružnicu zato zovemo **brojevna kružnica**.



Namatanjem brojevnog pravca na kružnicu definirano je pridruživanje točaka kružnice realnim brojevima: $t\mapsto E(t)=T$, koje nazivamo eksponencijalno preslikavanje. Broju 0 odgovara točka $(1,0)$, broju $\pi/2$ točka $(0,1)$, broju π točka $(-1,0)$. Primijetimo da ista točka odgovara i broju $-\pi$, dok se $-\pi/2$ preslikava u $(0,-1)$.

Eksponencijalno preslikavanje

Svakom broju t brojevnog pravca pridružena je točka T na brojevnoj kružnici. Time je definirano preslikavanje E između realnih brojeva i točaka brojevne kružnice koje nazivamo **eksponencijalno preslikavanje**. Pišemo $E(t)=T$.

Tako se primjerice broj $\pi/6$ s pravca preslikava u točku $T=E(\pi/6)$ za koju kut $\sphericalangle AOT$ ima mjeru $\pi/6=30^\circ$. U tu istu točku preslikat će se i brojevi $\pi/6+2k\pi$, $k=\pm1\pm2\ldots$ Nacrtaj sliku!

Broju 0 brojevnog pravca odgovara točka $A=(1,0)$. Broju $\dfrac{\pi}{2}$ odgovara točka $(0,1)$. Dalje je $E(\pi)=(-1,0)$, $E\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=(0,-1)$, $E(2\pi)=(1,0)$ itd.

Svakom realnom broju odgovara samo jedna točka na brojevnoj kružnici. Međutim, jednoj točki T na brojevnoj kružnici odgovara beskonačno mnogo brojeva na pravcu. Tako se primjerice svi brojevi

$$\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2\ldots\right\}$$

preslikavaju u istu točku na brojevnoj kružnici.

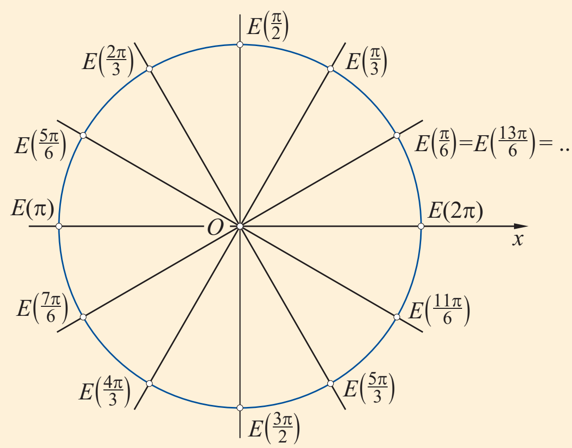
Koristeći eksponencijalno preslikavanje, možemo još jednom iskazati (precizniju) definiciju mjere i glavne mjere kuta.

Mjera kuta

Svakoj točki T brojevne kružnice odgovara točno jedan broj α iz intervala $[0,2\pi\rangle$ na brojevnom pravcu. Taj se broj α naziva **glavna mjera** kuta $\sphericalangle AOT$. Skup svih mjera tog kuta je $\{\alpha+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

Primjer 1.

Nacrtajmo na brojevnoj kružnici točke pridružene brojevima $k\cdot\dfrac{\pi}{6}$, $k\in\mathbf{N}$.



točke brojevne kružnice pridružene brojevima $k\cdot\dfrac{\pi}{6}$

Zadatak 1. Nacrtaj na brojevnoj kružnici točke pridružene brojevima $1,2,3,\ldots,10$. Koje se među njima nalaze u drugom kvadrantu?

Primjer 2.

U kojem se kvadrantu nalazi točka pridružena broju $t = 100$?

Neka je $T = E(t)$. Mjera kuta $\sphericalangle AOT$ je $t = 100$ radijana. Da bismo odredili u kojem se kvadrantu nalazi ova točka, trebamo odrediti glavnu mjeru t' ovog kuta:

$$t' = t - \left\lfloor \frac{t}{2\pi} \right\rfloor \cdot 2\pi = 100 - \lfloor 15.915 \rfloor \cdot 2\pi = 100 - 30\pi = 5.7522\ldots$$

Ovaj je broj veći od $\dfrac{3\pi}{2} = 4.712\ldots$, a manji od $2\pi = 6.283\ldots$. Zato se točka T nalazi u četvrtom kvadrantu.

Primjer 3.

Odredimo na brojevnoj kružnici sve točke $E(t)$ ako je

1) $t = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{8} + k \cdot \pi$; **2)** $t = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

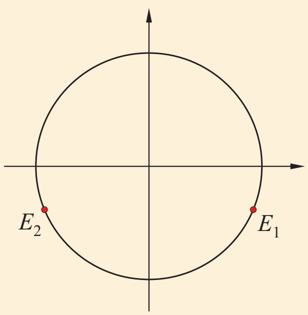
1) Za parne k, $k = 2n$, imamo $t = (-1)^{2n+1} \cdot \dfrac{\pi}{8} + 2n \cdot \pi = -\dfrac{\pi}{8} + 2n \cdot \pi$.

Označimo tu točku kao E_1 na brojevnoj kružnici.

Za neparne k, $k = 2n-1$, imamo

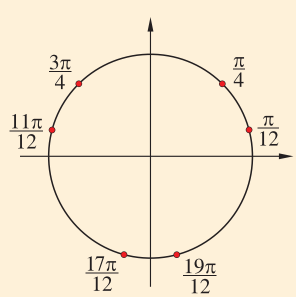
$$t = (-1)^{2n} \cdot \frac{\pi}{8} + (2n-1) \cdot \pi = -\frac{7\pi}{8} + 2n \cdot \pi.$$

Označimo tu točku kao E_2 na brojevnoj kružnici.



Točkama E_1 i E_2 obuhvaćeni su na brojevnoj kružnici svi brojevi zadani zapisom $t = (-1)^{k+1} \cdot \dfrac{\pi}{8} + k \cdot \pi, k \in \mathbf{Z}$.

Primijetimo kako je ovaj način zapisivanja vrlo spretan i racionalan. Druga mogućnost je da svakoj točki pridijelimo poseban zapis.



2) Uz ovaj zadatak priloženo je samo njegovo konačno rješenje. Provjeri ga tako što ćeš uzeti u razmatranje dva slučaja, parne i neparne k.

Kutak plus

DUŽINA DULJINE π

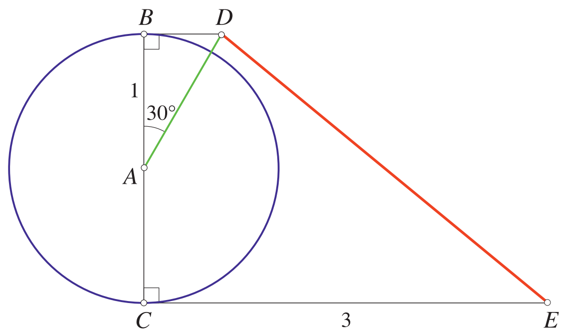
Pri crtanju grafa funkcije $f(x) = \sin x$, ali i mnogih drugih trigonometrijskih funkcija, na brojevni pravac (os apscisa) potrebno je smjestiti broj π. Kako to učiniti?

Zadatak nije nov, on je vezan uz rješenje i nekih drugih problema od kojih je svakako najpoznatiji **kvadratura kruga**, konstrukcija kvadrata čija je površina jednaka površini danoga kruga. Upravo ovaj problem doveo je do spoznaje kako uz danu jediničnu dužinu nije moguće konstruirati dužinu duljine π jedinica. A kad kažemo konstruirati, onda se misli na konstrukciju pri kojoj možemo rabiti samo ravnalo i šestar.

Matematičari su tijekom godina nastojali pronaći što bolju *približnu konstrukciju* dužine duljine π. Neke su uistinu vrlo dojmljive jer su jednostavne, a točnost im je prilično velika.

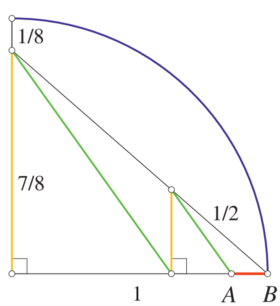
1. Adam A. Kochansky (1685.):

$$|DE| = 3.141533 \approx \pi$$



2. Jacob de Gelder (1849.):

$$|AB| = \frac{16}{113} = 0.14159292\ldots \approx \pi - 3$$



Točno-netočno pitalice

1. Glavna mjera kuta $\alpha = 1395°$ je $\dfrac{\pi}{4}$. T N
2. Ako je $\dfrac{17\pi}{6} < \alpha < \dfrac{19\pi}{6}$, onda je $\dfrac{5\pi}{6} < \alpha' < \dfrac{7\pi}{6}$. T N
3. Na kružnici polumjera 10 cm središnjem kutu od 1 rad pripada luk duljine 10 cm. T N
4. Mjera kuta što ga velika kazaljka sata prijeđe za jednu minutu približno je jednaka 0.1 rad. T N
5. Glavna mjera kuta od 99 rad je $272°16'56''$. T N
6. Točka $T = E(-25)$ smještena je na brojevnoj kružnici u IV. kvadrantu. T N
7. Točka $E(88)$ smještena je na brojevnoj kružnici između točaka $E(0)$ i $E(0.1)$. T N

Zadatci 1.3.

1. Odredi na brojevnoj kružnici točke $E(t)$ pridružene realnim brojevima t:
$3\pi,\ -6\pi,\ 11\pi,\ -13\pi,\ 22\pi,\ 100\pi.$

2. Odredi na brojevnoj kružnici točke $E(t)$ pridružene realnim brojevima t:
$-\frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ -\frac{11\pi}{2},\ \frac{17\pi}{2},\ \frac{101\pi}{2},\ -\frac{45\pi}{2}.$

3. Odredi na brojevnoj kružnici točke:
$E(15\pi)$, $E\left(-\frac{9\pi}{2}\right)$, $E(-12\pi)$, $E\left(\frac{33\pi}{2}\right)$, $E(-43\pi)$.

4. Odredi na brojevnoj kružnici točke:
$E\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, $E\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $E\left(\frac{4\pi}{3}\right)$, $E\left(\frac{11\pi}{6}\right)$, $E\left(\frac{7\pi}{4}\right)$, $E\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

5. Odredi na brojevnoj kružnici točke $E(t)$ pridružene realnim brojevima t:
$\frac{7\pi}{3},\ -\frac{5\pi}{6},\ -\frac{3\pi}{4},\ \frac{9\pi}{2},\ -\frac{11\pi}{3},\ \frac{17\pi}{4},\ -\frac{17\pi}{6},\ \frac{119\pi}{3},\ \frac{99\pi}{4},\ -\frac{119\pi}{3}.$

6. Smjesti na brojevnu kružnicu točke:
$E(-1),\ E(4),\ E(6.5),\ E(-12),\ E(5),\ E(-44).$

7. Odredi cijeli broj k tako da je $k\cdot\frac{\pi}{2} < t < (k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$, za sljedeće točke $E(t)$: $E(10)$, $E(8)$, $E(2)$, $E(3.3)$, $E(\sqrt{33})$. Smjesti sve te točke na brojevnu kružnicu.

8. Nacrtaj pravilni šesterokut upisan brojevnoj kružnici i s vrhovima u točkama $A_k = E\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Na kojem luku što je određen dvama susjednim vrhovima tog šesterokuta leže točke: $E(3\sqrt{3})$, $E(-15)$, $E\left(\frac{23\pi}{4}\right)$, $E(-313)$, $E(17.2)$?

9. Nacrtaj pravilni osmerokut upisan brojevnoj kružnici i s vrhovima u točkama $A_k = E\left(k\cdot\frac{\pi}{4}\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 7$. Na kojem luku što je određen dvama susjednim vrhovima tog osmerokuta leže točke: $E(1)$, $E(-2)$, $E\left(\frac{33\pi}{4}\right)$, $E(-\sqrt{22})$, $E(111)$, $E(-10.22)$?

10. Označi na brojevnoj kružnici sljedeće intervale realnih brojeva:

1) $\left\langle \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4} \right\rangle$; **2)** $\left\langle \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{3} \right\rangle$;

3) $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6} \right\rangle$; **4)** $\left\langle -\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6} \right\rangle$;

5) $\left\langle -\frac{13\pi}{3}, -\frac{19\pi}{6} \right\rangle$.

11. Odredi na brojevnoj kružnici sve točke $E(t)$ za koje je:

1) $t = (-1)^n\cdot\frac{\pi}{6} + n\pi,\ n \in \mathbf{Z}$;

2) $t = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + n\pi,\ n \in \mathbf{Z}$;

3) $t = (-1)^k\cdot\frac{\pi}{12} + k\cdot\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$;

4) $t = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + k\cdot\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbf{Z}$.

12. Odredi na brojevnoj kružnici sljedeće intervale realnih brojeva:

1) $\left\langle k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle,\ k \in \mathbf{Z}$;

2) $\left\langle (2k-1)\frac{\pi}{4}, (4k-1)\frac{\pi}{8} \right\rangle,\ k \in \mathbf{Z}$;

3) $\left\langle (4k-1)\frac{\pi}{8}, k\frac{\pi}{2} \right\rangle,\ k \in \mathbf{Z}$;

4) $\left\langle k\frac{\pi}{2}, (4k+1)\frac{\pi}{8} \right\rangle,\ k \in \mathbf{Z}$.