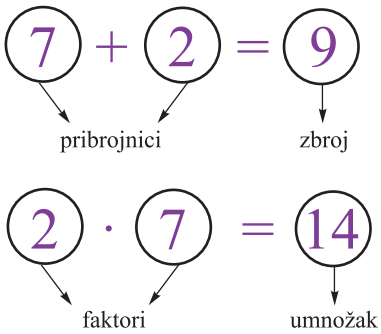
1. Skup realnih brojeva

1.1. Skup prirodnih brojeva

Pri prebrojavanju raznih predmeta ljudi koriste brojeve 1, 2, 3, 4, 5... Skup svih takvih brojeva nazivamo **skup prirodnih brojeva**, označavamo s $\mathbf{N}$ i zapisujemo

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}.$$

Zbrajanje i množenje u skupu $\mathbf{N}$



Prirodne brojeve možemo zbrajati i množiti i rezultat tih operacija je uvijek prirodni broj.

Pri zbrajanju i množenju prirodnih brojeva nebitan je redoslijed, tj. pribrojnici, odnosno faktori mogu zamijeniti svoja mjesta i rezultat se neće promijeniti. Primjerice

$$2 + 7 = 7 + 2 = 9$$
$$2 \cdot 7 = 7 \cdot 2 = 14.$$

Općenito za svaka dva prirodna broja a i b vrijedi

$$a + b = b + a, \qquad a \cdot b = b \cdot a.$$

Ovo se svojstvo zove **komutativnost**.

Ako su u brojevnom izrazu zadane zagrade, prvo se računaju operacije u zagradama. Međutim, ako se radi samo o operacijama zbrajanja ili množenja, tada zagrade smiju promijeniti položaj, tj. za svaka tri prirodna broja a, b i c vrijedi

$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Ovo se svojstvo naziva **asocijativnost**.

Umnožak prirodnog broja a i broja 1 je broj a. To znači da je broj 1 **neutralan element** za množenje.

Sljedeće svojstvo povezuje operacije zbrajanja i množenja, a zove se **svojstvo distributivnosti** množenja prema zbrajanju:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

gdje su a, b i c bilo koja tri prirodna broja.

PRIMJER 1.

Primjenjujući svojstva zbrajanja, izračunajmo što kraćim putem:

a) $27 + 45 + 13 + 55$ **b)** $356 + 237 + 344 + 263$.

a) $27 + 45 + 13 + 55 = (27 + 13) + (45 + 55) = 40 + 100 = 140$

b) $356 + 237 + 344 + 263 = (356 + 344) + (237 + 263) = 700 + 500 = 1200$.

PRIMJER 2.

Primjenjujući svojstva množenja, izračunajmo što kraćim putem:

a) $2 \cdot 25 \cdot 5 \cdot 4$ **b)** $4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 50 \cdot 25 \cdot 125$.

a) Jedan od načina primjene svojstava množenja je ovaj: $2 \cdot 25 \cdot 5 \cdot 4 = (2 \cdot 5) \cdot (25 \cdot 4) = 10 \cdot 100 = 1000$

b) $4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 50 \cdot 25 \cdot 125 = (4 \cdot 25) \cdot (4 \cdot 50) \cdot (8 \cdot 125) = 100 \cdot 200 \cdot 1000 = (100 \cdot 1000) \cdot 200 = 100\,000 \cdot 200 = 20\,000\,000$.

PRIMJER 3.

Marija je kupila 3 kg slatkih i 4 kg reskih jabuka. Cijena kilograma obiju vrsta jabuka bila je 5 kn. Koliko je Marija platila te jabuke?

Možemo računati na dva načina. U prvom načinu prvo ćemo izračunati koliko je platila za slatke jabuke $(3 \cdot 5)$, zatim koliko je platila za reske $(4 \cdot 5)$, pa ćemo zbrojiti:

$$3 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = 15 + 20 = 35 \text{ kn}.$$

U drugom načinu iskoristit ćemo činjenicu da obje vrste jabuka imaju istu cijenu, pa je ukupno bilo $3 + 4 = 7$ kg jabuka i Marija je platila $7 \cdot 5 = 35$ kn.

Oduzimanje i dijeljenje u skupu N

U skupu prirodnih brojeva oduzimanje je izvedivo samo ako od većeg broja oduzimamo manji.

$$\underset{\text{umanjenik}}{25} - \underset{\text{umanjitelj}}{10} = \underset{\text{razlika}}{15}$$

Rezultat dobiven oduzimanjem možemo provjeriti tako da zbrojimo razliku i umanjitelja. Zbroj mora biti jednak umanjeniku. U ovom primjeru je $10 + 15 = 25$.

Za operaciju oduzimanja ne vrijede svojstva komutativnosti ni asocijativnosti. Ali, svojstvo distributivnosti množenja prema oduzimanju vrijedi:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c.$$

Dijeljenje također nije uvijek izvedivo u skupu **N**. Broj a možemo podijeliti brojem b samo ako je a **djeljiv** s b, tj. ako postoji prirodni broj c takav da je $a = bc$.

Rezultat dijeljenja možemo provjeriti tako da pomnožimo količnik i djelitelj. Rezultat mora biti jednak djeljeniku. Ne vrijede ni svojstva komutativnosti ni asocijativnosti.

$$\underset{\text{djeljenik}}{18} : \underset{\text{djelitelj}}{2} = \underset{\text{količnik}}{9}$$

PRIMJER 4.

Izračunajmo: $72 : 6 : 2$.

Ako u računskom zadatku dolazi više operacija dijeljenja za redom, one se računaju slijeva nadesno, redom kako su napisane.

$72 : 6 : 2 = 12 : 2 = 6$ **ispravno**

$72 : 6 : 2 = 72 : 3 = 24$ **neispravno**

Pri izvođenju nekoliko računskih operacija poštujemo sljedeća pravila:

1. Ako su u brojevnom izrazu zadane zagrade, prvo se izračunava unutarnja ("najdublja") zagrada, a zatim redom ostale.
2. Ako u brojevnom izrazu nema zagrada, prvo se računaju operacije višeg prioriteta: množenje i dijeljenje, tek onda zbrajanje i oduzimanje.
3. Ako nema zagrada, a operacije su istog prioriteta, izvode se slijeva nadesno, osim kad primjena svojstava komutativnosti i asocijativnosti olakšava računanje.

PRIMJER 5.

Izračunajmo $(4 \cdot 6 + 2) + (5 + 3 \cdot 4 - 6) \cdot 7 + 10 \cdot 11$.

$(4 \cdot 6 + 2) + (5 + 3 \cdot 4 - 6) \cdot 7 + 10 \cdot 11 = (24 + 2) + (5 + 12 - 6) \cdot 7 + 10 \cdot 11$
$= 26 + (17 - 6) \cdot 7 + 110 = 26 + 11 \cdot 7 + 110 = 26 + 77 + 110 = 213$.

ZADATCI 1.1.

1. Izračunaj:

a $358 + 472 + 35$ **b** $800 + 256 + 435$ **c** $1257 + 1000 + 363$

d $250 + 494 + 250$ **e** $9999 + 728 + 1$ **f** $4568 + 201 + 32$.

2. Izračunaj primjenjujući svojstva zbrajanja:

a $12 + 35 + 18 + 75$ **b** $37 + 12 + 43 + 28$

c $135 + 225 + 47 + 163$ **d** $1234 + 278 + 6 + 2$.

3. Izračunaj:

a $27 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 3$ **b** $25 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2$ **c** $142 \cdot 7 \cdot 50$ **d** $3 \cdot 100 \cdot 4 \cdot 100$.

4. Izračunaj primjenjujući svojstva množenja:

a $11 \cdot 2 \cdot 5$ **b** $37 \cdot 15 \cdot 2$ **c** $4 \cdot 327 \cdot 25$

d $25 \cdot 11 \cdot 4 \cdot 3$ **e** $8 \cdot 7 \cdot 75 \cdot 10$ **f** $125 \cdot 13 \cdot 4 \cdot 26$.

5. Koristeći se svojstvima zbrajanja i množenja, izračunaj na najbrži mogući način:

a $173 \cdot 10 + 28 \cdot 10$ **b** $72 \cdot 15 + 72 \cdot 19$ **c** $451 \cdot 23 + 451 \cdot 57$

d $99 \cdot 27 + 121 \cdot 27$ **e** $3 \cdot 17 + 14 \cdot 17 + 15 \cdot 17$ **f** $34 \cdot 21 + 20 \cdot 21 + 21 \cdot 86$.

6. Ante je radio 3 dana po 8 sati na dan, Jurica 4 dana po 7 sati dnevno, dok je Miro radio 5 dana po 10 sati dnevno. Ako je cijena jednog radnog sata 14 kuna, koliko su ukupno kuna zaradili?

7. U zgradi postoje tri jednosobna stana površine $45\,m^2$, pet dvosobnih stanova od $54\,m^2$, te dva trosobna stana površine $76\,m^2$. Ako je mjesečna cijena grijanja $1\,m^2$ stana 8 kuna, koliki je mjesečni račun za grijanje cijele zgrade?

8. Prosječna mjesečna potrošnja vode po osobi je 4 litre. Ako u zgradi živi 10 dvočlanih obitelji, 12 tročlanih, 7 četveročlanih i jedna šesteročlana obitelj, kolika je prosječna mjesečna potrošnja vode u toj zgradi?

9. Automobil troši 8 litara benzina na 100 km. Izračunaj koliko je litara benzina potrebno za put od 1200 km. Koliko je kilometara moguće prijeći s 48 litara benzina?

10. Bazen se puni trima cijevima. Kroz jednu cijev protječe $143\,m^3$ vode u jednom satu, kroz drugu $83\,m^3$ vode u satu, a kroz treću $121\,m^3$ vode u satu. Koliko je m^3 vode u bazenu nakon 7 sati punjenja? Koliko je m^3 vode u bazenu nakon 10 sati punjenja ako kroz prve dvije cijevi voda utječe u bazen, a trećom istječe?

11. Izračunaj na najbrži način:

a $123 \cdot 10 - 75 \cdot 10$ **b** $291 \cdot 15 - 105 \cdot 15$

c $457 \cdot 11 - 327 \cdot 11$ **d** $221 \cdot 29 - 29 \cdot 101$

e $257 \cdot 27 - 133 \cdot 27 + 27 \cdot 42$ **f** $394 \cdot 123 + 451 \cdot 123 - 700 \cdot 123$.

12. Izračunaj:

a $6 + 9 \cdot 12 + 5$ **b** $(6 + 9) \cdot 12 + 5$ **c** $6 + 9 \cdot (12 + 5)$

d $(6 + 9) \cdot (12 + 5)$ **e** $4 \cdot 7 + 8 \cdot 11$ **f** $4 \cdot (7 + 8) \cdot 11$.

13. Izračunaj:

a $5 + 3 \cdot 5$ **b** $3 \cdot 7 - 5 \cdot 2$ **c** $(3 + 7) \cdot 5 - 2$

d $5 - 3 \cdot (5 - 3)$ **e** $(7 - 2) \cdot (7 - 3)$ **f** $17 - 2 \cdot 7 + 3$

g $10 + 9 \cdot 2 + 7$ **h** $(10 + 9) \cdot (2 + 7)$ **i** $10 + 9 \cdot (2 + 7)$.

14. Izračunaj:

a $(163 - 142) \cdot 5 + 3 \cdot (19 - 11)$ **b** $163 - 14 \cdot 5 + 3 \cdot 19 - 11$

c $400 - 100 \cdot 3 + 5 \cdot (125 - 3 \cdot 32)$ **d** $35 - 5 \cdot 4 - 4 \cdot (18 - 17)$

e $(299 + 135) \cdot 7 + 29 \cdot (423 - 399)$ **f** $299 - 13 \cdot 7 + 29 \cdot 423 - 399$

g $(299 - 13 \cdot 7 + 29) \cdot 423 - 399$ **h** $387 - 15 \cdot (35 - 27) + 15 - 15 \cdot 14$.

15. Izračunaj:

a $20 \cdot (14 + 5 \cdot (20 + 17))$ **b** $(12 + (4 \cdot 5 + 3) \cdot 8) \cdot 15$

c $((17 + 8 \cdot 3) + 3) \cdot 14 \cdot 10$ **d** $7 \cdot ((3 + 12) + 17) + 3 \cdot 11$.

16. Izračunaj:

a $13 \cdot 7 + 15 \cdot 7$ **b** $23 \cdot 9 + 23 \cdot 11 + 23 \cdot 14$

c $151 \cdot 19 + 19 \cdot 140 - 19 \cdot 23$ **d** $230 \cdot 12 - 140 \cdot 12 + 28 \cdot 12$.

17. Izračunaj:

a $8888 : 8$ **b** $123\,400 : 10$ **c** $2456 : 2$ **d** $728 : 4$

e $56\,781 : 9$ **f** $2500 : 100$ **g** $414 : 18$ **h** $1645 : 47$

i $1845 : 15$ **j** $28\,416 : 111$ **k** $20\,868 : 564$ **l** $14\,916 : 12$.

18. Izračunaj:

a $945 : 5 - 5$ **b** $945 : 1 + 5$ **c** $320 : 2 + 8$ **d** $320 : (2 + 8)$.

19. Izračunaj:

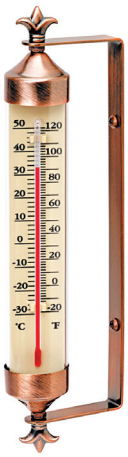
a $(189 : 3 - 27) : 6$ **b** $(225 : 9 + 15) : 10$

c $(324 : (36 : 2)) : (3 \cdot 3)$ **d** $1000 - (10\,000 : 100) \cdot 9$.

20. 4096 litara soka treba razdijeliti u dvolitrene boce. Koliko je boca potrebno?

21. U paketu čija je vrijednost 320 kn nalazi se 64 komada čokolade. Kolika je vrijednost jedne čokolade?

1.2. Skup cijelih brojeva



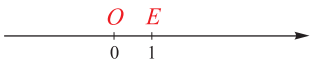
Već smo uočili da oduzimanje prirodnih brojeva nije uvijek izvedivo. Zato skup **N** moramo proširiti dodajući nulu i negativne cijele brojeve.

U prirodi susrećemo negativne brojeve. Temperatura je u hladnim zimskim danima ispod nule. Razine nekih jezera su ispod srednje razine mora (nule). Račun u banci može biti "u minusu" ako štediša potroši više novca nego što je imao na računu.

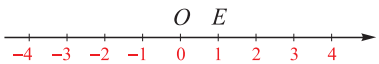
Skup cijelih brojeva označujemo pojačanim slovom **Z** i simbolima predstavljamo ovako:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}.$$

Svaki cijeli broj možemo smjestiti na brojevni pravac. Pravac postaje brojevni ako mu označimo ishodište (točku O) i jediničnu dužinu ($\overline{OE}$, franc. *étalon* – pramjera).



Sada na taj pravac možemo smjestiti svaki cijeli broj. Smjestimo ih nekoliko:



Pogledajmo što imaju zajedničko brojevi 4 i -4 na brojevnom pravcu. Brojevi 4 i -4 imaju jednake udaljenosti od nule. Te udaljenosti zovemo **apsolutne vrijednosti** ili **moduli** cijelih brojeva. Brojeve 4 i -4 nazivamo međusobno **suprotnim** brojevima.

Apsolutna vrijednost ili modul cijelog broja x je, dakle, udaljenost broja x od ishodišta brojevnog pravca i označujemo je $|x|$. Tako je $|5| = 5$, $|-5| = -(-5) = 5$, $|0| = 0$.

Uočimo da je $|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

Računske operacije u skupu Z

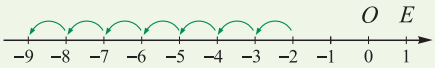
PRIMJER 1.

Izračunajmo:

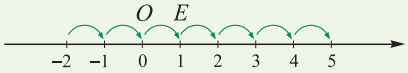
a) $2 + 7$ **b)** $-2 - 7$ **c)** $-2 + 7$ **d)** $2 - 7$.

a) $2 + 7 = 9$

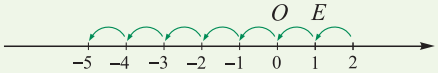
b) $-2 - 7 = -9$



c) $-2 + 7 = 5$



d) $2 - 7 = -5$



Uočimo da u prva dva zadatka zbrajamo cijele brojeve istih predznaka, a u druga dva zadatka cijele brojeve suprotnih predznaka.

I. Cijele brojeve istih predznaka zbrajamo tako da apsolutne vrijednosti brojeva zbrojimo, a predznak prepišemo.

II. Cijele brojeve suprotnih predznaka zbrajamo tako da apsolutne vrijednosti oduzmemo (od veće oduzmemo manju), a predznak broja s većim modulom prepišemo.

PRIMJER 2.

Izračunajmo:

a) $2 \cdot 7$ **b)** $-2 \cdot (-7)$ **c)** $-2 \cdot 7$ **d)** $2 \cdot (-7)$.

U prva dva zadatka množimo cijele brojeve istih predznaka, a u druga dva zadatka cijele brojeve suprotnih predznaka. Pravila za množenje cijelih brojeva su:

I. Umnožak cijelih brojeva istih predznaka je pozitivan broj i jednak je umnošku apsolutnih vrijednosti faktora.

II. Umnožak cijelih brojeva suprotnih predznaka je negativan broj čija je apsolutna vrijednost jednaka umnošku apsolutnih vrijednosti faktora.

a) $2 \cdot 7 = 14$ **b)** $-2 \cdot (-7) = 14$ **c)** $-2 \cdot 7 = -14$ **d)** $2 \cdot (-7) = -14$.

U skupu **Z** operacija zbrajanja je asocijativna, komutativna, zbroj svakog cijelog broja s 0 je taj isti broj. Također, za svaki cijeli broj n postoji njemu suprotan broj $-n$ i zbroj dva međusobno suprotna broja je 0. Operacija množenja je asocijativna i komutativna i produkt svakog cijelog broja s 1 je taj isti broj. Također, vrijedi i distributivnost množenja prema zbrajanju.

$$a+b=b+a$$
$$a+(b+c)=(a+b)+c$$
$$a+0=a$$
$$a+(-a)=0$$
$$a\cdot b=b\cdot a$$
$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$$
$$a\cdot 1=a$$
$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

PRIMJER 3.

Izračunajmo: $3\cdot(15-14\cdot(11\cdot 8-18\cdot 3))$.

Sredimo prvo unutarnju zagradu:

$$3\cdot(15-14\cdot(11\cdot 8-18\cdot 3))=3\cdot(15-14\cdot(88-54))=3\cdot(15-14\cdot 34)$$
$$=3\cdot(15-476)=3\cdot(-461)=-1383.$$

ZADATCI 1.2.

1. Na pravcu nacrtaj točke O i E tako da je $|OE|=1\,\text{cm}$. Odredi točke pridružene brojevima 2, 4, 6, 8, -2, -4, -6, -8.

2. Na pravcu nacrtaj točke O i E, $|OE|=1.5\,\text{cm}$, te odredi točke pridružene brojevima -4, -3, -2, -1.

3. Izračunaj:

a $|10|$ **b** $|0|$ **c** $|-11|$ **d** $|-121|$ **e** $|58|$ **f** $|-43|$.

4. Izračunaj:

a $|10|+|-5|$ **b** $|-11|-|-7|$ **c** $2\cdot|-6|+3\cdot|7|$ **d** $4\cdot|-5|-2\cdot|-1|$.

5. Brojevima 17, -21, 123, 457, -1000, 23 528 napiši suprotne brojeve.

6. Koja dva broja imaju apsolutnu vrijednost jednaku 12?

7. Koja dva broja imaju apsolutnu vrijednost 175?

8. Za koje brojeve x vrijedi:

a $|x|=9$ **a** $|x|=497$ **a** $|x|=0$?

9. Izračunaj:

a $14+(-22)+28$ **b** $-32+(-10)-21$ **c** $13-(-14)-1$

d $39+(-24)-10$ **e** $-28+(-50)+(-75)$ **f** $-20-33-44$.

10. Izračunaj:

a $10+(-22)+28+(-48)$ **b** $-27-45+(-82)+(-21)$

c $-35-(-37)+42+(-81)$ **d** $21+(-25)-32+29$.

11. Izračunaj:

a $(-8)\cdot 0$ **b** $(-10)\cdot 25$ **c** $(-11)\cdot 13$ **d** $21\cdot 0$

e $27\cdot(-3)$ **f** $(-4)\cdot(-15)$ **g** $(-23)\cdot(-5)$ **h** $(-31)\cdot(-11)$.

12. Izračunaj:

a $2\cdot(-8)\cdot 4$ **b** $(-5)\cdot(-2)\cdot(-13)$ **c** $(-12)\cdot(-15)\cdot(-3)$

d $(-7)\cdot(-49)\cdot 2$ **e** $(-14)\cdot 8\cdot(-25)$ **f** $(-100)\cdot 225\cdot(-8)$.

13. Izračunaj:

a $225:(-15)$ **b** $(-64):32$ **c** $(-484):(-4)$ **d** $(-1000):125$

e $(-187):(-11)$ **f** $432:(-12)$ **g** $144:(-12)$ **h** $-1024:(-32)$.

14. Izračunaj:

a $441:(-9)+9$ **b** $-256:32-32\cdot(-2)$ **c** $48-48:(-8)$

d $(48-48):(-8)$ **e** $165-165:11-1$ **f** $1001:(169:13)$.

15. Izračunaj:

a $-3-7+8-2+5$ **b** $-(-3)+(-7)-8+(-2)-55$

c $(-3+2)-(-2+1)+(-3+1)-(-2-1)$ **d** $2\cdot(-3+2)-5\cdot(-2+3)-3\cdot(-2+5)-1$

e $(-2)\cdot 7-5\cdot(-3)\cdot(-1)-2\cdot(-7)$ **f** $3\cdot(-5)\cdot(-1)-(-2)\cdot 8+(-3)\cdot(2-3)$.

16. Izračunaj:

a $15-3\cdot(20-11\cdot 2)+44$ **b** $100-10\cdot(44-3\cdot 17)-27$

c $-59+21\cdot(32+4\cdot(-11))+48$ **d** $-298-27\cdot(-15-2\cdot(-10))-301$

e $-288:4-3\cdot(-27\cdot 18+2)$ **f** $-1024:(-16)+32\cdot(47-(-8+8))$

g $-1000:(-50)\cdot 17-432:(-36):2$ **h** $3\cdot(15-15\cdot(21\cdot 4-32\cdot 3)):15$.

17. Izračunaj:

a $-3-2\cdot\big(-3+2\cdot(-3)\big)-2\cdot(-1)$ **b** $-3-2\cdot\big(-3+2\cdot(-3\cdot(-2)-3)\big)$

c $5-3\cdot\big(-5+3\cdot(-5\cdot(-3)-5)\big)$ **d** $-4-5\cdot\big((-4-5)\cdot(-2-1)-(-2+1)\cdot(-3+2)\big)$.

18. Izračunaj:

a $-3-2\cdot\{-3-1\cdot[-3\cdot(-2)-1]\}$ **b** $-5+1\cdot\{-4+1\cdot[-3\cdot(-1)+1]\}$

c $3-1\cdot\{-3+5\cdot[-3\cdot(-5)+5\cdot(-2)]\}$ **d** $-2+9\cdot\{-2+7\cdot[3\cdot(-2)-2\cdot(-3)]\}$

e $-5-\{-4-[-3\cdot(-2)-1]-2-3\}-4$.

19. Jutarnja temperatura zraka jednog zimskog dana bila je $-5\,°\mathrm{C}$. Do podneva se temperatura povisila za $14\,°\mathrm{C}$, a nakon toga je padala. Do večeri se spustila za $16\,°\mathrm{C}$. Kolika je bila temperatura u podne, a kolika navečer?

20. Banka svom stalnom štediši odobrava dopušteno prekoračenje od 5000 kn na tekućem računu. 1. 12. stanje računa bilo je 502 kn. 2. 12. štediša je na bankomatu podigao 4000 kn. Kakvo mu je stanje računa nakon te transakcije? Koliko štediša mora položiti kuna na banku da mu stanje računa bude 0?

1.3. Skup racionalnih brojeva

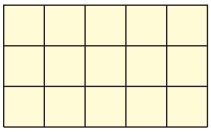
U skupovima **N** i **Z** naučili smo da je dijeljenje moguće samo ako je djeljenik višekratnik djelitelja. U ostalim slučajevima dijeljenje nije bilo izvedivo. Stoga ponovo proširujemo, ovaj put skup **Z**, da bi operacija dijeljenja (osim nulom) uvijek bila izvediva. Novi, prošireni, skup brojeva zove se **skup racionalnih brojeva** i označuje pojačanim slovom **Q** i pišemo:

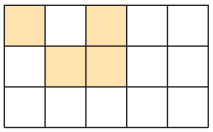
$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b};\ a, b \in \mathbf{Z},\ b \neq 0 \right\}.$$

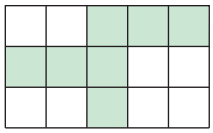
U racionalnom broju $\frac{a}{b}$ broj a nazivamo **brojnik**, a broj b **nazivnik** razlomka.

S pomoću racionalnih brojeva zapisujemo i dijelove cjeline.

Promotrimo pravokutnik na desnoj slici. Podijeljen je na 15 jednakih dijelova koje nazivamo petnaestine i označujemo s $\frac{1}{15}$.







Na slikama lijevo iscrtani su dijelovi pravokutnika jednaki $\frac{4}{15}$, odnosno $\frac{7}{15}$.

Uočimo da je svaki prirodan, odnosno cijeli broj ujedno i racionalan broj. Npr. broj 5 možemo napisati u obliku razlomka na beskonačno mnogo načina.

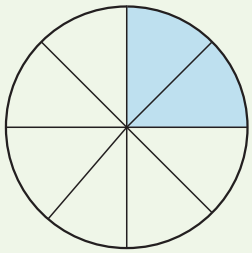
$$5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3} = \ldots; \quad \text{općenito} \quad a = \frac{a}{1}.$$

Jednakost racionalnih brojeva

PRIMJER 1.

Uočimo iscrtani dio kruga na slici. Možemo ga zapisati na dva načina: kao $\frac{1}{4}$, ali i kao $\frac{2}{8}$. Dakle, $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$.

Primijetimo da je produkt brojnika prvog razlomka i nazivnika drugog jednak produktu nazivnika prvog i brojnika drugog razlomka. Ovo svojstvo je karakteristično i služi za definiciju jednakosti razlomaka.



Jednakost racionalnih brojeva

Dva racionalna broja $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ su **jednaka** ako je

$$ad = bc.$$

PRIMJER 2.

Provjerimo jednakost zadanih razlomaka:

a) $\frac{3}{4}$ i $\frac{6}{8}$ **b)** $\frac{-7}{5}$ i $\frac{7}{-5}$.

a) $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ jer je $3 \cdot 8 = 6 \cdot 4$, tj. $24 = 24$. **b)** $\frac{-7}{5} = \frac{7}{-5}$ jer je $-7 \cdot (-5) = 7 \cdot 5$, tj. $35 = 35$.

PRIMJER 3.

Dokažimo da je za svaki $x \neq 0$, $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot x}{b \cdot x}$.

Unakrsnim množenjem dobivamo $a \cdot (b \cdot x) = b \cdot (a \cdot x)$ što je istinito budući da je množenje cijelih brojeva asocijativno i komutativno.

Kažemo da smo razlomak $\frac{ax}{bx}$ dobili **proširivanjem** razlomka $\frac{a}{b}$ brojem x. I obratno, razlomak $\frac{a}{b}$ dobili smo **skraćivanjem** razlomka $\frac{ax}{bx}$ brojem x.

PRIMJER 4.

Skratimo razlomak $\frac{126}{108}$.

Razlomak postupno skraćujemo brojevima 2 i 9: $\frac{126}{108} = \frac{2 \cdot 63}{2 \cdot 54} = \frac{63}{54} = \frac{9 \cdot 7}{9 \cdot 6} = \frac{7}{6}$.

PRIMJER 5.

Proširimo zadane razlomke do najmanjeg zajedničkog nazivnika.

a) $\frac{7}{2}$ i $\frac{8}{3}$ **b)** $\frac{7}{6}$ i $\frac{11}{9}$.

a) Najmanji zajednički nazivnik nazivnika 2 i 3 je 6, pa proširujemo ovako:

$$\frac{7}{2} = \frac{7 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{21}{6}, \qquad \frac{8}{3} = \frac{8 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{16}{6}$$

b) $V(6, 9) = 18$, pa proširujemo ovako:

$$\frac{7}{6} = \frac{7 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{21}{18}, \qquad \frac{11}{9} = \frac{11 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{22}{18}.$$

Zbrajanje racionalnih brojeva

PRIMJER 6.

Izračunajmo:

a) $\frac{3}{5}+\frac{8}{5}$ **b)** $\frac{5}{4}+\frac{1}{3}$.

a) $\frac{3}{5}$ i $\frac{8}{5}$ su razlomci s jednakim nazivnicima i oni se zbrajaju tako da se brojnici zbroje, a nazivnik prepiše, tj. $\frac{3}{5}+\frac{8}{5}=\frac{11}{5}$.

b) $\frac{5}{4}$ i $\frac{1}{3}$ nemaju jednake nazivnike pa ih prvo proširimo tako da su im nazivnici jednaki, tj. $\frac{5}{4}=\frac{5\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{15}{12}$, $\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{4}{12}$, pa je $\frac{5}{4}+\frac{1}{3}=\frac{15}{12}+\frac{4}{12}=\frac{17}{12}$.

Dakle, ako su $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ dva racionalna broja, pri zbrajanju prvo ih svodimo na zajednički nazivnik, tj. na nazivnik koji je višekratnik nazivnika i jednog i drugog razlomka. Primjerice za zajednički nazivnik možemo uzeti broj $b\cdot d$. Tada je $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$ i $\frac{c}{d}=\frac{cb}{bd}$, te je konačno $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$.

Zbrajanje racionalnih brojeva

Ako su $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ racionalni brojevi, onda vrijedi

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

Uočimo da je bd samo jedan od beskonačno mnogo zajedničkih nazivnika brojeva $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$. Uobičajeno je pri zbrajanju tražiti najmanji zajednički nazivnik, tj. najmanji zajednički višekratnik nazivnika.

Tako, primjerice, zbroj $\frac{1}{120}+\frac{7}{180}$ možemo računati prema gore navedenoj formuli:

$$\frac{1}{120}+\frac{7}{180}=\frac{1\cdot 180+7\cdot 120}{120\cdot 180}=\frac{180+840}{21\,600}=\frac{1020}{21\,600}=\frac{17}{360},$$

a da smo odabrali najmanji zajednički nazivnik (a to je 360), račun bi bio jednostavniji:

$$\frac{1}{120}+\frac{7}{180}=\frac{3}{360}+\frac{14}{360}=\frac{17}{360}.$$

Promotrimo bilo koji razlomak $r=\frac{a}{b}$. Tada za racionalan broj $r'=\frac{-a}{b}$ vrijedi

$$\frac{a}{b}+\frac{-a}{b}=\frac{a+(-a)}{b}=\frac{0}{b}=0,$$

tj. $r+r'=0$. Broj r' nazivamo **suprotan broj** broja r i označavamo s $-r$.

PRIMJER 7.

Odredimo suprotne brojeve od $\frac{14}{3}$, $\frac{-2}{17}$.

$-\frac{14}{3} = \frac{-14}{3}$, $-\left(\frac{-2}{17}\right) = \frac{2}{17}$.

Uz ovo svojstvo da za svaki racionalni broj postoji njemu suprotan broj, zbrajanje ima još neka istaknuta svojstva:

1. Zbrajanje je asocijativno, tj. za bilo koja tri racionalna broja r_1, r_2 i r_3 vrijedi
$$(r_1 + r_2) + r_3 = r_1 + (r_2 + r_3).$$
2. Zbrajanje je komutativno, tj.
$$r_1 + r_2 = r_2 + r_1 \quad \text{za svaki} \quad r_1,\ r_2 \in \mathbf{Q}.$$
3. Za svaki $r \in \mathbf{Q}$ vrijedi
$$r + 0 = r.$$

PRIMJER 8.

Koristeći svojstva zbrajanja izračunajmo dane izraze:

a) $\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right)$ **b)** $\left(\frac{8}{5} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}$.

a) $\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} + \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{-2+1}{6} = \frac{-1}{6} = -\frac{1}{6}$,
pri čemu smo koristili komutativnost unutar zagrade, pa asocijativnost, te konačno definiciju zbrajanja.

b) $\left(\frac{8}{5} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{8}{5} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{8}{5} + 0 = \frac{8}{5}$,
pri čemu smo koristili asocijativnost, zbrajanje suprotnih brojeva, te zbrajanje s nulom.

Primijetimo da ne spominjemo oduzimanje kao posebnu operaciju. Naime, razlika $r_1 - r_2$ poistovjećuje se sa zbrojem $r_1 + (-r_2)$, tj. oduzimanje se svodi na zbrajanje.

Množenje racionalnih brojeva

Umnožak dva racionalna broja je racionalni broj čiji je brojnik jednak umnošku brojnika faktora, a nazivnik je jednak umnošku nazivnika faktora. Ili ako zapišemo s pomoću općih brojeva, imamo sljedeću formulu.

Množenje racionalnih brojeva

Ako su $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ racionalni brojevi, tada je
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Ako je $\frac{a}{b}$ razlomak različit od 0, tada je očito da za broj $\frac{b}{a}$ vrijedi

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Broj $\frac{b}{a}$ naziva se recipročan broj broja $\frac{a}{b}$ i označava s $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$.

PRIMJER 9.

Napišimo recipročne brojeve brojeva $\frac{3}{4}$, $\frac{-5}{8}$, 10, -1, $-\frac{4}{15}$.

$\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3}$, $\left(\frac{-5}{8}\right)^{-1} = \frac{8}{-5} = -\frac{8}{5}$, $(10)^{-1} = \left(\frac{10}{1}\right)^{-1} = \frac{1}{10}$, $(-1)^{-1} = -1$, $\left(-\frac{4}{15}\right)^{-1} = -\frac{15}{4}$.

Dijeljenje racionalnih brojeva definiramo s pomoću recipročnih brojeva ovako: razlomak $\frac{a}{b}$ se dijeli s razlomkom $\frac{c}{d}$ tako da se $\frac{a}{b}$ pomnoži s recipročnim brojem od $\frac{c}{d}$, tj. dobivamo izraz:

Dijeljenje racionalnih brojeva

Za svaka dva racionalna broja $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$, $\frac{c}{d} \neq 0$, vrijedi

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Navedimo i svojstva množenja. Već smo spomenuli da za svaki racionalni broj različit od nule postoji recipročan broj.

Također, istaknimo da za svaki racionalni broj r vrijedi

$$r \cdot 1 = r.$$

Nadalje, množenje je asocijativno, tj.

$$r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3) = (r_1 \cdot r_2) \cdot r_3, \quad \text{za sve } r_1,\ r_2,\ r_3 \in \mathbf{Q};$$

komutativno, tj.

$$r_1 \cdot r_2 = r_2 \cdot r_1, \quad \text{za sve } r_1,\ r_2 \in \mathbf{Q}$$

i distributivno prema zbrajanju, tj.

$$r_1 \cdot (r_2 + r_3) = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3, \quad \text{za sve } r_1,\ r_2,\ r_3 \in \mathbf{Q}.$$

Množenje je operacija višeg stupnja od zbrajanja. Drugim riječima, ukoliko se u izrazu bez zagrada pojave zbrajanje i množenje, prvo će se izvršiti množenje, a zatim zbrajanje.

PRIMJER 10.

Izračunajmo:

a) $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{6}$ **b)** $\dfrac{\frac{11}{15}\cdot\left(3-\frac{7}{4}\right)}{\frac{5}{4}-1:\frac{3}{2}}-\frac{1}{7}:\frac{1}{2}$.

a) Ovo je izraz bez zagrada i prvo se vrši množenje, zatim zbrajanje.

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{6}=\frac{3}{5}+\frac{2\cdot 7}{5\cdot 6}=\frac{3}{5}+\frac{7}{15}=\frac{9+7}{15}=\frac{16}{15}.$$

b) U ovom izrazu se pojavljuje zagrada koja se prva izračunava, onda se vrši množenje (i dijeljenje), te na kraju zbrajanje (i oduzimanje).

$$\frac{\frac{11}{15}\cdot\left(3-\frac{7}{4}\right)}{\frac{5}{4}-1:\frac{3}{2}}-\frac{1}{7}:\frac{1}{2}=\frac{\frac{11}{15}\cdot\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}-1\cdot\frac{2}{3}}-\frac{1}{7}\cdot 2=\frac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{4}-\frac{2}{3}}-\frac{2}{7}=\frac{\frac{11}{12}}{\frac{7}{12}}-\frac{2}{7}$$

$$=\frac{11\cdot 12}{12\cdot 7}-\frac{2}{7}=\frac{11}{7}-\frac{2}{7}=\frac{9}{7}.$$

Primijetimo da se u računu pojavio dvojni razlomak $\dfrac{\frac{11}{12}}{\frac{7}{12}}$ koji smo izračunali koristeći definiciju dijeljenja i množenja. Naime, vrijedi

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

Uvedimo oznaku i za produkt nekoliko istih faktora. Ako je $r\in\mathbf{Q}$, $n\in\mathbf{N}$, tada ćemo s r^n označavati produkt $\underbrace{r\cdot r\cdot\ldots\cdot r}_{n\text{ puta}}$. Dogovorno se uzima da je $r^0=1$. Izraz r^n se naziva n-ta potencija broja r. Potencije su predmet detaljnog proučavanja u 5. poglavlju.

Uređaj u skupu Q

Uočimo da svaki racionalni broj možemo zapisati tako da mu je nazivnik pozitivan. Naime, ako je razlomak oblika $\frac{a}{-b}$, $a\in\mathbf{Z}$, $b>0$, tada proširivanjem s (-1) dobivamo razlomak $\frac{-a}{b}$ kojemu je nazivnik pozitivni broj. Zato možemo pisati da je

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{a}{b}:a\in\mathbf{Z},\ b\in\mathbf{N}\right\}.$$

Dva racionalna broja obično uspoređujemo ako su dani u obliku gdje je nazivnik pozitivni broj.

Uređaj na Q

Neka su $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbf{Q}$, $b, d > 0$. Kažemo da je $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ako je $ad < bc$.

PRIMJER 11.

Usporedimo brojeve

a) $\frac{3}{4}$ i $\frac{-5}{-6}$ **b)** $\frac{10}{-13}$ i $\frac{-11}{14}$.

a) Prvo $\frac{-5}{-6}$ proširivanjem s -1 svedimo na razlomak s pozitivnim nazivnikom: $\frac{-5}{-6} = \frac{5}{6}$. Sada uspoređujemo $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{6}$. Kako je $3 \cdot 6 = 18 < 4 \cdot 5 = 20$, slijedi da je $\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$.

b) Kako je $\frac{10}{-13} = \frac{-10}{13}$ i $(-10) \cdot 14 = -140 > 13 \cdot (-11) = -143$, slijedi da je $\frac{-10}{13} > \frac{-11}{14}$.

Racionalne brojeve koje možemo svesti na oblik u kojem su i brojnik i nazivnik pozitivni brojevi zovemo **pozitivni racionalni brojevi**, a racionalni brojevi koji u zapisu s pozitivnim nazivnikom imaju negativni brojnik nazivamo **negativni racionalni brojevi**.

PRIMJER 12.

Napišimo dva racionalna broja između brojeva $\frac{1}{2}$ i $\frac{4}{5}$.

Izračunamo aritmetičku sredinu tih brojeva: $\frac{\frac{1}{2} + \frac{4}{5}}{2} = \frac{\frac{5+8}{10}}{2} = \frac{13}{20}$. To je jedan broj između $\frac{1}{2}$ i $\frac{4}{5}$. Drugi bismo mogli naći kao aritmetičku sredinu brojeva $\frac{1}{2}$ i $\frac{13}{20}$:

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{13}{20}}{2} = \frac{\frac{10+13}{20}}{2} = \frac{23}{40}.$$

Ovim primjerom smo ilustrirali jedno vrlo važno svojstvo skupa $\mathbf{Q}$, koje glasi:

Gustoća skupa Q

Skup $\mathbf{Q}$ je **gust**, tj. između svaka dva racionalna broja postoji racionalni broj.

Primijetimo da ni skup $\mathbf{N}$ ni skup $\mathbf{Z}$ nisu imali ovo svojstvo, jer, primjerice, između dva cijela broja -2 i -1 ne postoji nijedan cijeli broj.

Decimalni zapis racionalnog broja

Podijelimo li u nekom racionalnom broju brojnik s nazivnikom, dobit ćemo decimalni zapis racionalnog broja. Tako je, primjerice, $\frac{13}{4} = 13 : 4 = 3.25$.

Ako racionalni brojevi u nazivnicima imaju brojeve 10, 100, 1000. . . , zovemo ih **decimalnim** razlomcima. Primjerice:

$$\frac{1}{10} = 0.1, \qquad \frac{1}{100} = 0.01, \qquad \frac{1}{1000} = 0.001.$$

Svaki se racionalan broj može prikazati u decimalnom zapisu. Pretpostavimo da je razlomak do kraja skraćen. Pri dijeljenju brojnika nazivnikom možemo dobiti konačan, ali i beskonačan broj u kojem se ponavlja jedna znamenka ili skupina znamenaka.

PRIMJER 13.

Prikažimo u decimalnom zapisu razlomke:

a) $\frac{3}{10}$ **b)** $\frac{3}{4}$ **c)** $\frac{15}{8}$.

a) $\frac{3}{10} = 0.3$ **b)** $\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0.75$ **c)** $\frac{15}{8} = 15 : 8 = 1.875$.

U prethodnom primjeru dijeljenjem smo dobili konačno mnogo znamenaka iza decimalne točke. To će se dogoditi kad su faktori nazivnika samo 2 ili 5.

PRIMJER 14.

Prikažimo u decimalnom zapisu razlomke:

a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{2}{11}$ **c)** $\frac{1}{7}$.

a) $\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0.333\ldots$ **b)** $\frac{2}{11} = 0.181818\ldots$ **c)** $\frac{1}{7} = 0.142857142\ldots$

U primjeru dijeljenju nema kraja, ali uočavamo pravilnost u pojavljivanju znamenaka. U prvom potprimjeru ponavlja se znamenka 3, u drugom se ponavlja grupa 18, a u trećem grupa znamenaka 142857. Zapisujemo ih ovako:

$$\frac{1}{3} = 0.\dot{3}, \qquad \frac{2}{11} = 0.\dot{1}\dot{8}, \qquad \frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}.$$

Ovakve brojeve nazivamo **čisto periodični brojevi**. Njihovi nazivnici kao faktore nemaju ni 2 niti 5.

PRIMJER 15.

Prikažimo u decimalnom zapisu razlomke:

a) $\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{3}{14}$.

a) $\frac{1}{6} = 1 : 6 = 0.166\ldots = 0.1\dot{6}$ **b)** $\frac{3}{14} = 3 : 14 = 0.214285714\ldots = 0.2\dot{1}4285\dot{7}$.

U ovim brojevima također se pojavljuju skupine znamenaka koje se ponavljaju, ali ne odmah nakon decimalne točke. Ovi se brojevi zovu **mješovito periodični brojevi**. Njihovi nazivnici uz faktore 2 ili 5 imaju još neki faktor. Skupina znamenaka koja se ponavlja zove se **period**, skupina znamenaka koja se ne ponavlja zove se **pretperiod**.

U primjenama često decimalne brojeve zaokružujemo na onoliko znamenaka kolika nam je točnost potrebna: na jednu decimalu, na dvije decimale. . .

Općenito: ako je prva znamenka koja se izostavlja 0, 1, 2, 3 ili 4, prethodna znamenka približne vrijednosti ostaje ista. Ako je izostavljena znamenka 5, 6, 7, 8 ili 9, zadnja znamenka tražene točnosti povećava se za 1.

PRIMJER 16.

Zaokružimo decimalan broj 5.16273 na:

a) jednu decimalu **b)** dvije decimale **c)** tri decimale **d)** četiri decimale.

zadani broj	traženi broj decimala	zaokruženi broj
5.16273	1	5.2
5.16273	2	5.16
5.16273	3	5.163
5.16273	4	5.1627

Vidjeli smo kako razlomke možemo prikazati u decimalnom zapisu. No, možemo i decimalne brojeve prikazati u obliku razlomaka.

PRIMJER 17.

U tablici su dani neki primjeri pretvorbe decimalnih brojeva u razlomke. Razlomci nisu skraćeni da se lakše uoče pravila.

decimalni zapis	0.17	0.432	$0.\dot{3}$	$0.\dot{1}\dot{6}$	$0.\dot{7}2\dot{8}$	$0.23\dot{7}$	$0.214\dot{5}\dot{7}$
razlomak	$\frac{17}{100}$	$\frac{432}{1000}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{16}{99}$	$\frac{728}{999}$	$\frac{214}{900}$	$\frac{21\,243}{99\,000}$

Objasnimo npr.: $0.\dot{3} = \frac{3}{9}$ i $0.23\dot{7} = \frac{214}{900}$.

$$\begin{aligned} x &= 0.3333\ldots \ / \cdot 10 \\ 10x &= 3.333\ldots \\ 10x &= 3 + 0.333\ldots \\ 10x &= 3 + x \\ 10x - x &= 3 \\ 9x &= 3 \ / \ :9 \\ x &= \frac{3}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 0.23\dot{7} \\ x &= \frac{23}{100} + \frac{0.\dot{7}}{100} \\ x &= \frac{1}{100}\left(23 + \frac{7}{9}\right) \\ x &= \frac{1}{100} \cdot \frac{214}{9} = \frac{214}{900} \end{aligned}$$

Uočimo da se čisto periodični brojevi pišu u obliku razlomka tako da se periodične znamenke pišu u brojnik, a isti broj devetki u nazivnik. Kod pretvorbe mješovito periodičnog broja on se prikazuje kao zbroj dvaju brojeva od kojih jedan sadržava pretperiod, a drugi period, te se kao što je pokazano u primjeru obavlja pretvorba.

PRIMJER 18.

Izračunajmo: $0.3728 + 1.359$.

Potpišimo ta dva broja tako da su decimalne točke jedna ispod druge:

$$\begin{array}{r} 0.3728 \\ +\ 1.359 \\ \hline 1.7318 \end{array}$$

Dva decimalna broja množimo tako da ih pomnožimo zanemarujući decimalne točke, a zatim stavimo onoliko decimalnih mjesta koliko ih ima u oba broja zajedno. Razlog za ovo pravilo opisan je u sljedećem primjeru.

PRIMJER 19.

Pomnožimo 0.32 i 5.4.

$$\begin{array}{l} \underline{0.32 \cdot 5.4} \\ \quad 160 \\ \underline{\quad 128} \\ 1.728 \end{array}$$

Obrazložimo ovo pravilo. Zapišimo oba broja u razlomku: $0.32 = \frac{32}{100}$, $5.4 = \frac{54}{10}$. Tada je: $0.32 \cdot 5.4 = \frac{32}{100} \cdot \frac{54}{10} = \frac{32 \cdot 54}{1000} = \frac{1728}{1000} = 1.728$.

Pri dijeljenju dvaju decimalnih brojeva postupamo tako da i djeljenik i djelitelj pomnožimo s 10, 100, 1000... tako da djelitelj postane prirodan broj, te izvršimo dijeljenje s prirodnim brojem.

PRIMJER 20.

$1.273 : 0.02 = 127.3 : 2 = 63.65$. Ovdje smo djeljenik i djelitelj množili sa 100.

ZADATCI 1.3.

1. Nacrtaj kvadrat stranice duljine 4 cm i podijeli ga na 16 jednakih manjih kvadrata. Iscrtaj sljedeće dijelove kvadrata:

a $\frac{1}{16}$ **b** $\frac{1}{2}$ **c** $\frac{3}{16}$ **d** $\frac{1}{8}$ **e** $\frac{9}{16}$.

2. Nacrtaj krug polumjera 15 mm i podijeli ga na osam jednakih dijelova. Iscrtaj sljedeće dijelove kruga:

a $\frac{1}{2}$ **b** $\frac{1}{4}$ **c** $\frac{3}{4}$ **d** $\frac{3}{8}$ **e** $\frac{7}{8}$.

3. U bačvi ima 100 litara vode. Koliko litara vode je u:

a $\frac{1}{2}$ **b** $\frac{1}{5}$ **c** $\frac{1}{10}$ **d** $\frac{3}{5}$ **e** $\frac{7}{10}$

bačve?

4. Koliko je:

a $\frac{1}{8}$ od 24 **b** $\frac{2}{3}$ od 12 **c** $\frac{4}{9}$ od 27?

5. Mario je prije podne prešao 14 km što iznosi $\frac{2}{7}$ puta. Kolika je duljina cijelog puta?

6. Za $\frac{2}{5}$ obavljenog posla plaćeno je 240 kn. Koliko je stajao cijeli posao?

7. U spremniku je 1800 kg pšenice. Koliko kg pšenice je u:

a $\frac{1}{2}$ **b** $\frac{1}{3}$ **c** $\frac{2}{3}$ **d** $\frac{1}{60}$ **e** $\frac{5}{18}$

spremnika?

8. Brojeve 2, 18, 171, 452, -11, -32, -81 i 0 prikaži u obliku razlomka.

9. Jurica je pokosio $\frac{1}{6}$ livade. Koliko je m^2 pokosio ako je površina livade $1092\ m^2$?

10. U bačvi ima 270 litara maslinova ulja. Vinko je $\frac{2}{9}$ ulja pretočio u boce. Koliko je ulja ostalo u bačvi?

11. Ana je prvi dan pročitala $\frac{3}{5}$ knjige. Koliki je dio knjige ostao nepročitan?

12. Napiši brojnik, odnosno nazivnik razlomka tako da dobiveni razlomci budu jednaki:

a $\frac{3}{5} = \frac{\quad}{15}$ **b** $\frac{8}{-3} = \frac{\quad}{-21}$ **c** $\frac{3}{20} = \frac{\quad}{20a}$

d $\frac{4}{7} = \frac{20}{\quad}$ **e** $\frac{-8}{18} = \frac{-64}{\quad}$ **f** $\frac{5}{7} = \frac{15x}{\quad}$.

13. Skrati razlomke:

a $\frac{18}{12}$ **b** $\frac{321}{216}$ **c** $\frac{-1001}{39}$ **d** $\frac{141414}{-196}$ **e** $\frac{25a}{140a}$ **f** $\frac{36ab}{28abc}$.

14. Jesu li jednaki razlomci:

a $\frac{9}{10}$ i $\frac{8}{9}$ **b** $\frac{11}{44}$ i $\frac{3}{12}$ **c** $\frac{1997}{1998}$ i $\frac{1998}{1999}$ **d** $\frac{-333}{7}$ i $\frac{666}{-14}$?

15. Dane razlomke svedi na najmanji zajednički nazivnik:

a $\frac{1}{3}$ i $\frac{3}{4}$ **b** $\frac{8}{5}$ i $\frac{21}{10}$ **c** $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{4}$ i $\frac{3}{2}$ **d** $\frac{18}{11}$, $\frac{3}{22}$ i 3.

16. Zbroji:

a $\frac{4}{11}+\frac{8}{11}$ **b** $\frac{14}{19}+\frac{18}{19}$ **c** $\frac{21}{5}+\frac{13}{5}+\frac{12}{5}$ **d** $\frac{22}{7}-\frac{11}{7}+\frac{2}{7}$.

17. Izračunaj:

a $1+\frac{7}{8}$ **b** $2-\frac{1}{4}$ **c** $2+\frac{3}{4}$ **d** $5-\frac{11}{3}$

e $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ **f** $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ **g** $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}$ **h** $\frac{22}{5}-\frac{17}{3}$.

18. Izračunaj:

a $2\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}$ **b** $5\frac{1}{5}+2\frac{1}{5}$ **c** $3\frac{1}{5}+2\frac{1}{4}$ **d** $2\frac{3}{8}-1\frac{1}{4}$

e $10\frac{1}{2}-5\frac{3}{4}$ **f** $-1\frac{1}{6}+2\frac{2}{3}$ **g** $-5\frac{1}{2}-4\frac{1}{4}$ **h** $8\frac{1}{3}-11\frac{5}{6}$.

19. Izračunaj:

a $\frac{1}{4}+\left(\frac{2}{4}-\frac{3}{4}\right)$ **b** $\frac{1}{5}-\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\right)$ **c** $\frac{8}{11}+\left(\frac{12}{11}-\frac{5}{11}\right)$

d $\frac{21}{44}-\left(\frac{19}{44}-\frac{25}{44}\right)$ **e** $\left(\frac{18}{29}+\frac{35}{29}\right)-\frac{11}{29}$ **f** $\left(\frac{41}{100}+\frac{37}{100}\right)-\frac{28}{100}$.

20. Izračunaj:

a $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)$ **b** $\frac{1}{5}+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)$ **c** $\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\right)$

d $\left(\frac{3}{10}-\frac{5}{2}\right)+\frac{7}{20}$ **e** $\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)$ **f** $\left(\frac{14}{5}-\frac{7}{10}\right)+\frac{11}{10}$.

21. Izračunaj:

a $\left(\frac{3}{8}-\frac{5}{4}\right)-\left(\frac{3}{16}-\frac{1}{8}\right)$ **b** $\left(\frac{5}{7}+\frac{1}{4}-\frac{1}{21}\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{7}\right)$

c $-\left(\frac{5}{2}-1\right)+\left(\frac{15}{4}-1\right)-\left(\frac{25}{9}-2\right)$ **d** $-\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}-\frac{3}{6}\right)-\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{2}\right)$.

22. Marko je prije podne napravio $\frac{3}{7}$ posla, a poslije podne još $\frac{2}{5}$ posla. Koliko je ukupno posla taj dan dovršio Marko?

23. Maja uči školsko gradivo. $\frac{3}{4}$ sata učila je hrvatski jezik, $\frac{4}{9}$ matematiku, a ostalo gradivo $\frac{1}{3}$ sata. Koliko je sati Maja učila?

24. Vlatka je u ponedjeljak pročitala $\frac{1}{9}$ knjige, u utorak $\frac{1}{5}$ knjige, a u srijedu $\frac{3}{10}$ knjige. Koliki dio knjige još treba pročitati?

25. Oporukom je Marija naslijedila $\frac{7}{24}$, Ana $\frac{5}{18}$, a Iva $\frac{2}{9}$ nasljedstva. Ostatak nasljedstva darovan je u dobrotvorne svrhe. Koliki je dio nasljedstva darovan?

26. Planinar je prvi dan prešao $\frac{1}{5}$ puta, a drugi dan $\frac{1}{3}$ puta. Do kraja puta treba prijeći još 21 km. Kolika je duljina cijelog puta?

27. Anica je za kućne račune potrošila $\frac{1}{6}$ svoje mjesečne plaće, za kupovinu para cipela $\frac{1}{10}$ plaće, te za hranu i kućne potrepštine $\frac{3}{5}$ plaće. Polovinu preostalog novca stavila je na štednju. Koliko joj je taj mjesec ostalo od plaće koja je iznosila 5100 kn?

28. Pomnoži:

a $\frac{22}{35} \cdot \frac{49}{33}$ **b** $\frac{225}{18} \cdot \frac{27}{144}$ **c** $\frac{1800}{128} \cdot \frac{144}{810}$.

29. Pomnoži:

a $\left(-\frac{25}{7}\right) \cdot \frac{11}{125}$ **b** $\left(-\frac{30}{11}\right) \cdot \left(-\frac{44}{45}\right)$ **c** $\frac{121}{144} \cdot \left(-\frac{60}{77}\right)$.

30. Podijeli:

a $1 : \frac{2}{3}$ **b** $-3 : \frac{4}{7}$ **c** $\frac{12}{7} : \frac{36}{28}$

d $\left(-\frac{11}{3}\right) : \frac{22}{21}$ **e** $\left(-1\frac{1}{3}\right) : 4$ **f** $\left(-2\frac{1}{5}\right) : \left(-\frac{33}{7}\right)$.

31. Izračunaj:

a $2 \cdot \left(\frac{2}{7} - 1\right) - 3\left(\frac{4}{3} + 1\right)$ **b** $3 \cdot \left(\frac{3}{4} + 2\right) + 2\left(-\frac{1}{2} - 1\right)$

c $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(3 - \frac{1}{2}\right)$ **d** $\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \left(2 + \frac{1}{2}\right)$.

32. Izračunaj:

a $-\frac{80}{77} \cdot \left(\frac{21}{8} - \frac{1}{10}\right)$ **b** $-\frac{9}{58} \cdot \left(-\frac{5}{12} - \frac{7}{18}\right)$ **c** $\left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} + \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{14}{25}$

d $\left(\frac{7}{15} + \frac{14}{15} \cdot \frac{2}{9}\right) \cdot \frac{27}{28}$ **e** $-\frac{1}{5} : \left(\frac{1}{15} - \frac{3}{5}\right)$ **f** $\left(\frac{1}{15} - \frac{7}{3}\right) : \left(-\frac{3}{2}\right)$.

33. Izračunaj:

a $-\frac{34}{11} \cdot \left(4 - \frac{5}{14} \cdot \frac{21}{17}\right)$ **b** $-\frac{25}{8} \cdot \left(3 - \left(\frac{1}{2} - 2\right) \cdot \frac{14}{5}\right)$

c $\left(\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{7} + \frac{6}{5}\right) : \frac{2}{7} - \frac{1}{15}$ **d** $-\frac{19}{21} \cdot \left(5 - \left(2\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}\right) : 4\frac{2}{9}\right)$.

34. Izračunaj:

a $\frac{1}{2}-\frac{2}{7}\left(\frac{1}{3}+2\right)-\frac{7}{2}:14$ **b** $\frac{3}{5}-\frac{2}{3}:\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\right)$ **c** $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right):\frac{2}{3}$

d $3-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3}\right)-7$ **e** $\frac{1}{2}-2\left(\frac{2}{5}-3\right):\frac{2}{3}$ **f** $\frac{1}{3}-5\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right):\frac{2}{7}$.

35. Izračunaj:

a $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\cdot 24$ **b** $\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\right):\frac{3}{25}$ **c** $1-1:7+\frac{3}{7}-\frac{14}{3}\cdot\frac{16}{49}$

d $\left(1-\frac{14}{5}\cdot\frac{25}{21}\right)\cdot 3-2\cdot\frac{1}{2}$ **e** $\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{9}\right)\right)\cdot\frac{27}{2}$ **f** $\left(\frac{7}{2}+\frac{1}{3}\right):\frac{35}{42}+\frac{7}{42}$.

36. Izračunaj:

a $\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{12}{5}}$ **b** $\dfrac{\frac{11}{3}}{\frac{22}{9}}$ **c** $\dfrac{3}{\frac{4}{5}}$ **d** $\dfrac{\frac{1}{12}}{2}$.

37. Izračunaj:

a $\dfrac{\frac{11}{3}-\frac{1}{3}}{\frac{25}{2}-\frac{7}{2}}$ **b** $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{23}{6}-\frac{1}{2}}$ **c** $\dfrac{\frac{12}{5}+\frac{1}{10}}{\frac{3}{4}+\frac{5}{4}}$ **d** $\dfrac{2-\frac{1}{6}}{\frac{22}{27}}$.

38. Izračunaj:

a $\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}{\frac{7}{16}+\frac{5}{8}-\frac{3}{4}}$ **b** $\dfrac{2+\frac{11}{3}-\frac{4}{9}}{-\frac{2}{27}-\frac{11}{9}-\frac{5}{3}}$ **c** $\dfrac{2\frac{1}{3}+3\frac{5}{6}-5\frac{1}{2}}{10-\frac{173}{18}}$

d $\dfrac{\frac{13}{2}-\frac{8}{3}}{\frac{13}{2}+\frac{8}{3}}:\frac{46}{25}$ **e** $\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}\cdot\frac{2}{21}$ **f** $\dfrac{2-\frac{1}{5}+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{5}-\frac{7}{4}}:\frac{51}{2}$.

39. Vinarija je ove godine proizvela 2400 boca kvalitetnog vina. O koliko je litara vina riječ ako boce imaju $\frac{3}{4}$ litre?

40. Pred silosom za pšenicu na istovar čeka 35 traktora s prikolicama. Ako je u svakoj prikolici $1\frac{3}{5}$ tone pšenice, koliko će ukupno tona pšenice biti uskladišteno u silosu?

41. Mario je napravio 12 kg marmelade od marelica. Želi je staviti u staklenke. Koliko mu je staklenki potrebno ako u svaku staklenku stane $\frac{7}{10}$ kg marmelade?

42. Usporedi brojeve:

a $-\frac{3}{5}$ i $\frac{8}{15}$ **b** $\frac{21}{43}$ i $\frac{22}{41}$ **c** $\frac{-31}{20}$ i $\frac{30}{-29}$.

43. Poredaj po veličini brojeve od najmanjeg do najvećeg:

a $\frac{3}{7}, \frac{12}{7}, \frac{-4}{7}, \frac{18}{7}, \frac{25}{7}, 0$

b $-\frac{23}{11}, -\frac{111}{11}, \frac{-43}{11}, -1, -9$

c $\frac{8}{3}, \frac{11}{6}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}$

d $\frac{49}{111}, \frac{1}{3}, \frac{21}{37}, \frac{152}{333}$.

44. Napiši jedan racionalni broj koji se nalazi između racionalnih brojeva:

a 5 i 19

b $\frac{17}{8}$ i $\frac{21}{8}$

c $\frac{19}{15}$ i $\frac{4}{3}$

d $-\frac{12}{7}$ i -1

e $-\frac{11}{9}$ i $-\frac{7}{9}$

f $-\frac{17}{21}$ i $-\frac{1}{3}$.

45. Napiši dva racionalna broja koji se nalaze između racionalnih brojeva:

a 3 i 4

b $\frac{1}{2}$ i 1

c $\frac{5}{3}$ i $\frac{7}{3}$

d $\frac{8}{7}$ i $\frac{6}{5}$

e -10 i -9

f $-\frac{11}{3}$ i $-\frac{11}{5}$.

46. Brojeve $\frac{1}{2}, \frac{9}{4}, \frac{31}{2}, \frac{125}{8}, -\frac{143}{4}$ prikaži u decimalnom zapisu. Koja je to vrsta decimalnog prikaza: konačan, čisto periodičan ili mješovito periodičan?

47. Brojeve $\frac{3}{5}, \frac{18}{5}, \frac{21}{25}, \frac{137}{25}, \frac{14}{100}, \frac{217}{10}$ prikaži u decimalnom zapisu. Koja je to vrsta decimalnog prikaza?

48. Brojeve $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{12}{7}, \frac{131}{3}, \frac{1}{11}$ prikaži u decimalnom zapisu. Koja je to vrsta decimalnog prikaza?

49. Brojeve $\frac{7}{6}, \frac{17}{15}, \frac{211}{30}, \frac{71}{18}$ prikaži u decimalnom zapisu. Koja je to vrsta decimalnog prikaza?

50. Popuni tablicu:

decimalni zapis	0.25	0.148	1.25	2.371	18.3	2.475	24.75	0.125	0.75
razlomak									

51. Popuni tablicu:

decimalni zapis	$0.\dot{4}$	$0.\dot{5}\dot{6}$	$0.\dot{2}3\dot{7}$	$0.1\dot{2}$	$0.1\dot{5}$	$0.23\dot{4}\dot{9}$	$0.24\dot{1}$
razlomak							

52. Zaokruži sljedeće decimalne brojeve na desetninu:

a 5.28 **b** 3.92 **c** 82.11 **d** 900.12 **e** 13.98

f 6.156 **g** 6.145 **h** 72.18 **i** 315.20 **j** 8.06.

53. Zaokruži sljedeće decimalne brojeve na dvije decimale:

a 3.912 **b** 9.729 **c** 6.350 **d** 12.008 **e** 3.145
f 8.630 **g** 25.619 **h** 32.811 **i** 15.900 **j** 8.181.

54. Popuni tablicu:

zadani broj	traženi broj decimala	zaokruženi broj
612.712	2	
32.91	1	
815.6321	3	
2.81356	4	

55. Usporedi zadane decimalne brojeve s pomoću znakova $<$, $>$ i $=$:

a 10.5 i 10.49 **b** 2.08 i 2.079 **c** 3.18 i 3.189
d 15.08 i 15.081 **e** 0.018 i 0.02 **f** 0.777 i 0.778
g 0.0021 i 0.0025 **h** 0.40 i 0.04 **i** 0.77 i 0.770
j -1.1 i -1.01 **k** -2.22 i -2.2 **l** -3.2 i -3.3.

56. Izračunaj:

a $-3.53 + 2.71$ **b** $-41.5 + 20.7$ **c** $32.5 - 53.28$
d $0.283 - 1$ **e** $1.429 - 3$ **f** $-48.25 + 25.782$.

57. Izračunaj:

a $2.35 + (18.5 - 4.81)$ **b** $35.7 - (2.71 + 4.99)$
c $47.38 - (32.3 - 17.9)$ **d** $50 - (43.2 - 11.28)$.

58. Izračunaj:

a $(-2.73 + 1.52) + (1.5 - 7.8)$ **b** $(-3.78 - 4.52) - (2.5 - 1.8)$
c $2.78 - (3.5 + (4.83 - 1.02))$ **d** $-4 - (2.8 - (4.1 - 2.53))$.

59. Izračunaj:

a $5.82 \cdot 4$ **b** $3.841 \cdot 5$ **c** $12.11 \cdot 8$ **d** $12.73 \cdot 15$
e $1.05 \cdot 4.3$ **f** $2.85 \cdot 1.73$ **g** $(-1.35) \cdot 1.8$ **h** $(-23.1) \cdot (-9.2)$.

60. Izračunaj:

a $125 : 10$ **b** $147 : 100$ **c** $38 : 1000$ **d** $327 : 1000$.

61. Izračunaj:

a $12.51 : 4$ **b** $13.71 : 2$ **c** $0.225 : 9$ **d** $43.2 : 36$
e $0.256 : 0.16$ **f** $3.43 : 0.07$ **g** $1 : 0.001$ **h** $4.05 : 0.09$.

62. Izračunaj:

a $2.5 \cdot 4.1 + 5.9$ **b** $1.1 + 9.9 \cdot 0.1$ **c** $9.75 - 0.75 \cdot 4$

d $8.71 - 1.71 \cdot 2$ **e** $4.5 : 0.5 + 2.7$ **f** $3.9 - 0.88 : 1.1$.

63. Izračunaj:

a $\frac{3}{4} + 0.33$ **b** $\frac{5}{8} - 2 \cdot 0.17$ **c** $\frac{22}{3} - 2.7 \cdot \frac{31}{3}$ **d** $\dfrac{\frac{7}{8} : 0.125 + 14}{2 - 2.03}$

e $\dfrac{0.25 - 5 \cdot \frac{3}{7}}{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}}$ **f** $\dfrac{9.05 + 0.03 \cdot 65}{0.4\left(2.5 - 4\frac{1}{3}\right)}$ **g** $1 + \dfrac{\frac{12}{5} - 0.12}{0.75 + \frac{1}{6}}$ **h** $2 - \dfrac{3\left(\frac{2}{3} - 0.2\right)}{8.6 - 0.6 \cdot 2}$

i $\dfrac{\frac{13}{21} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right) : \frac{18}{13} - 0.15}{\left(\frac{1}{3} + 0.5\right) : \frac{5}{2} + 0.2}$ **j** $\dfrac{3 - \frac{15}{22} \cdot \left(2 + \frac{1}{5}\right)}{\left(\frac{5}{6} + \frac{7}{10} - \frac{11}{15}\right) \cdot 1.875 + \frac{1}{4}}$.

1.4. Skup realnih brojeva

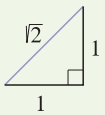
U sljedećem primjeru pokazat ćemo da postoje brojevi koji nisu racionalni, tj. koji nisu prikazivi u obliku razlomka

$$\frac{a}{b}, \quad a, \quad b \in \mathbf{Z}, \quad b \neq 0.$$

PRIMJER 1.

Promotrimo pravokutni trokut s katetama duljine 1. Prema Pitagorinom poučku za duljinu c hipotenuze tog trokuta vrijedi

$$c^2 = 1^2 + 1^2, \qquad c^2 = 2.$$



Broj za koji vrijedi da kvadriran daje 2 označavamo s $\sqrt{2}$. Očito je da $\sqrt{2}$ postoji, jer je to duljina hipotenuze promatranog pravokutnog trokuta. Pokazat ćemo da $\sqrt{2}$ nije racionalni broj.

Dokaz se provodi "metodom kontradikcije". Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da je broj $\sqrt{2}$ racionalni broj, tj. da je

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}, \quad a \in \mathbf{N}, \ b \in \mathbf{N},$$

gdje su a i b relativno prosti brojevi, odnosno $\frac{a}{b}$ je do kraja skraćen razlomak.

Za $\sqrt{2}$ vrijedi da kvadriran daje 2, tj.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2, \quad \frac{a^2}{b^2} = 2, \quad \text{tj.} \quad a^2 = 2b^2.$$

Broj na desnoj strani je paran, te je stoga i broj a^2 na lijevoj strani jednakosti paran, a to se može dogoditi samo ako broj a ima u svojoj faktorizaciji broj 2, tj. ako je $a = 2m$. Sada iz $a^2 = 2b^2$ dobivamo $4m^2 = 2b^2$, tj. $2m^2 = b^2$. Na lijevoj strani je paran broj, pa je i b^2 paran, tj. b u rastavu na proste faktore ima broj 2, tj. $b = 2n$. No, sada su i a i b djeljivi s 2, tj. razlomak $\frac{a}{b}$ nije do kraja skraćen što je u suprotnosti s pretpostavkom da smo promatrali do kraja skraćen razlomak $\frac{a}{b}$. Kažemo da smo došli u kontradikciju s početnom pretpostavkom. Znači, pretpostavka "$\sqrt{2}$ je racionalni broj" vodi do činjenice koja je u suprotnosti s postavljenim pretpostavkama, te stoga pretpostavku da je $\sqrt{2}$ racionalan odbacujemo kao neistinitu. Dakle, $\sqrt{2}$ nije racionalan.

Znači, postoje brojevi koji nisu racionalni, tj. koji se ne mogu zapisati u obliku $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbf{Z}$, $b \neq 0$. Sve takve brojeve zovemo **iracionalni brojevi**, a njihov skup označavamo s $\mathbf{I}$.

Skup koji sadrži sve racionalne i sve iracionalne brojeve nazivamo **skup realnih brojeva** i označavamo ga s $\mathbf{R}$.

Iracionalni brojevi

Svi brojevi koji nisu racionalni nazivaju se **iracionalni**.

Skup R

Skup realnih brojeva $\mathbf{R}$ je skup koji sadrži sve racionalne i sve iracionalne brojeve, tj.

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}.$$

Iracionalni brojevi imaju decimalni zapis koji je beskonačan i neperiodičan. Zato iracionalan broj prikazujemo njegovim aproksimacijama, tj. racionalnim brojevima koji se "vrlo malo" razlikuju od danog iracionalnog broja.

U sljedećem primjeru opisan je postupak pronalaženja aproksimacija iracionalnih brojeva $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$.

PRIMJER 2.

Izračunajmo prvih pet aproksimacija (približnih vrijednosti) broja $\sqrt{2}$.

$$\text{Iz } 1^2 < 2 < 2^2 \text{ slijedi } 1 < \sqrt{2} < 2.$$
$$\text{Iz } 1.4^2 < 2 < 1.5^2 \text{ slijedi } 1.4 < \sqrt{2} < 1.5.$$
$$\text{Iz } 1.41^2 < 2 < 1.42^2 \text{ slijedi } 1.41 < \sqrt{2} < 1.42.$$
$$\text{Iz } 1.414^2 < 2 < 1.415^2 \text{ slijedi } 1.414 < \sqrt{2} < 1.415.$$
$$\text{Iz } 1.4142^2 < 2 < 1.4143^2 \text{ slijedi } 1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143.$$

Brojevi 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142 su aproksimacije odozdo broja $\sqrt{2}$, a brojevi 2, 1.5, 1.42, 1.415, 1.4143 su aproksimacije odozgo broja $\sqrt{2}$.

Poznajemo još jedan istaknuti iracionalan broj koji smo u sedmom razredu definirali kao omjer duljine kružnice i njenog promjera. To je, naravno, broj π (pi). Neke njegove aproksimacije odozdo su 3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159 itd. Primijetimo da nam i računalo daje samo aproksimacije iracionalnog broja, a ne i njegov stvarni decimalni oblik.

ZADATCI 1.4.

1. Koristeći se aproksimacijama $\sqrt{2} = 1.41$, $\sqrt{3} = 1.73$, izračunaj približne vrijednosti brojevnih izraza:

a $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ **b** $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ **c** $2\sqrt{2}$

d $3\sqrt{2} + \sqrt{3}$ **e** $4\sqrt{2} : 5$ **f** $8\sqrt{3} : 10$.

2. Koristeći se aproksimacijom $\pi = 3.14$, izračunaj:

a 2π **b** 10π **c** $25\pi - 7.1$

d $4.1\pi + 2.81$ **e** $\frac{1}{2}\pi$ **f** $-8.2\pi + 12\pi$.

3. Odredi koji su racionalni od ovih brojeva, a koji iracionalni:

a $14\,537$ **b** 123.7 **c** $2\sqrt{3} + 18$

d $1.234567891011\ldots$ **e** $0.7\dot{2}\dot{3}$ **f** $\sqrt{13} - \sqrt{13}$

g π **h** $-123.4\dot{5}7\dot{8}$ **i** $\frac{1}{2} \cdot 2.\dot{4}$.

4. Uz pomoć kalkulatora pronađi točnu tvrdnju:

a $\pi = 3.14$ **b** $\pi < 3.14$ **c** $\pi > 3.14$ **d** nema odgovora.

5. Upotrebom kalkulatora pronađi točnu tvrdnju:

a $\sqrt{3} = 1.73$ **b** $\sqrt{3} < 1.73$ **c** $\sqrt{3} > 1.73$ **d** nema odgovora.

6. Koji su od zadanih brojeva iracionalni?

a $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ **b** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **d** $\frac{0}{\sqrt{2}}$.

7. Koji su od navedenih brojeva racionalni?

a π **b** 3.14 **c** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **d** $-\frac{2}{3}$.

8. Zaokruži netočan iskaz:

a $7 \in \mathbf{N}$ **b** $0 \in \mathbf{Z}$ **c** $\sqrt{3} \in \mathbf{N}$ **d** $\sqrt{3} \in \mathbf{I}$.

9. Koji su od navedenih brojeva iracionalni?

a $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **b** $-\frac{3}{5}$ **c** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **d** 0.

10. Koji od navedenih izraza ima vrijednost 0?

a $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}$ **b** $-\sqrt{5} + \sqrt{5}$ **c** $2\sqrt{5} - 5\sqrt{2}$ **d** $3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - \sqrt{5}$.

11. Koji od navedenih izraza ima najmanju vrijednost?

a $-\sqrt{2}$ **b** -1.41 **c** -1.414 **d** -1.4142.

12. Kojem skupu pripada broj π?

a **N** **b** **Z** **c** **Q** **d** **I**.

13. Izračunaj prve četiri aproksimacije odozdo i odozgo za brojeve:

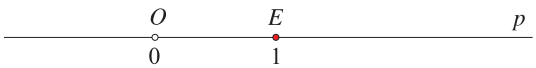
a $\sqrt{5}$ **b** $\sqrt{6}$ **c** $\sqrt{7}$ **d** $\sqrt{8}$.

14. Dokaži da broj $\sqrt{3}$ nije racionalan.

15. Dokaži da je broj $\sqrt{5}$ iracionalan.

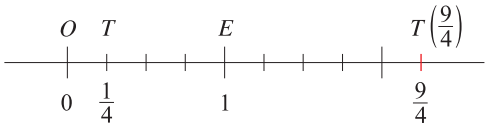
1.5. Brojevni pravac

Prvo ćemo opisati kako na brojevni pravac smjestiti racionalne brojeve. U drugom smo potpoglavlju opisali brojevni pravac i smještavali smo cijele brojeve na njega, a sad ćemo svakom racionalnom broju pridružiti jednu točku pravca.



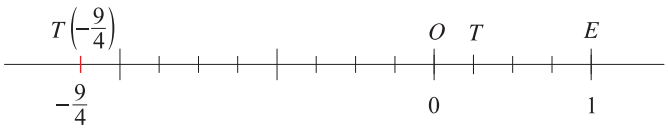
Točku O zovemo ishodište, a E jedinična točka. Dužinu $\overline{OE}$ nazivamo jedinična dužina.

1. Ako je $r = \frac{a}{b}$ pozitivan racionalan broj (a, $b \in \mathbf{N}$), tada dužinu $\overline{OE}$ podijelimo na b jednakih dijelova. Dužinu $\frac{1}{b}\overline{OE}$ nanesimo a puta počevši od točke O udesno. Dobivena točka je točka koju pridružujemo broju $\frac{a}{b}$ i označavamo s $T\left(\frac{a}{b}\right)$.



Broju $\frac{9}{4}$ pridružujemo točku $T\left(\frac{9}{4}\right)$ tako da $\overline{OE}$ podijelimo na 4 jednaka dijela, te dužinu $\overline{OT} = \frac{1}{4}\overline{OE}$ nanesemo 9 puta udesno od O. Točku $T\left(\frac{9}{4}\right)$ možemo naći i ovako: budući da je $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$, nakon točke pridružene broju 2 nanesemo dužinu $\overline{OT} = \frac{1}{4}\overline{OE}$.

2. Ako je $r = \frac{a}{b} < 0$, tj. $a < 0$, $b > 0$, tada opet dužinu $\overline{OE}$ podijelimo na b jednakih dijelova, te dužinu $\frac{1}{b}\overline{OE}$ nanesemo $|a|$ puta ulijevo od točke O. Dobivenu točku pridružujemo broju $\frac{a}{b}$ i označavamo s $T\left(\frac{a}{b}\right)$.

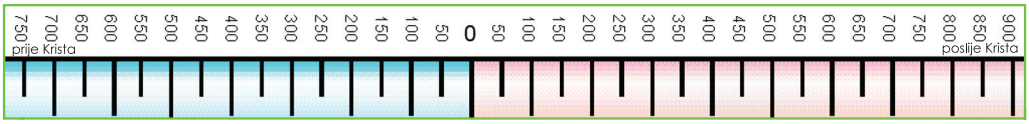


Točku $T\left(-\frac{9}{4}\right)$ *nalazimo tako da* $\overline{OE}$ *podijelimo na 4 jednaka dijela, te dužinu* $\overline{OT} = \frac{1}{4}\overline{OE}$ *nanesemo 9 puta ulijevo od* O.

Naravno, ukoliko je r cijeli broj, ovaj postupak se pojednostavljuje, jer nije potrebno jediničnu dužinu $\overline{OE}$ dijeliti na dijelove, nego je nanosimo udesno ili ulijevo, ovisno o tome je li r pozitivan ili negativan broj.

No, kao što smo vidjeli postoje i brojevi koji nisu racionalni, tj. iracionalni su. Racionalni i iracionalni brojevi zajedno čine skup realnih brojeva. Svakom je realnom broju pridružena jedna točka pravca p. I obratno, svakoj je točki pravca pridružen jedan realni broj.

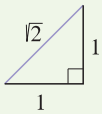
Ako je x pozitivan realan broj, tada njemu pridružena točka $T(x)$ je udaljena od ishodišta O za x mjernih jedinica i nalazi se s iste strane točke O kao i jedinična točka. Mjerna jedinica je, naravno, jedinična dužina tog pravca. Ako je x negativan, tada je $|OT(x)| = -x$ i $T(x)$ i E se nalaze na različitim stranama s obzirom na točku O.



PRIMJER 1.

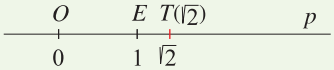
Brojevima $\sqrt{2}$ i $\sqrt{5}$ pridružimo točke brojevnog pravca p.

Uočimo jednakokračni pravokutni trokut s katetom duljine 1. Prema Pitagorinom poučku, duljina hipotenuze je



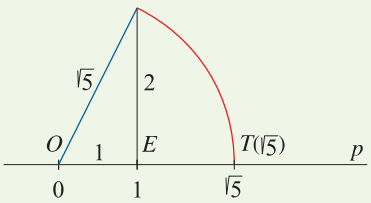
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Sada na pravac p nanesemo tu hipotenuzu udesno od ishodišta O i dobivamo točku $T(\sqrt{2})$ kojoj je pridružen broj $\sqrt{2}$.



Udaljenost od ishodišta O *do točke* $T(\sqrt{2})$ *je* $\sqrt{2}$.

Za konstrukciju broja $\sqrt{5}$ koristimo pravokutni trokut s katetama 2 i 1 čija hipotenuza ima duljinu $\sqrt{5}$ koju zatim nanesemo na brojevni pravac p.



Udaljenost točaka O *i* $T(\sqrt{5})$ *je* $\sqrt{5}$.

ZADATCI 1.5.

1. Nacrtaj brojevni pravac s jediničnom dužinom $\overline{OE}$, $|OE| = 8$ mm. Odredi točke koje su pridružene brojevima:

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ -3,\ -5,\ -7.$$

2. Nacrtaj brojevni pravac s jediničnom dužinom $\overline{OE}$, $|OE| = 4$ cm i odredi točke pridružene brojevima:

$$\frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{2},\ -\frac{3}{2},\ -\frac{3}{4},\ -\frac{7}{4}.$$

3. Nacrtaj brojevni pravac s jediničnom dužinom $\overline{OE}$, $|OE| = 5$ cm. Odredi točke koje su pridružene brojevima:

$$\frac{1}{5},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{4}{3},\ \frac{5}{3}.$$

4. Nacrtaj brojevni pravac s jediničnom dužinom $\overline{OE}$, $|OE| = 4$ cm. Odredi točke koje su pridružene brojevima:

$$\frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{7}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{5}{3}.$$

5. Na brojevnom pravcu označena je točka O i točka $T(4)$. Nađi jediničnu točku E.

6. Na brojevnom pravcu označena je točka O i točka $T\left(\frac{1}{2}\right)$. Nađi jediničnu točku E.

7. Na brojevnom pravcu označena je točka O i točka $T\left(-\frac{4}{3}\right)$. Nađi jediničnu točku E.

8. Na brojevnom pravcu označene su točke $T(-2)$ i $T(4)$. Nađi ishodište O i jediničnu točku E.

9. Na brojevnom pravcu označene su točke $T\left(\frac{3}{2}\right)$ i $T\left(\frac{1}{3}\right)$. Nađi ishodište O i jediničnu točku E.

10. Na brojevni pravac smjesti točke pridružene brojevima:

a $\sqrt{3}$ **b** $\sqrt{17}$ **c** $\sqrt{15}$ **d** $\sqrt{8}$.

11. Na brojevni pravac smjesti točke pridružene brojevima:

a $\sqrt{2}-1$ **b** $\sqrt{2}+2$ **c** $\sqrt{2}+4$ **d** $-\sqrt{2}$

e $\sqrt{3}+2$ **f** $-\sqrt{3}$ **g** $2-\sqrt{3}$ **h** $4-\sqrt{3}$

i $-\sqrt{5}$ **j** $-\sqrt{5}+1.5$ **k** $3.2-\sqrt{5}$ **l** $-3-\sqrt{5}$.

12. Na brojevnom pravcu konstruiraj točke:

a $A_1(2\sqrt{2})$ **b** $A_2(-2\sqrt{2})$ **c** $A_3(3\sqrt{2})$

d $B_1(-2\sqrt{3})$ **e** $B_3(-3\sqrt{3})$ **f** $C_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)$.

13. Na brojevnom pravcu konstruiraj točke:

a $A_1(2\sqrt{2}-1)$ **b** $A_2\left(\frac{1}{2}+2\sqrt{2}\right)$ **c** $A_3\left(-\frac{4}{3}+\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)$

d $B_1\left(\frac{3}{4}\sqrt{3}+0.7\right)$ **e** $B_2\left(-\frac{1}{5}\sqrt{3}+1\right)$ **f** $B_3\left(\frac{1}{3}\sqrt{5}+\frac{2}{3}\right)$

g $C_1(-\sqrt{2}-\sqrt{3})$ **h** $C_2(2\sqrt{5}-4\sqrt{2})$ **i** $C_3(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})$.

14. Na pravcu p označene su točke $E(1)$ i $A(5)$. Konstruiraj točku $O(0)$, a zatim odredi točke pridružene brojevima $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ i $-\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

15. Na pravcu p označene su točke $O(0)$ i $A(\sqrt{2})$. Konstruiraj točku $E(1)$, a zatim na taj brojevni pravac smjesti točke $B(-2\sqrt{2}-0.5)$ i $C\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)$.

16. Koje su točke na brojevnom pravcu udaljene za:

a 7 **b** 3.2 **c** 0

od ishodišta?

17. Odredi koordinate točaka koje su od ishodišne točke O udaljene onoliko koliko je točka $T(-12)$ udaljena od jedinične točke.

18. Odredi koordinate točaka koje su od jedinične točke E udaljene onoliko koliko je točka $T(\sqrt{3})$ udaljena od ishodišta.

1.6. Osnovna svojstva zbrajanja i množenja realnih brojeva

Na skupu realnih brojeva definiramo operacije **zbrajanje i množenje realnih brojeva** koje proširuju nama već dobro poznate operacije zbrajanja i množenja racionalnih brojeva.

Te operacije imaju sljedeća svojstva:

Svojstva zbrajanja realnih brojeva

1. Asocijativnost
Za sve $x, y, z \in \mathbf{R}$ vrijedi $(x+y)+z = x+(y+z)$.

2. Komutativnost
Za sve $x, y \in \mathbf{R}$ vrijedi $x+y = y+x$.

3. Postojanje nule
Postoji samo jedan realan broj, označavamo ga s 0, takav da je $x+0 = x$ za svaki $x \in \mathbf{R}$.

4. Postojanje suprotnog elementa
Za svaki realan broj x postoji samo jedan realan broj, označimo ga s $-x$, takav da je $x+(-x) = 0$.

Svojstva množenja realnih brojeva

1. Asocijativnost
Za sve $x, y, z \in \mathbf{R}$ vrijedi $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

2. Komutativnost
Za sve $x, y \in \mathbf{R}$ vrijedi $x \cdot y = y \cdot x$.

3. Postojanje jediničnog elementa
Postoji jedan i samo jedan realan broj, označavamo ga s 1, takav da je $x \cdot 1 = x$ za svaki $x \in \mathbf{R}$.

4. Postojanje inverza
Za svaki realan broj x različit od 0 postoji jedan i samo jedan realan broj, označimo ga s x^{-1}, takav da je $x \cdot x^{-1} = 1$. Broj x^{-1} zovemo **inverz** ili **recipročni broj** broja x.

5. Distributivnost množenja prema zbrajanju
Za sve $x, y, z \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Napomenimo da oduzimanje realnih brojeva svodimo na zbrajanje, tj. razlika $x - y$ je isto što i zbroj $x + (-y)$, a dijeljenje svodimo na množenje, tj. kvocijent $\frac{x}{y}$ ili $x : y$ je isto što i produkt $x \cdot y^{-1}$.

PRIMJER 1.

Izračunajmo koristeći svojstva zbrajanja i množenja realnih brojeva:

a) $8\sqrt{2} - 16\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$ **b)** $7(\sqrt{3} - 2\pi) - 2(\pi + 4\sqrt{3})$.

a)

$$\begin{aligned}
8\sqrt{2} - 16\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + 3\sqrt{5} &= 8\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - 16\sqrt{5} + 3\sqrt{5} \\
&\quad \text{(komutativnost zbrajanja)} \\
&= \sqrt{2}\left(8 + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{5}(-16 + 3) \\
&\quad \text{(komutativnost množenja i distributivnost)} \\
&= \sqrt{2} \cdot \frac{17}{2} + \sqrt{5} \cdot (-13) \\
&= \frac{17}{2}\sqrt{2} - 13\sqrt{5} \quad \text{(komutativnost množenja).}
\end{aligned}$$

Želimo li izračunati približnu vrijednost tog broja upotrijebit ćemo aproksimacije brojeva $\sqrt{2}$ i $\sqrt{5}$. Primjerice uzmemo li $\sqrt{2} \approx 1.41$, $\sqrt{5} \approx 2.23$, dobivamo da je $\frac{17}{2}\sqrt{2} - 13\sqrt{5} \approx -17.005$.

Ukoliko koristimo džepno računalo, aproksimacije brojeva $\sqrt{2}$ i $\sqrt{5}$ dane su na više decimalnih mjesta (8, 10, 12 i više ovisno o vrsti računala), pa će i rezultat dobiven računalom biti bolja aproksimacija od prethodno dane s tri decimalna mjesta.

b) $7(\sqrt{3} - 2\pi) - 2(\pi + 4\sqrt{3}) = 7\sqrt{3} - 14\pi - 2\pi - 8\sqrt{3} = -\sqrt{3} - 16\pi$.

PRIMJER 2.

Koristeći svojstva računskih operacija, pojednostavnimo ove algebarske izraze:

a) $2(2(2(x-4)+4)+4)+4$ **b)** $a^2-3ab+2-(a-2b)(3a+b)$.

a) Primijenit ćemo distributivnost množenja prema zbrajanju počevši od unutarnje zagrade:

$$\begin{aligned}2(2(2(x-4)+4)+4)+4 &= 2(2(2x-8+4)+4)+4\\ &= 2(2(2x-4)+4)+4\\ &= 2(4x-8+4)+4\\ &= 2(4x-4)+4\\ &= 8x-8+4\\ &= 8x-4.\end{aligned}$$

b) Množenje je operacija višeg stupnja pa ćemo upotrebom distributivnosti prvo izvesti množenje izraza u zagradi:

$$\begin{aligned}a^2-3ab+2-(a-2b)(3a+b) &= a^2-3ab+2-(3a^2+ab-6ab-2b^2)\\ &= a^2-3ab+2-3a^2+5ab+2b^2\\ &= -2a^2+2b^2+2ab+2.\end{aligned}$$

PRIMJER 3.

Koristeći se svojstvom distributivnosti množenja prema zbrajanju, napišimo dane izraze u obliku produkta, tj. rastavimo na faktore:

a) $12a^2+24b^2-30ab$ **b)** $3(x+4)-x(x+4)$.

a) $12a^2+24b^2-30ab=6(2a^2+4b^2-5ab)$. Naravno da smo mogli ovaj izraz napisati i u obliku ovakvog produkta: $\frac{1}{2}(24a^2+48b^2-60ab)$, ali je uobičajeno da se iz brojeva izlučuje najveći mogući cjelobrojni faktor tako da u zagradi ostanu također cjelobrojni koeficijenti.

b) $3(x+4)-x(x+4)=(x+4)(3-x)$.

PRIMJER 4.

Odgovarajućim grupiranjem pribrojnika rastavimo na faktore ove algebarske izraze:

a) a^3+2a^2+a+2 **b)** $x^2-9x-52$.

a) $a^3+2a^2+a+2=(a^3+2a^2)+(a+2)=a^2(a+2)+1\cdot(a+2)=(a+2)(a^2+1)$.

b) Pribrojnik $-9x$ napišimo u odgovarajućem obliku i zatim grupirajmo pribrojnike:

$$\begin{aligned}x^2-9x-52 &= x^2+4x-13x-52=(x^2+4x)-(13x+52)\\ &= x(x+4)-13(x+4)=(x+4)(x-13).\end{aligned}$$

Uočimo da smo -9 napisali kao zbroj dva broja 4 i -13 čiji produkt je upravo -52.

ZADATCI 1.6.

1. Izračunaj:

a $8\sqrt{3} - 18\sqrt{6} + 14\sqrt{3} + 4\sqrt{6}$

b $\frac{1}{2}\sqrt{17} - \frac{3}{4}\sqrt{101} + \frac{22}{3}\sqrt{17}$

c $3(\sqrt{11} - \pi) + 14(2\pi - \sqrt{11})$

d $18 - 18 \cdot (\pi - 1)$

e $\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 3) - \frac{1}{4}(2 - 3\sqrt{2})$

f $4 - 4(4 - 4(4 - \pi))$

g $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 3\sqrt{2}\right) + \sqrt{2}$

h $1 - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\right)$.

2. Pojednostavni:

a $14ab + 8ab - 4ab + 7ab$

b $23x^2y - 18x^2y + 12yx^2$

c $\frac{3}{2}xy - \frac{1}{4}xy + \frac{2}{3}xy$

d $\frac{2}{3}ax - \frac{8}{5}a + \frac{14}{5}ax + \frac{11}{3}a$

e $9ax^2 - \frac{11}{4}ax + \frac{18}{5}ax^2 - \frac{28}{9}ax$

f $\frac{3}{2}xy - \frac{4}{5}x^2y + \frac{2}{3}xy + 3x^2y$

g $(a + b) - (3a + 2b)$

h $(x^2y - xy) - (x^2y + 8xy)$

i $x - (x + 3) - (x - 7)$

j $18 + 2a - (8a - 7b) - 7b$

k $3(x + 1) + 4(x - 2)$

l $8(a - 7) - 3(14 - a)$

m $x(2x + 1) + 8(2x - 7)$

n $a(3 - a) - 5(2a + 3)$

o $3(3(3(3x - 9) - 9) - 9) + 27$

p $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - 1\right)\right)$.

3. Koristeći svojstva operacija množenja i zbrajanja, pojednostavni izraz:

a $(x + 2)(x - 3)$

b $(2 - 3x)(3 + 2x)$

c $1 - (x - 1)(2 - x)$

d $5x - (3 - x)(x + 1)$

e $10x - 2 - 2x(x + 4)$

f $(x + 2)(x - 4) - (x + 4)(x - 2)$

g $1 - (x + 1)(x^2 - x + 1)$

h $(x + 2y + 3z)(x - 2y + 3z)$.

4. Koristeći distributivnost množenja prema zbrajanju, rastavi na faktore:

a $2x + 2y$

b $3x - 3y^2$

c $12x + 30y$

d $2ab + 4a$

e $9a^2b - 15ab^2$

f $81ab + 21a^2$

g $2a^2 + 2a$

h $x^2 - x$

i $a^2b + ab$

j $4 + 8a + 18b$

k $2x + 6xy - 8x^2$

l $ax + bx + cx$

m $ax - ay + 2az$

n $2x - 4ax + 8a^2x$

o $axy - axz + a^2x$

p $x^3 - x^2$

r $a^3b - a^3$

s $a^2b + ab^2$

t $3a^2 + 6ab$

u $18a^2b - 36ab^2$

v $5a^3b - 10a^2b$.

5. Rastavi na faktore:

a $2(x+3)+x(x+3)$ **b** $a(a+2)-3(a+2)$ **c** $a(x+y)+b(x+y)$

d $5(x-2)-y(x-2)$ **e** $x(x-1)+x-1$ **f** $y(y+3)-y-3$.

6. Rastavi na faktore prikladnim grupiranjem:

a $ax+ay+bx+by$ **b** $ax-ay+bx-by$ **c** $ac-ad+bd-bc$

d $ax+ay-bx-by$ **e** a^3+a^2+a+1 **f** $a^2b-ab+a-1$.

7. Rastavi na faktore:

a $a^4+a^3+a^2+a$ **b** $a^4-a^3+a^2-a$

c $a^5-a^4-2a^2+2a$ **d** $a^5b-a^4b-a^3b^2+a^2b^2$.

8. Rastavi na faktore:

a $3(x-y)^2+(x-y)$ **b** $a(a+b)^2-(a+b)$ **c** $a(x+y)^2+2x+2y$

d $(a+b)^2-a-b$ **e** $(x-y)^2-x+y$ **f** $(a+2)^3-2(a+2)^2$.

9. Rastavi na faktore trinome:

a a^2+5a+6 **b** a^2-5a+6 **c** x^2-4x+3

d x^2+4x+3 **e** x^2+x-2 **f** x^2+x-6

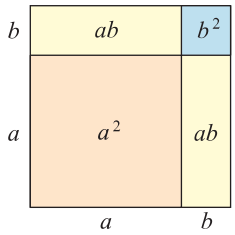
g $x^2+2x-15$ **h** x^2+x-30 **i** $(x+1)^2-5(x+1)+6$.

1.7. Kvadrat i kub binoma

Neki se izrazi često pojavljuju pri radu s algebarskim izrazima, bilo pri reduciranju, bilo pri rastavljanju na faktore, te ih stoga treba zapamtiti.

Promotrimo kvadrat binoma $a+b$. Koristeći definiciju kvadrata i svojstva množenja i zbrajanja, dobivamo:

$$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a^2+ba+ab+b^2$$
$$=a^2+2ab+b^2.$$



Dakle, kvadrat zbroja $a+b$ je zbroj kvadrata prvog člana, dvostrukog produkta prvog i drugog člana i kvadrata drugog člana.

Uobičajeno je pamtiti i formulu za kvadrat razlike $a-b$:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

koja slijedi iz prethodne ako umjesto b uvrstimo $-b$.

Kvadrat binoma

Za sve a, $b\in\mathbf{R}$ vrijedi

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2.$$

PRIMJER 1.

Izračunajmo $4(x+2)^2 - 11(3-2x)^2$.

$4(x+2)^2-11(3-2x)^2 = 4(x^2+4x+4)-11(9-12x+4x^2) = 4x^2+16x+16-99+132x-44x^2 = -40x^2+148x-83$.

PRIMJER 2.

Rastavimo na faktore $9a^2+42abc+49b^2c^2$.

Uspoređujući zadani izraz i formulu za kvadrat zbroja, uočavamo da dani izraz možemo pisati ovako: $9a^2+42abc+49b^2c^2 = (3a)^2+2\cdot 3a\cdot 7bc+(7bc)^2 = (3a+7bc)^2$ čime je dani izraz rastavljen na faktore.

Na sličan način se izvodi formula za kub binoma. Vrijedi

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2\cdot(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2ab^2+b^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

Ako umjesto b uvrstimo $-b$, dobit ćemo

$$(a-b)^3 = a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

Kub binoma

Za sve $a,\ b\in\mathbf{R}$ vrijedi

$$(a\pm b)^3 = a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3.$$

PRIMJER 3.

Izračunajmo $(2x-y)^3-(x+2y)^3$.

$(2x-y)^3-(x+2y)^3 = (2x)^3-3(2x)^2y+3\cdot 2xy^2-y^3-(x^3+3x^2 2y+3x(2y)^2+(2y)^3) = 8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3-x^3-6x^2y-12xy^2-8y^3 = 7x^3-18x^2y-6xy^2-9y^3$.

PRIMJER 4.

Pojednostavnimo $(x+1)^3-3(x+1)^2(x-1)+3(x+1)(x-1)^2-(x-1)^3$.

Mogli bismo svaku zagradu raspisati, te nakon toga zbrojiti izraze, međutim uočimo da je dani izraz upravo kub razlike pri čemu je prvi član $(x+1)$, a drugi $(x-1)$, pa je dani izraz jednak

$$((x+1)-(x-1))^3 = (x+1-x+1)^3 = 2^3 = 8.$$

ZADATCI 1.7.

1. Koristeći formulu za kvadrat zbroja, izračunaj:

a $(2+x)^2$ **b** $(12+a)^2$ **c** $(3a+b)^2$

d $(4a+5b)^2$ **e** $(a+7b)^2$ **f** $(2x+3y)^2$.

2. Koristeći formulu za kvadrat razlike, izračunaj:

a $(3-x)^2$ **b** $(a-5)^2$ **c** $(2a-b)^2$

d $(4a-3b)^2$ **e** $(8a-10x)^2$ **f** $(12x-11y)^2$.

3. Kvadriraj zadane binome:

a $\left(\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b\right)^2$ **b** $\left(\frac{4}{7}x+\frac{14}{3}y\right)^2$ **c** $(-7x+2y)^2$

d $(-2x-5y)^2$ **e** $\left(-\frac{1}{2}x-\frac{2}{5}y\right)^2$ **f** $\left(m-\frac{1}{3}n\right)^2$.

4. Pojednostavni:

a $\frac{1}{2}(a+2)^2-2\left(\frac{1}{2}-a\right)^2$ **b** $(a+4)^2-(2a-1)(a+1)$

c $(x-y)(2x-3y)-(2x-5y)^2$ **d** $2(x+2y)^2-(x+1)(y-x)$

e $(a+b)^2-2(a-b)^2-(a+2b)(2a+b)$ **f** $(2x-y)^2+2(x+2y)^2-5(x-y)^2$.

5. Dane izraze napiši u obliku kvadrata binoma:

a $x^2+2xy+y^2$ **b** x^2+4x+4 **c** $x^2y^2-6xy+9$

d $4x^2+12xy+9y^2$ **e** $25a^2+9b^2-30ab$ **f** $-40xy+100x^2+4y^2$.

6. Dopuni izraz tako da predstavlja potpuni kvadrat binoma:

a x^2+2x+ _____ **b** y^2+4y+ _____ **c** $4a^2+16ab+$ _____

d x^2+7xy+ _____ **e** $9a^2-$ _____ $+16b^2$ **f** $25-$ _____ $+x^2$.

7. Rastavi na faktore:

a $2x^2+4x+2$ **b** $8y^2+32y+32$ **c** $ax^2+6ax+9a$

d $a^4-20a^3b+100a^2b^2$ **e** $-x^2-2xy-y^2$ **f** $12xy-2x^2-18y^2$

g x^4+2x^2+1 **h** $4x^4-4x^2+1$ **i** $a^2b^2-6abx^2+9x^4$

j a^8+8a^4+16 **k** $a^6+2a^4+a^2$ **l** $a^6-18a^5b+81a^4b^2$.

8. Kubiraj dane binome:

a $(x+y)^3$ **b** $(1+x)^3$ **c** $(x-1)^3$

d $(a-2)^3$ **e** $(a+2b)^3$ **f** $(a-3b)^3$.

9. Pojednostavni:

a $(x+1)^3-(x-1)^3$ **b** $(2x-1)^3+(2x+1)^3$

c $3(a-b)^3+2(a+b)^3-5(a^3-b^3)$ **d** $(x-2)^3-2(x+1)^2-(x^3-1)$.

10. Dane izraze napiši u obliku kuba binoma:

a $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

b $8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$

c $27a^3 + 54a^2b + 36ab^2 + 8b^3$

d $a^3 - \frac{3}{2}a^2b + \frac{3}{4}ab^2 - \frac{1}{8}b^3$.

11. Ako se stranice kvadrata smanje za 3 cm, dobiva se kvadrat čija je površina $141\ \text{cm}^2$ manja od površine početnog kvadrata. Kolika je duljina stranice početnog kvadrata?

1.8. Razlika kvadrata

Još jedna formula ima važno mjesto u reduciranju, odnosno faktoriziranju izraza. To je tzv. **formula za razliku kvadrata**.

Naime, lako se dobije ovo:

$$(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2,$$

tj. razlika kvadrata brojeva a i b jednaka je produktu njihove razlike i sume.

Razlika kvadrata

Za sve $a,\ b \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2.$$

PRIMJER 1.

Reducirajmo izraz $(5+x)(25+x^2)(5-x)$.

$$\begin{aligned}(5+x)(25+x^2)(5-x) &= (5+x)(5-x)(25+x^2)\\ &= (25-x^2)(25+x^2) = 625 - x^4,\end{aligned}$$

pri čemu smo dva puta primijenili formulu za razliku kvadrata.

PRIMJER 2.

Rastavimo na faktore $9(2x-3)^2 - 16(x+4)^2$.

$9(2x-3)^2 - 16(x+4)^2$ je razlika kvadrata izraza $3(2x-3)$ i $4(x+4)$ pa vrijedi:

$$\begin{aligned}9(2x-3)^2 - 16(x+4)^2 &= \Big(3(2x-3) + 4(x+4)\Big)\cdot\Big(3(2x-3) - 4(x+4)\Big)\\ &= (6x - 9 + 4x + 16)(6x - 9 - 4x - 16)\\ &= (10x+7)(2x-25).\end{aligned}$$

ZADATCI 1.8.

1. Koristeći formulu za razliku kvadrata, rastavi na faktore:

a $m^2 - n^2$ **b** $9 - x^2$ **c** $16 - y^2$

d $25x^2 - 1$ **e** $9x^2 - 1$ **f** $1 - 16a^2$

g $a^2 - 81$ **h** $a^2 - 9b^2$ **i** $16a^2 - 25b^2$

j $100a^2 - 121b^2$ **k** $\frac{1}{4} - 9x^2$ **l** $\frac{81}{25}m^2 - \frac{16}{9}n^2$.

2. Rastavi na faktore:

a $(a+b)^2 - 16$ **b** $100 - (a-1)^2$

c $(a+b)^2 - (a-b)^2$ **d** $(3a+2b)^2 - (4a-5b)^2$

e $\frac{1}{4}(2a+3b)^2 - a^2$ **f** $\frac{1}{100}(a+b)^2 - \frac{1}{16}(a-b)^2$.

3. Koristeći formulu za razliku kvadrata, izračunaj:

a $(x+1)(x-1)$ **b** $(a-2b)(a+2b)$

c $(x+3)^2 + 2(x-2)(x+2)$ **d** $2(a-3b)^2 - (3a+b)(3a-b)$

e $(a+b+c)(a+b-c)$ **f** $(x+y-1)(x+y+1)$.

4. Rastavi na faktore:

a $4x^2 - 4y^2$ **b** $3 - 27x^2$ **c** $5 - 20a^2$

d $7x^2 - 28y^2$ **e** $ab^2 - ac^2$ **f** $a^3 - ab^2$

g $abc - a^3bc$ **h** $a^3x - ax^3$ **i** $3(a+2)^2 - 27$.

5. Rastavi na faktore:

a $9(x-1)^2 - 9$ **b** $3(x+2)^2 - 27$ **c** $5 - 20(a+b)^2$

d $2(x+1)^2 - 18(2-x)^2$ **e** $a(x-y)^2 - a(x+2y)^2$ **f** $3a^2(2x-y)^2 - 3a^2(3x+2y)^2$.

6. Rastavi na faktore:

a $x^2 - y^2 + 2(x+y)$ **b** $a^2 - b^2 - 3(a-b)$ **c** $a^2 - b^2 - 2a - 2b$

d $x^2 - 1 + 9(x-1)$ **e** $a^2 - b^2 + ax - bx$ **f** $a^2 - b^2 - ax - bx$.

7. Rastavi na faktore:

a $(a^2+1)^2 - 4a^2$ **b** $(x^2+9)^2 - 36x^2$ **c** $(a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2$

d $(x^2+16y^2)^2 - 64x^2y^2$ **e** $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$ **f** $a^2 - (b^2+2b+1)$

g $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$ **h** $a^2+2ab+b^2-c^2-4c-4$ **i** $a(a+c) - b(b+c)$

j $a(a+b) - c(b+c)$ **k** $a(ax+cx) - b(bx-cx)$ **l** $x(ax-ay) - z(az+ay)$

m $a^2+b^2+2ab-c^2-d^2-2cd$ **n** $a^2-b^2-c^2+d^2-2ad-2bc$.

1.9. Razlika i zbroj kubova

Istaknimo i formule za zbroj i razliku kubova.

Zbroj i razlika kubova

Za sve $a,\ b \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Ove formule se lako dokazuju reduciranjem desne strane jednakosti. Primjerice imamo

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2 - ab + b^2) &= a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3\\ &= a^3 + b^3.\end{aligned}$$

Druga formula slijedi iz prve uvrštavanjem broja $-b$ umjesto b.

PRIMJER 1.

Rastavimo na faktore $64 - 27a^3$.

$64 - 27a^3 = 4^3 - (3a)^3 = (4-3a)(16 + 12a + 9a^2)$.

ZADATCI 1.9.

1. Koristeći formulu za razliku i zbroj kubova, pojednostavni:

a $(x-1)(x^2+x+1)$ **b** $(2+a)(4-2a+a^2)$

c $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$ **d** $(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)$

e $(1+a)(a^2-a+1)-(1-a)(a^2+a+1)$ **f** $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)-8a^3$.

2. Koristeći formulu za razliku i zbroj kubova, rastavi na faktore:

a p^3-1 **b** a^3-27 **c** x^3+8 **d** y^3+64

e $8x^3-1$ **f** $27y^3+1$ **g** x^3+27a^3 **h** $125x^3-8y^3$.

3. Rastavi na faktore:

a $2x^3+2$ **b** $4y^3-4$ **c** a^3b+27b **d** xy^3-x

e $x^2y^3+8x^2$ **f** $a^3b-125b^4$ **g** $54x^3-2$ **h** a^3b-bc^3.

4. Rastavi na faktore:

a $(x+1)^3-1$ **b** $(a+2)^3+1$ **c** $8-(y+2)^3$

d $27x^3-(2x-1)^3$ **e** $27(y+1)^3+1$ **f** $64(a+b)^3-27(a-b)^3$.

1.10. Djelitelji i višekratnici

U osnovnoj školi naučili smo kako odrediti djelitelje (mjere) brojeva. Tako je, primjerice, prirodni broj 15 djelitelj broja 60, jer broj 60 možemo pisati u obliku produkta broja 15 i još jednog cijelog broja, tj. $60 = 15 \cdot 4$. Lako se vidi da su svi prirodni djelitelji broja 60 sljedeći brojevi:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 12,\ 15,\ 20,\ 30 \text{ i } 60.$$

Promotrimo sada izraz $5a^2b$. To je algebarski izraz s dvije varijable a i b i koeficijentom 5. Ovakve izraze nazivamo **monomi**. Njega možemo zapisati u obliku produkta na razne načine: $1 \cdot 5a^2b$, $5 \cdot a^2b$, $a \cdot 5ab$, $b \cdot 5a^2$, $5a \cdot ab$ i $5b \cdot a^2$. Izrazi 1, 5, a, b, $5a$, $5b$, $5ab$, $5a^2$, a^2, ab, a^2b, $5a^2b$ su djelitelji ili mjere monoma $5a^2b$.

Prisjetimo se kako smo za dva ili više brojeva određivali najveći zajednički djelitelj ili najveću zajedničku mjeru te najmanji zajednički višekratnik.

PRIMJER 1.

Odredimo najveći zajednički djelitelj i najmanji zajednički višekratnik brojeva 288 i 360, tj. izračunajmo $D(288, 360)$ i $V(288, 360)$.

Rastavimo oba broja na proste faktore:

$$288 = 2 \cdot 144 = 2 \cdot 12 \cdot 12 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^5 \cdot 3^2,$$
$$360 = 10 \cdot 36 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Najveći zajednički djelitelj je umnožak svih prostih faktora koji su zajednički i jednom i drugom broju, tj.

$$D(288, 360) = 2^3 \cdot 3^2 = 72.$$

Višekratnik je broj koji je djeljiv s oba broja. Najmanji zajednički višekratnik jednak je produktu faktora koji se javljaju ili u jednom ili u drugom broju. U ovom slučaju

$$V(288, 360) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 = 1440.$$

Na sličan način se određuje i najveća zajednička mjera dva ili više algebarskih izraza.

PRIMJER 2.

Odredimo najveći zajednički djelitelj i najmanji zajednički višekratnik izraza

$$18a^3b^2(a^2 - b^2) \quad \text{i} \quad 24ab^3(a^2 + 2ab + b^2).$$

Prvo izraze rastavimo na faktore:

$$18a^3b^2(a^2 - b^2) = 2 \cdot 3^2 \cdot a^3b^2(a - b)(a + b),$$
$$24ab^3(a^2 + 2ab + b^2) = 2^3 \cdot 3 \cdot ab^3(a + b)^2.$$

Sad je $D(18a^3b^2(a^2 - b^2), 24ab^3(a^2 + 2ab + b^2)) = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b^2(a + b) = 6ab^2(a + b)$, pa je $V(18a^3b^2(a^2 - b^2), 24ab^3(a^2 + 2ab + b^2)) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot a^3 \cdot b^3(a - b)(a + b)^2 = 72a^3b^3(a - b)(a + b)^2$.

ZADATCI 1.10.

1. Odredi sve djelitelje danih brojeva:

a 18 **b** 39 **c** 49 **d** 510 **e** 1000 **f** 1001.

2. Odredi sve djelitelje danih algebarskih izraza:

a $2ab$ **b** $4x^2$ **c** a^2b **d** x^2y^2

e $ax + ab$ **f** $2a + 2b$ **g** $x^3 - x$ **h** $(x+3)^2$.

3. Odredi sve zajedničke mjere (djelitelje) brojeva:

a 12, 18 **b** 36, 60 **c** 30, 45, 75

d 10, 100, 1000 **e** 1, 13, 18 **f** 66, 666, 6666.

4. Odredi sve zajedničke djelitelje izraza:

a $2a^3$, $12a^2$ **b** $8x^2$, $16x$ **c** $3ax$, $9a^2x$

d abc, abd **e** $2ab$, $6ac$ **f** $4xy$, $8x^2y^2$, $10xz$.

5. Izračunaj najveći zajednički djelitelj brojeva i izraza:

a $24xy$, $36x^2y^2$ **b** $10a^2x^3$, $5a^3x^2$ **c** $a^2 - b^2$, $(a+b)^2$

d $(a-b)^3$, $(a-b)^2$ **e** $y^2 - 1$, $y^2 + 2y + 1$ **f** $4a + 4$, $8a^2 + 16a + 8$.

6. Izračunaj najmanji zajednički višekratnik danih brojeva:

a 12, 18 **b** 10, 25 **c** 10, 12, 15 **d** 8, 21, 12 **e** 1, 7

f 12, 25 **g** 15, 30 **h** 6, 180 **i** 7, 21, 420.

7. Izračunaj najmanji zajednički višekratnik danih izraza:

a $2a$, $3a$ **b** $18a$, $15b$ **c** a^3x, ax^3 **d** x, $3x$, $4x$.

8. Izračunaj najmanji zajednički višekratnik danih izraza:

a 3, $a + b$ **b** x, $x - y$ **c** $3a^2b$, $a^2 - b$ **d** $a + b$, $a - b$

e $x + 4$, $x - 4$ **f** $2a - 5b$, $2a + 5b$ **g** 3, $2a + 2b$ **h** $x - y$, $x^2 - y^2$

i $x + 2$, $x^2 - 4$ **j** $x + 1$, $(x+1)^3$ **k** $a + 2$, $a^2 + 4a + 4$ **l** $a - 3$, $a^3 - 27$.

9. Izračunaj najmanji zajednički višekratnik danih izraza:

a $x + 1$, $x - 1$, $x^2 - 1$ **b** $2a + 3$, $2a - 3$, $4a^2 - 9$ **c** $2a + 2b$, $3a - 3b$, $a^2 - b^2$

d $5x - 5$, $2x + 2$, $3x^2 - 3$ **e** $1 - x$, $x + 1$, $x^2 - 1$ **f** $3 - a$, $6 + 2a$, $a^2 - 9$

g $x + 1$, $x^2 - x + 1$, $x^3 + 1$ **h** x, $x - 3$, $x^2 - 9$ **i** ab, $a + b$, $a - b$

j $2a$, $3b$, $4a^2 - 9b^2$ **k** $x - 2$, $2x - 1$, $x^2 - 4$ **l** $3x - 3y$, $6xy + 6y^2$, $x - y$.

1.11. Algebarski razlomci

Spomenuli smo da izraze oblika $5a^2b$, $\frac{1}{2}ab^3$, $-4xyz$ i sl. zovemo monomi. Zbroj dva monoma naziva se binom, zbroj tri monoma trinom, dok se za zbroj više monoma koristi naziv polinom ili mnogočlan. Algebarski razlomak je razlomak kojemu su brojnik i nazivnik polinomi. Primjeri algebarskih razlomaka su $\frac{3ab+4b}{12a^2+17b^2}$, $\frac{8x-21y}{3z+4xy-y^2}$, $\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y}{\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2}$ itd. Kao i racionalne brojeve, tako i algebarske razlomke možemo zbrajati i množiti koristeći ista pravila i svojstva kao za brojeve.

PRIMJER 1.

Izračunajmo $\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}+\frac{1+x^2}{1-x^2}$.

Prvo odredimo najmanji zajednički nazivnik ovih razlomaka. Nazivnici $1-x$ i $1+x$ se više ne daju rastaviti, dok je $1-x^2=(1-x)(1+x)$ pa je

$$V(1-x,1+x,1-x^2)=(1-x)(1+x)=1-x^2.$$

Svođenjem na zajednički nazivnik dobivamo:

$$\begin{aligned}\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}+\frac{1+x^2}{1-x^2}&=\frac{(1+x)^2-(1-x)^2+(1+x^2)}{(1-x)(1+x)}\\&=\frac{1+2x+x^2-(1-2x+x^2)+1+x^2}{1-x^2}\\&=\frac{1+2x+x^2-1+2x-x^2+1+x^2}{1-x^2}=\frac{1+4x+x^2}{1-x^2}.\end{aligned}$$

PRIMJER 2.

Pojednostavnimo $\frac{1-x^2}{y+y^2}\cdot\frac{1-y^2}{x+x^2}\cdot\left(y+\frac{xy}{1-x}\right)^2$.

Prvo sredimo izraz u zagradi.

$$\begin{aligned}\frac{1-x^2}{y+y^2}\cdot\frac{1-y^2}{x+x^2}\cdot\left(y+\frac{xy}{1-x}\right)^2&=\frac{1-x^2}{y+y^2}\cdot\frac{1-y^2}{x+x^2}\left(\frac{y-yx+xy}{1-x}\right)^2\\&=\frac{(1-x)(1+x)}{y(1+y)}\cdot\frac{(1-y)(1+y)}{x(1+x)}\cdot\frac{y^2}{(1-x)^2}=\frac{y(1-y)}{x(1-x)}.\end{aligned}$$

ZADATCI 1.11.

1. Dane razlomke proširi tako da im nazivnik bude jednak $6a^2b^2$:

a $\frac{1}{3}$ **b** $\frac{a}{b}$ **c** $\frac{5}{3a}$ **d** $\frac{a+3}{2a^2}$ **e** $\frac{2-a}{2ab}$ **f** $\frac{a^2-b^2}{a^2b}$.

2. Dane razlomke proširi tako da im nazivnik bude jednak $2ab^3(a^2-b^2)$:

a $\frac{1}{a}$ **b** $\frac{a+b}{ab}$ **c** $\frac{5}{a-b}$ **d** $\frac{b}{a^2-b^2}$ **e** $\frac{a+1}{a(a+b)}$ **f** $\frac{3-b}{b^2(a-b)}$.

3. Skrati razlomke:

a $\frac{128}{96}$ **b** $\frac{1000}{625}$ **c** $\frac{3a^2}{9ab}$ **d** $\frac{12ab^3}{4ab}$

e $\frac{6a^2b}{15ab^2}$ **f** $\frac{16ab^3}{12a^2b^2}$ **g** $\frac{18x}{36x^2y}$ **h** $\frac{28xy^3}{21x^3y}$.

4. Skrati razlomke:

a $\frac{3a+3b}{2a+2b}$ **b** $\frac{2a-2}{5a-5}$ **c** $\frac{4x^2-8}{3x^2-6}$ **d** $\frac{ax+ay}{bx+by}$

e $\frac{10a-10}{12-12a}$ **f** $\frac{ax-bx}{by-ay}$ **g** $\frac{axy+a^2x^2}{2y+2ax}$ **h** $\frac{12x^2y-18xy^2}{12x^2y-8x^3}$.

5. Skrati razlomke:

a $\frac{a^2-b^2}{a^2-ab}$ **b** $\frac{x^2-9}{(x+3)^2}$ **c** $\frac{2x-3y}{4x^2-9y^2}$

d $\frac{5a-2y}{4y^2-25a^2}$ **e** $\frac{-a-1}{(a+1)^2}$ **f** $\frac{a^2-1}{a^3-1}$

g $\frac{3+x}{27+x^3}$ **h** $\frac{8x^3-32xy^2}{5xy^2+10y^3}$ **i** $\frac{3ab-6ac}{36a^2bc^2-9a^2b^3}$

j $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$ **k** $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$ **l** $\frac{x^2+4x-5}{x^2-25}$

m $\frac{x^2+x-2}{x^2+4x+4}$ **n** $\frac{ab+ay+bx+xy}{ab+bx-2ay-2xy}$ **o** $\frac{ax+bx-ay-by}{ay-ax+by-bx}$

p $\frac{a^2-(5a+b)^2}{36a^2+12ab+b^2}$ **r** $\frac{a^2-(b+c)^2}{(a+b)^2-c^2}$ **s** $\frac{(3x+y)^2-(2x-5y)^2}{(2x+7y)^2-(x+y)^2}$.

6. Zbroji razlomke:

a $\frac{2a}{3}+\frac{a}{6}-\frac{a}{15}$ **b** $\frac{2x}{5}-\frac{x}{15}-\frac{3x}{25}$ **c** $\frac{3}{a}+\frac{2}{b}-\frac{1}{a}$

d $\frac{3b}{a}+\frac{8b}{x}+\frac{2}{x}$ **e** $\frac{1}{a}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{b}$ **f** $\frac{3}{2a}+\frac{1}{3a}-\frac{5}{6}$

g $\frac{1}{12b}-\frac{1}{18a}+\frac{1}{ab}$ **h** $\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}+2$ **i** $\frac{1}{x^2y}-\frac{2}{x^3y^2}$.

7. Zbroji razlomke:

a $\frac{a+1}{5}-\frac{2-a}{2}$ **b** $\frac{3x-2}{8}-\frac{8x+13}{12}$ **c** $\frac{x-1}{12a}+\frac{12-x}{a}$

d $\frac{a-b}{2a}+\frac{b-3a}{3b}+\frac{a^2-2b^2}{2ab}$ **e** $\frac{x-y}{8x}+\frac{2x+y}{12x}-\frac{x-5y}{16x}+3$ **f** $\frac{a+b}{a^2b}+\frac{a-b}{ab^2}+\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$.

8. Izvrši dane operacije:

a $\frac{10}{a+1}-\frac{1}{a-1}$ **b** $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}$ **c** $\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}$

d $\frac{x}{y-3}-\frac{2+x}{y+3}$ **e** $\frac{a+b}{3a-4b}-\frac{a-b}{4b+3a}$ **f** $\frac{4}{a+b}-\frac{2a+3b}{a^2-b^2}$

g $\frac{8a-b}{2a+5b}+\frac{2a^2-5b^2}{4a^2-25b^2}$ **h** $\frac{1}{9-x^2}+\frac{1}{x-3}$ **i** $\frac{3a}{16a^2-9b^2}-\frac{1}{3b-4a}$

j $\frac{b}{2a+3b}+\frac{2a}{2a-3b}+\frac{3a^2-5b^2}{4a^2-9b^2}$ **k** $\frac{a-b}{5a+3b}-\frac{2a+b}{5a-3b}-\frac{(a+b)^2}{25a^2-9b^2}$.

9. Izvrši dane operacije:

a $\frac{1}{x+1}+\frac{2-x}{(x+1)^2}$ **b** $\frac{8}{2-x}-\frac{3+x}{(2-x)^2}$

c $\frac{4a+b}{3a+2b}-\frac{(a-b)^2}{(3a+2b)^2}$ **d** $\frac{1}{a^2+2a+1}-\frac{1}{a+1}$

e $\frac{a}{a-1}-\frac{a^2}{(a-1)^2}$ **f** $\frac{4+a}{a+3}-\frac{a^2}{a^2+6a+9}$

g $3+\frac{a}{a+b}+\frac{2ab}{(a+b)^2}-\frac{3a^2b}{(a+b)^3}$ **h** $\frac{x^3}{(x-y)^3}-\frac{2xy}{(y-x)^2}+\frac{x+y}{y-x}-2$.

10. Izvrši dane operacije:

a $\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a^3+1}$ **b** $\frac{2x-1}{x^3+8}-\frac{1}{x+2}$

c $\frac{2x^2+3}{x^3-27y^3}+\frac{1}{x-3y}$ **d** $\frac{a}{a^3-b^3}-\frac{1}{a^2-b^2}$.

11. Izvrši dane operacije:

a $\frac{1}{a+1}-\frac{1}{2+a}$ **b** $\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+4}$

c $\frac{1}{2a-b}-\frac{1}{3a+2b}$ **d** $\frac{x}{x+2}-\frac{2+x}{x+3}$

e $\frac{1}{x+3}-\frac{x-7}{(x+3)(x+2)}$ **f** $\frac{a+1}{(a+2)(a-1)}+\frac{2}{a+2}$

g $\frac{a}{a+1}-\frac{2-a}{a+4}+\frac{a^2+1}{a^2+5a+4}$ **h** $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2+x-2}$.

12. Pomnoži i reduciraj izraze:

a $35ab\cdot\frac{12ab^2}{49a^2b}$ **b** $\frac{14xy^2}{21x^2}\cdot 12xy$ **c** $3a^2b\cdot\frac{5x}{48ac}$ **d** $\frac{16ay}{24a^2x}\cdot 18x^2y^2$.

13. Pomnoži i reduciraj izraze:

a $\frac{x^2-1}{x}\cdot\frac{3x}{x+1}$ **b** $\frac{x^2-4}{x+3}\cdot\frac{6x+18}{x-2}$ **c** $\frac{a+b}{x+y}\cdot\frac{x^3+y^3}{a^2-b^2}$

d $\frac{a-1}{a+1}\cdot\frac{a^3+1}{a^3-1}$ **e** $\frac{a^2-9}{5b}\cdot\frac{15b}{3-a}$ **f** $\frac{x-2}{x+3}\cdot\frac{3x}{2-x}$

g $\frac{x^2-4x}{3x}\cdot\frac{1}{4-x}$ **h** $\frac{(x+2)^3}{x^2-4}\cdot\frac{1}{x^2+4x+4}$.

14. Podijeli:

a $\frac{3a^2b}{21a}:(4b^2)$ **b** $\frac{12x^2y}{8xy^2}:(9x^2y^2)$ **c** $\frac{65axy}{4a^2x^2}:(39y^2)$

d $\frac{a^2b^2c^2}{3xy}:\frac{10ab}{9x^2c}$ **e** $\frac{a^2-16}{a+1}:(a-4)$ **f** $\frac{x^2-1}{2x}:(x+1)^2$

g $\frac{y^2-25}{4x^2-81}:\frac{y+5}{2x-9}$ **h** $\frac{13(x^3-1)}{2x+1}:\frac{39x-39}{8x^2-2}$.

15. Pojednostavni:

a $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\cdot a^2b^2$ **b** $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2-y^2}$ **c** $\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\cdot\frac{3b}{b+a}$

d $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1\right)\cdot\frac{8xy}{x^3-y^3}$ **e** $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right):(a-b)^2$ **f** $\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right):(x^2-y^2)$

g $\left(\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}\right):\frac{a-b}{a^2b^2}$ **h** $(8x^2-8y^2)\cdot\frac{2}{y-x}$ **i** $\frac{6xy-6y^2}{x^2+xy}:\frac{3y^2}{x(y^2-x^2)}$

j $\frac{25x^2-1}{xa-a^2}\cdot\frac{x^2-a^2}{10x+2}$.

16. Pojednostavni:

a $\left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}\right)\cdot(x^2-y^2)$ **b** $\left(\frac{3x+1}{x^2-3x}+\frac{3x-1}{x^2+3x}\right)\cdot\frac{x^2-9}{x^2+1}$

c $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right):\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}\right)$ **d** $\left(y-\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y-x}\right)$

e $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)-\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(y-\frac{1}{y}\right)$ **f** $\left(a+b-\frac{2ab}{a+b}\right):\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{b}{a}\right)$

g $\left(\frac{2}{x+4}+\frac{2}{x-4}\right):\left(\frac{x}{x+1}-\frac{x}{x-1}\right)$ **h** $\left(1-\frac{1-a}{1+a}:\frac{1+a}{1-a}\right)\cdot(a^2+2a+1)$

i $\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right):\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)$ **j** $\left(\frac{a}{a+1}-\frac{a^2}{a^2-1}\right):\left(\frac{a^2}{a+1}-\frac{a^3}{a^2+2a+1}\right)$.

17. Pojednostavni dane dvojne razlomke:

a $\dfrac{\frac{8yz}{15x}}{\frac{16y^2x}{45z}}$ **b** $\dfrac{\frac{7a^2b}{5x^2y}}{\frac{35a^2b^2}{15xy^2}}$ **c** $\dfrac{\frac{15xy^3}{20a^2b}}{\frac{25x^2y}{60ab^2}}$ **d** $\dfrac{\frac{a^2-b^2}{ab}}{\frac{a+b}{a}}$

e $\dfrac{16x^2-16y^2}{\dfrac{y-x}{16}}$ **f** $\dfrac{\dfrac{a^2-16b^2}{a^2+16ab}}{\dfrac{b^2-4ab}{ab+16b^2}}$ **g** $\dfrac{\dfrac{(x-y)^2}{x+y}}{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}}$ **h** $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}$

i $\dfrac{4+\dfrac{1}{a}}{4-\dfrac{1}{a}}$ **j** $\dfrac{\dfrac{2}{a-b}-\dfrac{1}{a}}{\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}}$ **k** $\dfrac{a-\dfrac{a(b^2-a)}{b^2}}{1-\dfrac{b^2-a}{b^2}}$.

1.12. Linearne jednadžbe i problemi prvog stupnja

Svaku jednadžbu koju možemo elementarnim transformacijama svesti na oblik

$$ax=b, \quad a\neq 0, \quad a,\ b\in \mathbf{R},$$

nazivamo **linearna jednadžba s jednom nepoznanicom**. Pod elementarnim transformacijama jednadžbe podrazumijevamo množenje obiju strana jednadžbi brojem različitim od nule, dodavanje realnog broja objema stranama jednadžbe, sređivanje dobivenih izraza na obje strane jednadžbe pri čemu se poštuje redoslijed operacija.

Rješenje linearne jednadžbe $ax=b$ je realan broj $x=\dfrac{b}{a}$.

PRIMJER 1.

Riješimo jednadžbu: $3x-\dfrac{2-x}{5}=-58$.

Pomnožimo li jednadžbu s 5 dobivamo $15x-(2-x)=-290$, $15x-2+x=-190$, $16x=-288$, $x=-\dfrac{288}{16}=-18$.

PRIMJER 2.

U ovisnosti o realnom parametru a raspravimo rješenja jednadžbe $(a^2-5)x+2=(1-a)x+a$.

Prebacimo pribrojnike koji sadrže nepoznanicu x na lijevu stranu, a brojeve na desnu stranu jednadžbe.

$$(a^2-5)x-(1-a)x=a-2, \qquad x\cdot(a^2-5-1+a)=a-2$$

$$x\cdot(a^2+a-6)=a-2. \tag{1}$$

Za one brojeve a za koje je izraz a^2+a-6 različit od nule, cijelu jednadžbu podijelimo s a^2+a-6. Dobivamo

$$x=\frac{a-2}{a^2+a-6}=\frac{a-2}{(a-2)(a+3)}=\frac{1}{a+3},$$

tj. u slučaju kad je $a \neq 2$ i $a \neq -3$ jednadžba ima jedinstveno rješenje $x = \dfrac{1}{a+3}$.

Ako je $a = 2$, jednadžba (1) ima oblik $x \cdot 0 = 0$ i svaki realan broj x zadovoljava tu jednadžbu, tj. jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja.

Ako je $a = -3$, jednadžba (1) ima oblik $x \cdot 0 = -5$ i očito, nijedan realan x ne zadovoljava tu jednadžbu, te jednadžba nema rješenja.

PRIMJER 3.

Anica i Marica imaju zajedno 816 kuna. Kad bi Anica potrošila $\frac{3}{5}$ svog dijela, a Marica $\frac{3}{7}$ svog dijela, ostale bi im jednake svote novca. Koliko novaca ima Anica, a koliko Marica?

Ovo je primjer matematičkog problema prvog stupnja. Uvedimo za količinu Aničinog novca oznaku x. Tada iz prve rečenice slijedi da Marica ima $816 - x$ kuna. Kad bi Anica potrošila $\frac{3}{5}$ svog dijela, ostale bi joj $\frac{2}{5}$ dijela, tj. ostalo bi $\frac{2}{5}x$ kuna. Kad bi Marica potrošila $\frac{3}{7}$ svog dijela, ostale bi joj $\frac{4}{7}$ njezinog dijela, tj. $\frac{4}{7}(816 - x)$. Prema uvjetu zadatka, ti ostatci su jednaki, tj.

$$\frac{2}{5}x = \frac{4}{7}(816 - x).$$

Rješavanjem ove linearne jednadžbe dobivamo $x = 480$ kn. Dakle, Anica ima 480 kn, a Marica 336 kn.

ZADATCI 1.12.

1. Riješi linearne jednadžbe:

a $3x - 11 = 5(x + 7)$

b $x - 19 = 5(x - 1) + 6 - 2x$

c $5(2x + 12) = 3(x - 2) + 1$

d $8(x - 1) = 13(x + 3)$.

2. Riješi jednadžbe:

a $\frac{2}{3}(x - 7) + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}x$

b $\frac{x-2}{4} - \frac{2x-3}{3} = 1$

c $\frac{1}{5}(2x + 3) - \frac{1}{10}(x + 4) = \frac{1}{2}$

d $\frac{2x-1}{3} - \frac{3x-1}{2} = \frac{-x-2}{2}$.

3. Riješi jednadžbe:

a $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - 1\right) - 1\right] - 1 = 0$

b $\frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - x\right)\right] = 2x$

c $\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}x + 2\right) - 3\right] + 4 = 5$

d $3\left\{2x - 4\left[x + 5(x - 3) + 1\right]\right\} = -2$.

4. Riješi jednadžbe:

a $(x-1)^2=(x+1)^2$

b $(x-5)^2-(x+3)^2=x$

c $\left(\frac{x-3}{2}\right)^2-\left(\frac{x+4}{2}\right)^2=1$

d $\frac{(3x-1)^2}{9}=\frac{(2x+3)^2}{4}$.

5. Riješi jednadžbe:

a $\frac{3x+8}{2x-1}=3$

b $\frac{8x+2}{4x-7}=1$

c $\frac{14x-1}{8x+10}=2$

d $\frac{11x-1}{12x-1}=\frac{1}{2}$.

6. Riješi jednadžbe:

a $\frac{2}{x-4}+\frac{3}{x+1}=0$

b $\frac{4}{x-5}-\frac{3}{x+2}=0$

c $\frac{1}{2x-10}+\frac{3}{4x-1}=0$

a $\frac{3}{2x+1}+\frac{10}{3x-5}=0$.

7. Riješi jednadžbe:

a $\frac{2}{x-3}-\frac{5}{x+3}=\frac{1}{x^2-9}$

b $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}=\frac{1}{x^2+3x+2}$

c $\frac{3}{9-5x}-\frac{1}{9+5x}=\frac{1}{81-25x^2}$

d $\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{5x}{x+1}=-5$

e $\frac{2}{x+3}-\frac{3}{x-2}=\frac{1}{x^2+x-6}$

f $\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{3x+1}=\frac{1}{6x^2-x-1}$.

8. Riješi jednadžbe:

a $\frac{3}{x}+\frac{2}{x+2}=\frac{5}{x+1}$

b $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}$.

9. Riješi jednadžbe:

a $\dfrac{\frac{x}{x+5}-\frac{x-2}{x+6}}{\frac{x-1}{x+5}-\frac{x+4}{x+6}}=\frac{1}{2}$

b $\dfrac{2-\frac{1-x}{1+x}}{2+\frac{1-x}{1+x}}=-1$.

10. **a)** Iz formule za duljinu puta pri jednoliko ubrzanom gibanju $s=v_0t+\frac{a}{2}t^2$ izrazi a.

b) Iz formule za kinetičku energiju $E=\frac{mv^2}{2}$ izrazi m.

c) Iz formule za duljinu štapa pri temperaturi t $l_t=l_0(1+\alpha t)$ izrazi t.

11. U ovisnosti o parametru a, diskutiraj rješenja jednadžbi:

a $ax-3=(1-a)x+4$

b $ax-a=3x-3$

c $(a-1)x-4=(a^2-1)x-4$

d $\frac{3}{x-4}=\frac{5a}{a-2x}$

e $4-a=\frac{5+a}{x-1}$

f $\frac{x-a}{x+a}=\frac{x-2a}{x+2a}$.

12. Osmina nekog broja je za 24 manja od njegove petine. Koji je to broj?

13. Trećina nekog broja za 12 je veća od četvrtine tog broja. Koji je to broj?

14. Koji broj treba dodati brojniku i nazivniku razlomka $\frac{3}{5}$ da se dobije $\frac{5}{6}$?

15. Koji broj treba oduzeti od brojnika i nazivnika razlomka $\frac{11}{9}$ da se dobije $\frac{4}{3}$?

16. Ako neki broj pomnožimo s 4, pa dobiveni umnožak podijelimo s 3, dobit ćemo isti broj koji bismo dobili kad bismo trostruki broj umanjili za 15. Koji je to broj?

17. Valent je zamislio broj, pomnožio ga sa 6, dodao mu količnik brojeva 672 i 6 i dobio trostruki početni broj. Koji je broj zamislio Valent?

18. Zbroj tri broja je 1094. Prvi pribrojnik je pet puta manji od drugog, a treći je za 5 veći od drugoga. Odredi sve pribrojnike.

19. Ako nepoznatom broju dodamo 12.5, taj zbroj pomnožimo s 0.4, te umnožak oduzmemo od 14, dobit ćemo dvokratnik nepoznatog broja. Koji je to broj?

20. Kad je učenik pročitao polovinu knjige i još 30 stranica, ostalo mu je pročitati još trećinu knjige. Koliko stranica ima knjiga?

21. Sin je za 20 godina mlađi od oca, a prije 10 godina bio je od njega 3 puta mlađi. Koliko godina ima otac?

22. Otac koji ima 65 godina ima kćer staru 35 godina. Prije koliko godina je otac bio dva puta stariji od kćeri?

23. U prosincu je prodano 609 ulaznica za klizanje. Ako je đačkih ulaznica prodano za 231 više nego ulaznica za odrasle, koliko je prodano ulaznica svake vrste?

24. Za koncert grupe “Red Square” prodano je 555 karata manje nego za koncert grupe “Blue Circle”. Ako je ukupno prodano 2757 karata, koliko je karata prodano za svaki koncert?

25. U svibnju je u kazalištu *Exit* prodano 45 ulaznica više od dvostrukog broja ulaznica prodanih u travnju. Ako je u oba mjeseca prodano ukupno 801 ulaznica, koliko ih je prodano u travnju, a koliko u svibnju?

26. Ana, Branka i Zvončica imale su 32 bonbona koje su podijelile na ovaj način: Branka je dobila dva puta više od Ane, a za 2 manje od Zvončice. Koliko je bonbona dobila svaka djevojčica?

27. Tri osobe podijelile su 4400 kn. Prva je dobila 120 kn manje od druge, a treća koliko prva i druga zajedno. Koliko je kuna dobila svaka osoba?

28. Marija, Katarina i Ivona potrošile su u trgovini 992 kune. Marija je potrošila 45 kn više od Ivone, a 3 puta manje od ukupne sume koju su potrošile Katarina i Ivona. Koliko je potrošila svaka od djevojaka?

29. Stjepan je za 5 cm viši od Josipa, koji je 12 cm niži od Domagoja. Odredi visinu svakog ako su sva trojica ukupno visoki 581 cm.

30. Za koliko se smanjila stranica kvadrata ako mu se opseg smanjio za 100 mm?

31. Kolika je duljina stranice kvadrata čija se površina poveća za $24\ \text{cm}^2$ kad mu se stranice povećaju za 2 cm?

32. U stambenoj zgradi žive četiri obitelji: jedna četveročlana, dvije tročlane i jedna dvočlana. Potrošena voda u zgradi plaća se proporcionalno broju članova obitelji. Koliko treba za utrošak vode platiti svaka od obitelji ako je ukupan račun za vodu u zgradi iznosio 522 kn?

33. Stambena zgrada ima 32 stana: 16 jednosobnih površine $48\ \text{m}^2$, 10 dvosobnih površine $58\ \text{m}^2$, te 6 trosobnih površine $72\ \text{m}^2$. Grijanje stanova plaća se proporcionalno površini stana. Koliki je račun za grijanje svakog od te tri vrste stanova ako je mjesečni račun za grijanje cijele zgrade iznosio 5696 kn?

34. Pri izradi mase za asfalt katran i šljunak miješaju se u omjeru $2 : 11$. Koliko je šljunka potrebno za 2 tone asfalta?

35. U smjesi za beton cement i šljunak nalaze se u omjeru $1 : 3$. Koliko je cementa potrebno za 500 kg betona?

36. Bakar i cink se u leguri nalaze u omjeru $17 : 3$. Koliko ima bakra u 100 g te legure?

37. Pri izradi žbuke koriste se cement, vapno i pijesak i to u omjeru $1:1:4$ redom. Koliko cementa ima u 456 kg žbuke?

38. Kutovi trokuta odnose se kao $1:3:5$. Koliko iznose ti kutovi?

39. Kut uz osnovicu jednakokračnog trokuta odnosi se prema kutu nasuprot osnovice kao $3:4$. Koliki su kutovi trokuta?

40. U jednakokračnom trokutu opsega 128 mm, osnovice i krak se odnose kao $10:11$. Kolike su duljine osnovice i krakova trokuta?

41. Točkama A, B, C i D kružnica je podijeljena na 4 luka čije se duljine odnose kao $2:7:4:5$. Koliki su središnji kutovi nad tim lukovima?

42. Vlak je brdskim dijelom pruge vozio 3 sata, a duž rijeke 6 sati. Ukupno je prešao 477 km. Ako je duž rijeke vozio 12 km/h brže, kolika mu je bila brzina na brdskom dijelu pruge?

43. Darko je automobilom otišao do ujaka u grad Ž. U jednom smjeru vozio je 72 km/h, a pri povratku samo 48 km/h. Koliko je udaljen grad Ž ako je Darko vozio ukupno 10 sati?

44. Dario je iz kampa krenuo biciklom brzinom 25 km/h. Sat vremena kasnije za njim je krenuo Mario motociklom brzinom 45 km/h. Koliko će vremena trebati Mariju da sustigne Darija?

45. Iz stanice A polazi u 9 h putnički vlak, a u 10 h u istom smjeru brzi vlak čija je srednja brzina 5 m/s veća od brzine putničkog vlaka. Brzi vlak sustigne putnički u 12 h. Kolika je srednja brzina putničkog vlaka?

46. Iz stanice A prema stanici B polazi putnički vlak, brzine 10 m/s, a iz stanice B prema stanici A brzi vlak čija je brzina 27 m/s. Kad će se mimoići ti vlakovi ako je udaljenost stanica A i B 370 km?

47. Koliki je postotak alkohola u smjesi koja se dobije miješanjem 0.9 l 60 %-tnog alkohola s 1.5 l 82 %-tnog?

48. S koliko 47 %-tnog alkohola treba pomiješati 17 dcl 82 %-tnog alkohola da bi se dobio 64 %-tni alkohol?

49. S koliko postotnom kiselinom treba miješati 9 l 48 %-tne kiseline da bi se dobilo 15 l 60 %-tne?

50. Zlatar raspolaže s dvije vrste zlata: čistoće 990 i 870. Koliko zlata čistoće 870 mora uzeti da bi u smjesi s 25 dkg zlata čistoće 990 dobio zlato čistoće 900?

51. S koliko vode treba razrijediti 2 dcl 30 %-tne kiseline da se dobije 12 %-tna kiselina?

52. Koliko "čistog" antifriza treba dodati u 20 l 40 %-tne otopine antifriza da se dobije 60 %-tna otopina?

53. 40 litara slane otopine sadrži 7 % soli. Koliko vode treba dodati da se dobije 4 %-tna otopina?

54. Sredstvo za izbjeljivanje ima jačinu 15 %. Koliko vode treba dodati u 12 l tog sredstva da se dobije 8 %-tna otopina?

55. Ana je napravila 10 kg 8 %-tne šećerne otopine. Koliko vode treba ispariti da otopina postane 25 %-tna?

56. U posudi se nalazi 5 l 30 %-tnog antifriza. Koliko vode treba ispariti da jačina antifriza bude 45 %?

57. U prodavaonici slatkiša, crveni gumi bonboni imaju cijenu 15 kn/kg, a zeleni želе bonboni su 20 kn/kg. Bakica želi za svoje unuke uzeti ukupno 2.5 kg bonbona. Koliko je bakica kupila gumi bonbona, a koliko želе bonbona ako je ukupno platila 45 kn?

58. U pržionici kave prže se dvije vrste kave: jedna po cijeni 35 kn/kg, a druga po cijeni 60 kn/kg. Koliko treba uzeti jedne i druge vrste kave da se dobije 1 kg smjese kojoj će cijena biti 45 kn?

59. Cijena brašna A je 4 kn/kg, a brašna B 5 kn/kg. U kojem omjeru treba pomiješati te dvije vrste brašna da se dobije brašno s cijenom 4.2 kn/kg?