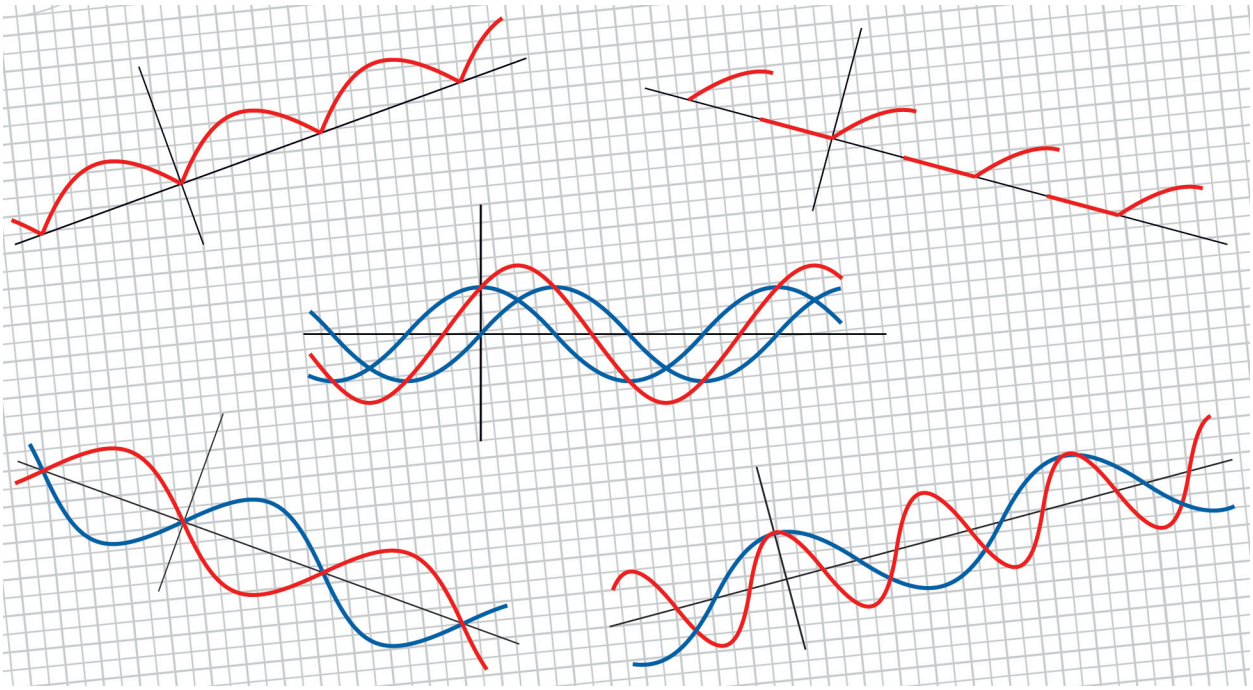
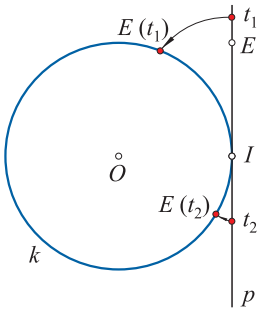


1. Trigonometrijske funkcije realnog broja

1.1. Brojevna kružnica



namatanje pravca na kružnicu

Neka je k kružnica središta O i polumjera $r=1$, a točka I neka je točka kružnice k.

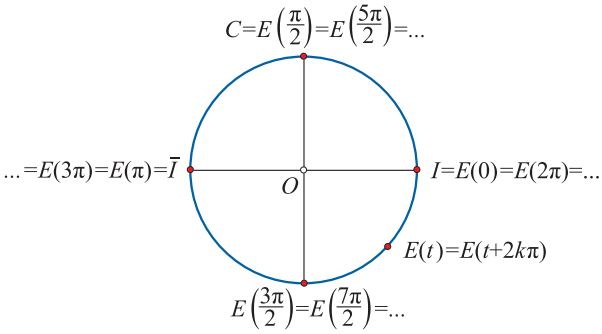
Uočimo brojevni pravac p koji dira kružnicu k u točki I koja je ujedno i ishodišna točka pravca p. Neka je jedinična dužina $\overline{IE}$ brojevnog pravca p jednaka polumjeru kružnice k, pri čemu je točka E postavljena tako da ako se krećemo od točke O do točke E preko I, gibanje ima pozitivan smjer, tj. smjer suprotan od smjera gibanja kazaljke na satu.

Pravac p namotajmo bez klizanja i rastezanja na kružnicu k tako da polupravac s pozitivnim brojevima namatamo u pozitivnom smjeru, a polupravac na kojemu su smješteni negativni brojevi u negativnom smjeru. Kako je svakom realnom broju pridružena točno jedna točka pravca p, ovim namatanjem smo svakom realnom broju pridružili točno jednu točku kružnice. Ovo pridruživanje zovemo **eksponencijalno preslikavanje** pravca na kružnicu i označavamo s E.

Brojevna kružnica

Kružnicu k zajedno s eksponencijalnim preslikavanjem $E : \mathbf{R} \to k$ nazivamo **brojevna** ili **trigonometrijska kružnica**.

Broju 0 je pridružena točka I. Kako je duljina jedinične kružnice jednaka 2π, to se broj 2π preslikava opet u točku I. Dalje, broj 4π preslikava se u točku I.



Duljina jedinične polukružnice je π, pa se broj π preslikava u točku $\overline{I}$ (vidi sliku) koja je dijametralno suprotna točki I. Ali isto tako, i brojevi $3\pi = \pi + 2\pi$, $5\pi = \pi + 2 \cdot 2\pi \ldots$ se također preslikavaju u točku $\overline{I}$.

Četvrtina kružnice ima duljinu $\frac{\pi}{2}$, pa znači da se u točku C preslikava broj $\frac{\pi}{2}$, ali i brojevi $\frac{\pi}{2} + 2\pi$, $\frac{\pi}{2} + 4\pi \ldots$

Dakle,

$$I = E(0) = E(2\pi) = E(4\pi) = E(-2\pi) = \ldots, \quad \text{tj.} \quad I = E(2k\pi), \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$\overline{I} = E(\pi) = E(-\pi) = E(3\pi) = E(5\pi) = \ldots, \quad \text{tj.} \quad \overline{I} = E((2k+1)\pi), \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$C = E\left(\frac{\pi}{2}\right) = E\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = E\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi\right) = \ldots, \quad \text{tj.} \quad C = E\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Općenito možemo zaključiti da se svake dvije točke koje su na pravcu udaljene za 2π ili za višekratnik broja 2π namatanjem stope u jednu točku kružnice, tj. vrijedi

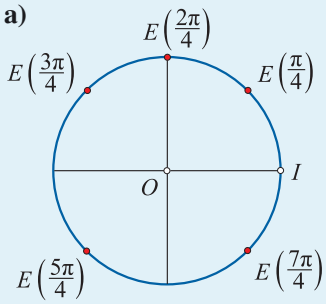
$$E(t+2k\pi)=E(t) \text{ za svaki } t\in\mathbf{R} \text{ i } k\in\mathbf{Z}.$$

PRIMJER 1.

Nacrtajmo $E(t)$ ako je t jednako:

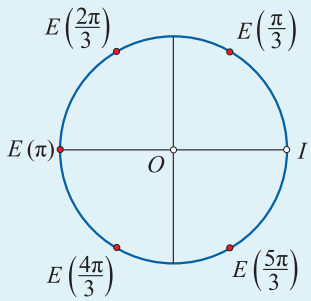
a) $\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **b)** $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **c)** $\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

a)



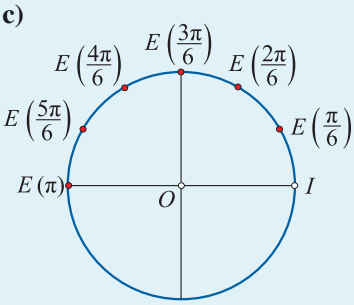
Četvrtina polukružnice ima duljinu $\frac{\pi}{4}$. Točke $E\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $E\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $E\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, $E\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ dijele četvrtine kružnice na jednake dijelove.

b)



Trećina polukružnice ima duljinu $\frac{\pi}{3}$. Točke $E\left(\frac{\pi}{3}\right)$ i $E\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ dijele gornju polukružnicu na tri jednaka dijela.

c)



Točke $E\left(\frac{\pi}{6}\right), \ldots, E\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ dijele gornju polukružnicu na šest jednakih dijelova.

PRIMJER 2.

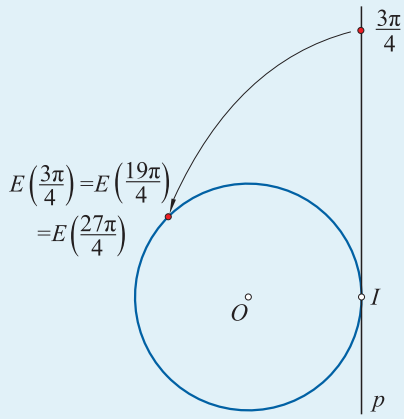
Za realni broj $t=\frac{19\pi}{4}$ nađimo brojeve $t_1\in[0,2\pi\rangle$, $t_2\in[6\pi,8\pi\rangle$, takve da vrijedi $E(t)=E(t_1)=E(t_2)$.

Kako je $\frac{19\pi}{4}=4\pi+\frac{3\pi}{4}$ i $\frac{3\pi}{4}\in[0,2\pi\rangle$ to je $t_1=\frac{3\pi}{4}$.

Broj t_2 računamo ovako:

$$\begin{aligned}\frac{19\pi}{4}&=\left(4\pi+\frac{3\pi}{4}\right)-6\pi+6\pi\\&=(4\pi-6\pi)+\left(6\pi+\frac{3\pi}{4}\right)\\&=-2\pi+\frac{27\pi}{4},\end{aligned}$$

pa je $t_2=\frac{27\pi}{4}\in[6\pi,8\pi\rangle$. Brojevi $\frac{19\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{27\pi}{4}$ preslikavaju se u istu točku trigonometrijske kružnice.



ZADATCI 1.1.

1. Na brojevnoj kružnici odredi točke $E(t)$ ako je t:

a π **b** 3π **c** 2005π **d** $-\pi$ **e** -5π **f** -2003π

g 2π **h** 8π **i** 1626π **j** -2π **k** -6π **l** -238π

k $\frac{\pi}{2}$ **l** $\frac{9\pi}{2}$ **m** $\frac{2005\pi}{2}$ **n** $-\frac{\pi}{2}$ **o** $-\frac{9\pi}{2}$ **p** $-\frac{2001\pi}{2}$.

2. Na brojevnoj kružnici odredi točke $E(t)$ ako je t:

a $\frac{\pi}{3}$ **b** $\frac{2\pi}{3}$ **c** $\frac{\pi}{5}$ **d** $\frac{21}{4}\pi$ **e** $-\frac{3\pi}{4}$

f $-\frac{171}{5}\pi$ **g** $-\frac{1998}{7}\pi$ **h** $-\frac{289}{3}\pi$ **i** $\frac{1999}{3}\pi$.

3. Na brojevnoj kružnici skiciraj položaj točke $E(t)$ ako je t:

a 1 **b** 12.65 **c** 16.785 **d** 1988 **e** -1

f -0.23 **g** -1103 **h** -30.28 **i** 6.72

pri čemu uzmi da je $\pi \approx 3.14159$.

4. Odredi $t \in [0, 2\pi\rangle$ takav da je $E(t) = E(x)$ ako je zadan x:

a 132π **b** 213π **c** -11π **d** -42π **e** $\frac{19\pi}{2}$ **f** $\frac{1999\pi}{2}$.

5. Odredi $t \in [0, 2\pi\rangle$ takav da je $E(t) = E(x)$ ako je zadan x:

a $\frac{121\pi}{3}$ **b** $\frac{1432\pi}{3}$ **c** $\frac{127\pi}{6}$ **d** $\frac{1546\pi}{5}$ **e** $-\frac{237\pi}{4}$ **f** $-\frac{37\pi}{10}$.

6. Odredi $t \in [0, 2\pi\rangle$ takav da je $E(t) = E(x)$ ako je zadan x:

a 16.28 **b** 32.14 **c** -10.31 **d** -8 **e** 101 **f** -7.51,

pri čemu uzmi da je $\pi \approx 3.14$.

7. Odredi $t \in [-2\pi, 0\rangle$ takav da je $E(t) = E(x)$ ako je zadan x:

a 13π **b** -1434π **c** $\frac{25\pi}{4}$ **d** $-\frac{1235\pi}{6}$ **e** $\frac{132\pi}{17}$ **f** $-\frac{218\pi}{25}$.

8. Odredi $t \in [10\pi, 12\pi\rangle$ takav da je $E(t) = E(x)$ ako je zadan x:

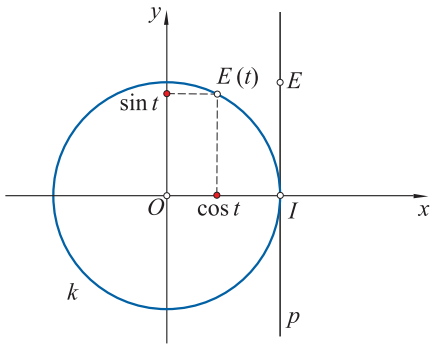
a $\frac{\pi}{4}$ **b** $\frac{3\pi}{4}$ **c** $-\frac{\pi}{2}$ **d** $\frac{32\pi}{3}$ **e** $\frac{25\pi}{6}$ **f** $-\frac{35\pi}{3}$.

1.2. Definicije trigonometrijskih funkcija

Funkcije sinus i kosinus

Brojevnu kružnicu $k(O, r = 1)$ smjestimo u koordinatni sustav u ravnini tako da se ishodište koordinatnog sustava podudara sa središtem O kružnice k, a os x neka se poklapa s pravcem OI.

Sada je brojevni pravac p paralelan s osi y, a njegove točke I i E imaju koordinate $(1, 0)$ i $(1, 1)$ redom. Kao što smo već opisali, realnom broju t pridružena je točka $E(t)$ kružnice k.



Kosinus i sinus realnog broja

Apscisa točke $E(t)$ naziva se **kosinus broja** t i označava se s $\cos t$.

Ordinata točke $E(t)$ naziva se **sinus broja** t i označava se sa $\sin t$.

Funkcija koja broju t pridružuje broj $\cos t$ naziva se **kosinus** i označava se s $\cos$, a funkcija koja broju t pridružuje broj $\sin t$ naziva se **sinus** i označava se sa $\sin$.

Funkcije kosinus i sinus definirane su na skupu $\mathbf{R}$, a kodomena im je $[-1, 1]$ jer su koordinate točke $E(t)$ brojevi ne veći od 1 po apsolutnoj vrijednosti.

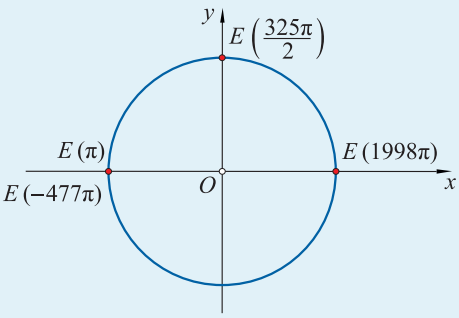
Funkcije sinus i kosinus

$$\cos : \mathbf{R} \to [-1, 1] \qquad \sin : \mathbf{R} \to [-1, 1]$$
$$t \mapsto \cos t \qquad t \mapsto \sin t$$

PRIMJER 1.

Nacrtajmo točku $E(t)$ i izračunajmo sinus i kosinus od t ako je t:

a) π **b)** 1998π **c)** -477π **d)** $\frac{325}{2}\pi$.



$\sin \pi = 0$, $\cos \pi = -1$

$\sin 1998\pi = 0$, $\cos 1998\pi = 1$

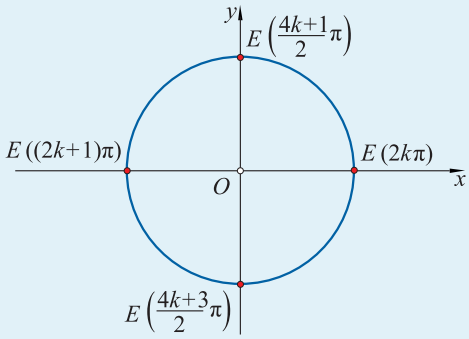
$\sin(-477\pi) = 0$, $\cos(-477\pi) = -1$

$\sin \frac{325}{2}\pi = 1$, $\cos \frac{325}{2}\pi = 0$.

PRIMJER 2.

Nacrtajmo točku $E(t)$ i izračunajmo sinus i kosinus od t ako je t:

a) $(2k+1)\pi$ **b)** $2k\pi$ **c)** $\frac{4k+1}{2}\pi$ **d)** $\frac{4k+3}{2}\pi$.



$\sin(2k+1)\pi = 0$,

$\cos(2k+1)\pi = -1$,

$\sin 2k\pi = 0$, $\cos 2k\pi = 1$,

$\sin\frac{4k+1}{2}\pi = 1$, $\cos\frac{4k+1}{2}\pi = 0$,

$\sin\frac{4k+3}{2}\pi = -1$, $\cos\frac{4k+3}{2}\pi = 0$.

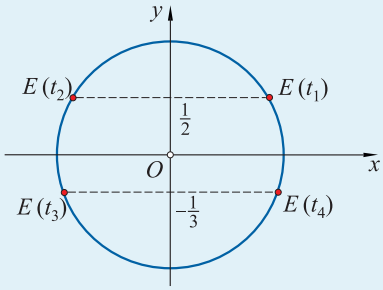
PRIMJER 3.

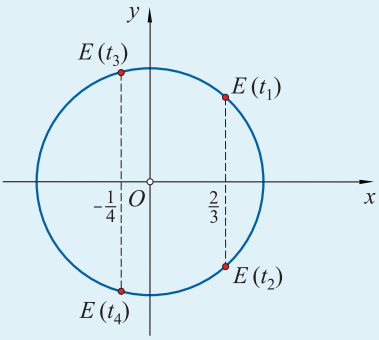
Nacrtajmo točke $E(t)$ za koje vrijedi:

a) $\sin t = \frac{1}{2}$ **b)** $\sin t = -\frac{1}{3}$ **c)** $\cos t = \frac{2}{3}$ **d)** $\cos t = -\frac{1}{4}$.

Za točke $E(t_1)$ i $E(t_2)$ vrijedi $\sin t_1 = \sin t_2 = \frac{1}{2}$.

Za točke $E(t_3)$ i $E(t_4)$ vrijedi $\sin t_3 = \sin t_4 = -\frac{1}{3}$.





Za točke $E(t_1)$ i $E(t_2)$ vrijedi $\cos t_1 = \cos t_2 = \frac{2}{3}$.

Za točke $E(t_3)$ i $E(t_4)$ vrijedi $\cos t_3 = \cos t_4 = -\frac{1}{4}$.

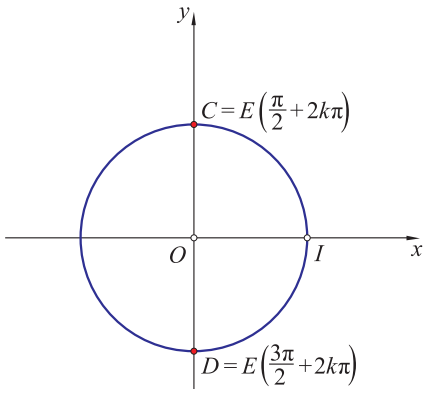
Funkcija tangens

Funkcija **tangens**, u oznaci tg, definira se s pomoću funkcija sinus i kosinus ovako:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cos t \neq 0.$$

Za koje brojeve t vrijedi $\cos t \neq 0$?

Jedine točke na brojevnoj kružnici s apscisom 0 su točke $C(0,1)$ i $D(0,-1)$. Brojevi koji se namatanjem preslikavaju u točku C su brojevi $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots, \frac{-3\pi}{2}, \frac{-7\pi}{2} \ldots$, tj. $C = E\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. Za točku D vrijedi $D = E\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. Dakle, tangens je definiran za sve realne brojeve t različite od $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.



C i D su točke trigonometrijske kružnice s apscisom 0.

Funkcija tangens

$$\operatorname{tg} : \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\} \to \mathbf{R} \qquad \operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

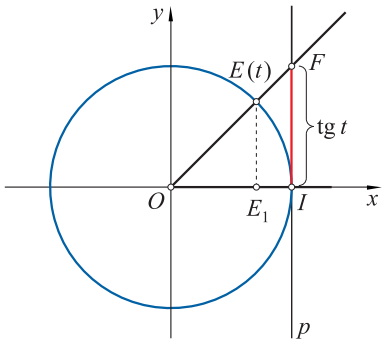
Gdje se na brojevnoj kružnici pojavljuje tangens broja t? Neka je $t \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbf{Z}\right\}$ takav da $E(t)$ pripada prvom kvadrantu. Označimo sa E_1 ortogonalnu projekciju točke $E(t)$ na os x, a sa F presjek pravca p i pravca $OE(t)$.

Očito je da su trokuti $OE_1E(t)$ i OIF slični, pa vrijedi

$$\frac{|FI|}{|OI|} = \frac{|E_1E(t)|}{|OE_1|},$$

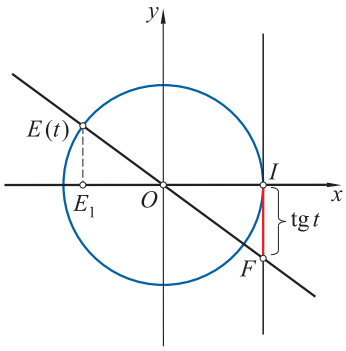
tj. uvažavajući da je $|OI| = 1$, $|E_1E(t)| = \sin t$, $|OE_1| = \cos t$, dobivamo

$$|FI| = \frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t.$$



geometrijska interpretacija broja $\operatorname{tg} t$

Dakle, točka F ima koordinate $(1, \operatorname{tg} t)$, tj. tangens broja t je ordinata točke dobivene presjekom pravca p i pravca $OE(t)$. Promotrimo slučaj kad je $E(t)$ u drugom kvadrantu, tj. kad je $\sin t > 0$ i $\cos t < 0$.



Definirajmo opet točke E_1 i F kao u prethodnom slučaju. Vrijedi $\triangle OE_1E(t) \sim \triangle OIF$, pa je

$$\frac{|FI|}{|OI|} = \frac{|E_1E(t)|}{|E_1O|},$$

tj. $|FI| = \frac{\sin t}{|\cos t|} = |\operatorname{tg} t|$. Dakle, udaljenost od F do x-osi iznosi $|\operatorname{tg} t|$, a kako je F u četvrtom kvadrantu, ordinata joj je negativan broj, pa je $F = (1, -|\operatorname{tg} t|) = (1, \operatorname{tg} t)$ jer je $\operatorname{tg} t$ negativan zbog negativnosti kosinusa od t. Znači i u ovom slučaju je $\operatorname{tg} t$ ordinata točke F.

U slučajevima kad $E(t)$ pripada trećem, odnosno, četvrtom kvadrantu uz analogni postupak imamo isti zaključak koji posebno i istaknimo.

Tangens broja t

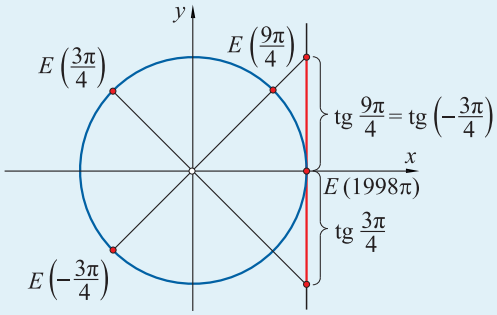
Tangens broja t je ordinata točke dobivene presjekom pravca p i spojnice točaka O i $E(t)$. Pravac p nazivamo **tangensnom osi**.

PRIMJER 4.

Nacrtajmo $E(t)$ na trigonometrijskoj kružnici i $\operatorname{tg} t$ na tangensnoj osi ako je t:

a) $\frac{9\pi}{4}$ **b)** $\frac{3\pi}{4}$

c) 1998π **d)** $-\frac{3\pi}{4}$.



Funkcija kotangens

Funkcija **kotangens**, u oznaci ctg, definira se ovako

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}, \quad \sin t \neq 0.$$

Brojevi za koje je $\sin t = 0$ su oni koji se preslikaju u točke $I(1,0)$ i $\bar{I}(-1,0)$. Kako je $I = E(2k\pi), k \in \mathbf{Z}$ i $\bar{I} = E(\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$, brojevi za koje je $\sin t = 0$ su oblika $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ pa je domena funkcije ctg skup $\mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$.

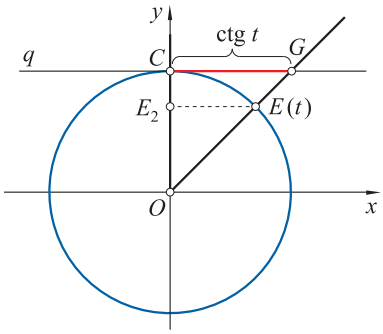
Funkcija kotangens

$$\operatorname{ctg} : \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R} \qquad \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Neka je q tangenta brojevne kružnice k u točki $C(0,1)$. Uzmimo takav realan broj t kojemu namatanjem pridružena točka $E(t)$ koja pripada prvom kvadrantu.

Neka je E_2 ortogonalna projekcija točke $E(t)$ na y-os, a G presjek pravca q i pravca $OE(t)$. Trokuti $OE_2E(t)$ i OCG su slični i kako je $|E_2E(t)| = \cos t, |OC| = 1$ i $|OE_2| = \sin t$, to je $\frac{|CG|}{|CO|} = \frac{|E_2E(t)|}{|E_2O|}$, tj. $|CG| = \frac{\cos t}{\sin t} = \operatorname{ctg} t$, tj. koordinate točke G su $(\operatorname{ctg} t, 1)$.

U ostalim slučajevima kada $E(t)$ pripada ostalim kvadrantima način razmišljanja je sličan, pa zaključujemo sljedeće:



geometrijska interpretacija kotangensa broja t

Kotangens broja t

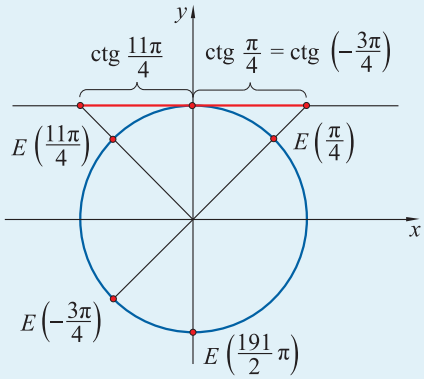
Kotangens broja t je apscisa točke dobivene presjekom pravca q i spojnice točaka O i $E(t)$. Pravac q nazivamo **kotangensnom osi**.

PRIMJER 5.

Nacrtajmo $E(t)$ na trigonometrijskoj kružnici i $\operatorname{ctg} t$ na kotangensnoj osi ako je t:

a) $\frac{\pi}{4}$ **b)** $\frac{11\pi}{4}$

c) $\frac{191}{2}\pi$ **d)** $-\frac{3\pi}{4}$.



PRIMJER 6.

Odredimo predznake trigonometrijskih funkcija u pojedinim kvadrantima.

Ako je $E(t)$ u prvom kvadrantu, tada su obje koordinate te točke pozitivne, tj. $\sin t > 0$, $\cos t > 0$, te su i $\operatorname{tg} t$ i $\operatorname{ctg} t$ pozitivni. Za ostale kvadrante vrijedi ova tablica:

kvadrant	I.	II.	III.	IV.
$\sin t$	+	+	−	−
$\cos t$	+	−	−	+
$\operatorname{tg} t$	+	−	+	−
$\operatorname{ctg} t$	+	−	+	−

ZADATCI 1.2.

1. Nacrtaj $E(t)$ i istakni sinus i kosinus od t ako je t jednako:

a 32π **b** -14π: **c** -197π: **d** $\frac{321\pi}{2}$ **e** $-\frac{141\pi}{2}$ **f** $\frac{33\pi}{4}$.

2. Nađi $\sin t$, $\cos t$ ako je t:

a 27π **b** -18π **c** 384π **d** $\frac{21}{2}\pi$ **e** $-\frac{43}{2}\pi$ **f** $-\frac{1997}{2}\pi$.

3. Nacrtaj na trigonometrijskoj kružnici točke $E(t)$ za koje vrijedi:

a $\sin t = \frac{3}{4}$ **b** $\sin t = \frac{1}{6}$ **c** $\sin t = -\frac{1}{4}$

d $\cos t = \frac{1}{3}$ **e** $\cos t = -\frac{1}{2}$ **f** $\cos t = -\frac{2}{3}$.

4. Nacrtaj $E(t)$ i istakni tangens i kotangens od t (ukoliko postoje) ako je t jednako:

a 36π **b** -43π **c** $\frac{19}{2}\pi$ **d** $\frac{-123\pi}{2}$ **e** $\frac{145\pi}{4}$ **f** $-\frac{237\pi}{4}$.

5. Istakni na trigonometrijskoj kružnici točke $E(t)$ za koje vrijedi:

a $\operatorname{tg} t = 1$ **b** $\operatorname{tg} t = 2$ **c** $\operatorname{tg} t = -\frac{5}{4}$

d $\operatorname{ctg} t = 1.5$ **e** $\operatorname{ctg} t = -1.8$ **f** $\operatorname{ctg} t = 2$.

6. Izračunaj:

a $\cos\pi - \cos 4\pi + \sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos(-\pi)$

b $\sin\frac{3\pi}{2} - \cos\pi + \sin\pi$

c $\sin 1996\pi - \cos 1997\pi + \operatorname{tg} 1998\pi$

d $\dfrac{\operatorname{tg} 14\pi + \sin\left(-\frac{17}{2}\pi\right)}{\sin 27\pi - \cos 27\pi}$

e $\dfrac{\sin\frac{19\pi}{2} + \cos^2\left(-\frac{5\pi}{2}\right)}{\sin^2\left(-\frac{19\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)}$

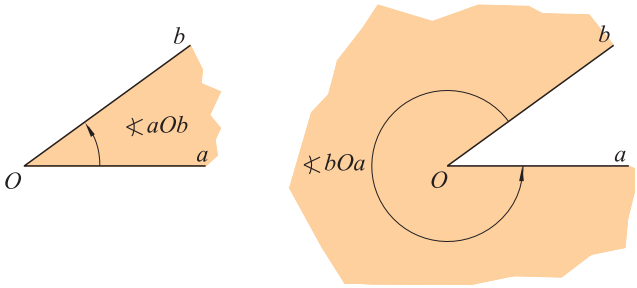
f $\dfrac{\cos^2 7\pi - 2\sin^2 7\pi}{\cos^2\frac{17\pi}{2} + 2\sin^2\frac{17\pi}{2}}$.

1.3. Trigonometrijske funkcije kutova

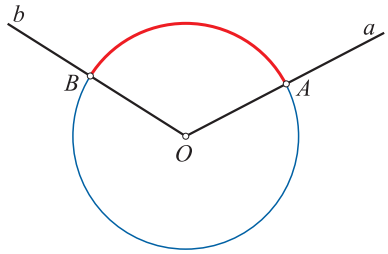
Kut i mjere kuta

Kutom $\sphericalangle aOb$ nazivamo dio ravnine određen polupravcima a i b sa zajedničkim vrhom O koji bi prebrisao polupravac a pri rotaciji u pozitivnom smjeru oko točke O do polupravca b.

Polupravac a zovemo prvi ili početni krak kuta $\sphericalangle aOb$, a polupravac b drugi ili završni krak kuta.



Kutovi $\sphericalangle aOb$ i $\sphericalangle bOa$ zajedno čine puni kut.



Opišimo oko vrha O kuta $\sphericalangle aOb$ kružnicu k jediničnog polumjera sa središtem u O. Ta kružnica siječe krak a u točki A, a krak b u točki B.

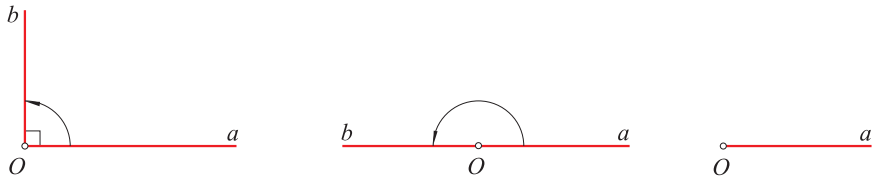
S pomoću luka $\overset{\frown}{AB}$ mjerimo kut $\sphericalangle aOb$. Naime, vrijedi sljedeća definicija.

Glavna mjera

Glavna mjera u radijanima kuta $\sphericalangle aOb$ jest duljina luka $\overset{\frown}{AB}$ pri čemu se od dva moguća luka određena točkama A i B uzima onaj na kojem je kretanje od točke A do točke B u pozitivnom smjeru.

Kažemo da smo kut $\sphericalangle aOb$ izmjerili u radijanima i pišemo $|\sphericalangle aOb| = t_0$ rad, gdje je t_0 duljina luka $\overset{\frown}{AB}$.

Tako, primjerice, nul-kut $\sphericalangle aOa$ ima glavnu mjeru 0 radijana, što kraće zapisujemo 0 rad, pravi kut $\sphericalangle aOb$, $a \perp b$, ima glavnu mjeru $\frac{\pi}{2}$ rad, ispruženi kut $\sphericalangle aOb$, gdje je $a \cup b$ pravac, ima glavnu mjeru π rad.



Pravi kut ima glavnu mjeru $\frac{\pi}{2}$ radijana ili $90°$; ispruženi kut ima mjeru π radijana ili $180°$; nul-kut ima mjeru 0 radijana ili $0°$.

Povijesno gledano, stariji način mjerenja kutova jest mjerenje u stupnjevima. U tom slučaju je glavna mjera ispruženog kuta jednaka 180 stupnjeva, što kraće zapisujemo sa $180°$, a kut s mjerom od t radijana ima

$$s = \frac{180}{\pi} \cdot t$$

stupnjeva. Pri toj pretvorbi obično koristimo i manje dijelove stupnja: minute ($1' = \frac{1}{60}$ stupnja) i sekunde ($1'' = \frac{1}{60}$ minute). U nekim dijelovima svijeta u upotrebi je i mjerenje kutova u gradima. U tom je slučaju glavna mjera ispruženog kuta jednaka 200 grada.

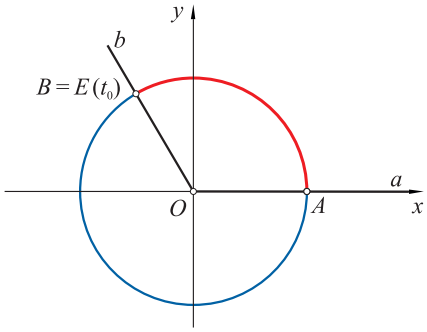
U sljedećoj tablici navedene su mjere nekih kutova u stupnjevima i u radijanima:

mjera u stupnjevima	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$75°$	$80°$	$90°$	$270°$
mjera u radijanima	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$

Uvedimo koordinatni sustav $(O; x, y)$ tako da se vrh O kuta $\sphericalangle aOb$ podudara s ishodištem O, a prvi krak a s pozitivnim dijelom x-osi, te neka je k trigonometrijska kružnica. Sjetimo li se postupka namatanja pravca na kružnicu, zaključujemo da je

$$B = E(t_0)$$

gdje je t_0 glavna mjera kuta, tj. duljina luka $\overset{\frown}{AB}$. Ali, vrijedi i $B = E(t_0 + 2k\pi)$ za svaki cijeli broj k. Brojeve $t_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ nazivamo **mjere** kuta $\sphericalangle aOb$.



Mjera kuta

Ako je t_0 glavna mjera kuta $\sphericalangle aOb$ onda svaki element skupa

$$\{t_0 + 2k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$$

nazivamo **mjerom** tog kuta.

Dakle, kad kažemo "kut od $30°$", "kut od $\frac{\pi}{6}$ rad" ili "kut od $390°$", "kut od $-\frac{11\pi}{6}$" radi se o istom kutu, ali s različitim mjerama: $30°$, $\frac{\pi}{6}$ rad, $390°$, $-\frac{11\pi}{6}$ rad. Ukoliko u mjeri kuta ne piše kratica "rad", podrazumijeva se da se radi o radijanskoj mjeri.

PRIMJER 1.

Sljedećim kutovima nađimo glavne mjere u radijanima:

a) 328π **b)** $\frac{431}{3}\pi$ **c)** $1081°$ **d)** $-213°$.

a) Kako je $328\pi = 0 + 2 \cdot 164\pi$, to je glavna mjera tog kuta jednaka 0 radijana.

b) Iz $\frac{431}{3}\pi = \frac{71 \cdot 6 + 5}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi + 71 \cdot 2\pi$ slijedi da je glavna mjera jednaka $\frac{5}{3}\pi$ radijana.

c) $1081° = 3 \cdot 360° + 1°$, pa je glavna mjera jednaka $1°$, tj. $\frac{\pi}{180}$ rad.

d) $-213° = -360° + 147°$, te je glavna mjera jednaka $147°$, tj. $\frac{147\pi}{180}$ rad.

PRIMJER 2.

Kutu od $75°$ napišimo radijansku mjeru koja pripada intervalu

a) $[0, 2\pi\rangle$ **b)** $[-10\pi, -8\pi\rangle$ **c)** $[122\pi, 124\pi\rangle$.

a) Pretvorimo $75°$ u radijane: $75° = \frac{75\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}$ i to je glavna mjera u radijanima.

b) $\frac{5\pi}{12} = 10\pi + \left(-10\pi + \frac{5\pi}{12}\right) = 10\pi - \frac{115\pi}{12}$ i tražena mjera iz tog intervala je $-\frac{115\pi}{12}$.

c) $\frac{5\pi}{12} = -122\pi + \left(122\pi + \frac{5\pi}{12}\right) = -122\pi + \frac{1469\pi}{12}$, te je tražena mjera $\frac{1469\pi}{12}$.

PRIMJER 3.

Danu radijansku mjeru kuta napišimo u stupnjevima:

a) 1 rad **b)** 34 rad **c)** -28.2 rad.

a) Koristeći formulu imamo

$$s = \frac{180}{\pi} t = \frac{180}{t} = 57.295779^\circ.$$

Također, mogli smo se koristiti i džepnim računalom tako da u stanju RAD upišemo dani broj u radijanima, tj. 1, te prelaskom u stanje DEG dobivamo broj u stupnjevima. Uobičajeno je ovaj broj zapisati i s pomoću minuta i sekunda. Broj minuta dobivamo tako da oduzmemo cjelobrojni dio i razliku pomnožimo sa 60: $0.295779^\circ \cdot 60 = 17.74674'$. Oduzmemo li od ovog broja cjelobrojni dio i ostatak pomnožimo sa 60, dobit ćemo sekunde: $0.74674' \cdot 60 = 44.80''$. Dakle, mjera u stupnjevima kuta od 1 radijana iznosi $57^\circ 17' 45''$. Ovaj postupak pretvaranja stupnjeva u minute i sekunde je na većini džepnih računala također automatiziran (tipka → D.MS).

b) $34 \text{ rad} = 1948.056503^\circ = 1948^\circ 3' 23''$.

c) $-28.2 \text{ rad} = -1615.740982^\circ = -1615^\circ 44' 28''$.

PRIMJER 4.

Napišimo $35^\circ 2' 14''$ u radijanima.

Prvo je potrebno dani broj pretvoriti u stupnjeve: $s = 35^\circ 2' 14'' = 35 + \frac{2}{60} + \frac{14}{3600} = 35.037222^\circ$, a zatim $t = \frac{s\pi}{180} = 0.611515$ rad.

I ova pretvorba iz oblika "stupnjevi-minute-sekunde" u stupnjeve, te u radijane može se vršiti s pomoću džepnog računala. Naime, računalo postavimo u stanje DEG te unesemo podatak u obliku 35.0214. Pritiskom na tipku → DEG dobivamo 35.037222, a zatim prelaskom u stanje RAD taj broj se pretvara u radijane.

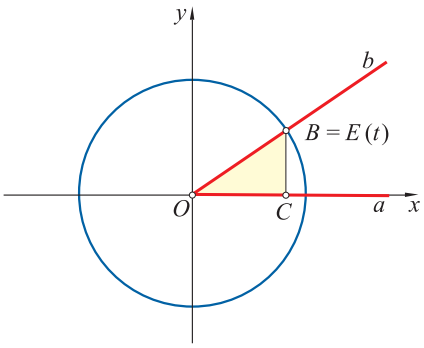
Trigonometrijske funkcije kuta

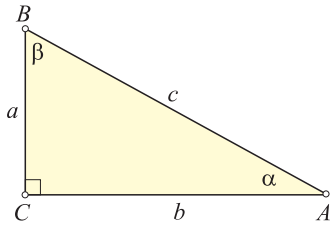
Promotrimo sada šiljasti kut $\sphericalangle aOb$. Dakle, točka B je u prvom kvadrantu i $B = E(t)$.

Do sada smo naučili da su uz taj kut vezana dva pojma vrlo sličnih naziva:

- trigonometrijske funkcije šiljastog kuta $\sphericalangle aOb$
- trigonometrijske funkcije broja t.

Ta dva pojma definirali smo nezavisno. Prvi pojam definiran je u 2. razredu. Ponovimo te definicije.





U pravokutnom trokutu ABC vrijedi

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta,$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta,$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \operatorname{ctg}\beta,$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\beta.$$

Drugi pojam definiran je u prethodnim poglavljima. Tako je sinus broja t ordinata točke $B = E(t)$ trigonometrijske kružnice, kosinus istog broja t je apscisa točke B, tangens broja t je kvocijent sinusa i kosinusa od t, a kotangens broja t je kvocijent kosinusa i sinusa od t. Povežimo sada trigonometrijske funkcije kutova s trigonometrijskim funkcijama realnih brojeva.

Promotrimo opet sliku šiljastog kuta na prethodnoj stranici. Sinus broja t je duljina $|BC|$. Ali, uočimo li pravokutan trokut OCB, vidimo da je sinus kuta $\sphericalangle aOb$ omjer $\frac{|BC|}{|OB|}$, što je jednako $|BC|$ jer je kružnica jedinična.

Dakle, ta dva pojma: sinus šiljastog kuta i sinus njegove mjere se podudaraju. Isto se može pokazati i za ostale trigonometrijske funkcije, tj. vrijedi sljedeće.

Trigonometrijske funkcije šiljastog kuta i trigonometrijske funkcije bilo koje mjere tog kuta se podudaraju.

Ovdje je mjesto i vrijeme da se prisjetimo i trigonometrijskih funkcija nekih značajnih šiljastih kutova.

$t(^\circ)$	t (rad)	$\sin t$	$\cos t$	$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg} t$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Uspostavili smo vezu između trigonometrijskih funkcija šiljastih kutova i trigonometrijskih funkcija realnih brojeva. Prirodno proširenje te veze na trigonometrijske funkcije bilo kakvih kutova dano je sljedećom definicijom.

Trigonometrijske funkcije kuta

Neka je t bilo koja mjera kuta $\sphericalangle aOb$ u radijanima. Vrijednost trigonometrijske funkcije kuta $\sphericalangle aOb$ jednaka je vrijednosti te trigonometrijske funkcije realnog broja t.

Istaknimo: sinus pravog kuta jednak je $\sin\frac{\pi}{2}$, tj. 1; sinus ispruženog kuta jednak je $\sin\pi$, tj. 0 itd.

PRIMJER 5.

Izračunajmo:

a) $\sin\frac{31\pi}{2}$ **b)** $\cos 750^\circ$.

a) $\frac{31\pi}{2} = \frac{7\cdot 4+3}{2}\pi = 14\pi + \frac{3\pi}{2}$. Glavna mjera je $\frac{3\pi}{2}$. Dakle, $\sin\frac{31\pi}{2} = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$.

b) Prvo nađimo glavnu mjeru tog kuta: $750^\circ = 2\cdot 360^\circ + 30^\circ$. Glavna mjera je 30°. Tada je $\cos 750^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ZADATCI 1.3.

1. Pretvori u stupnjeve, minute i sekunde:

a 1.8 rad **b** 21.35 rad **c** -4.2 rad.

2. Pretvori u radijane:

a $10^\circ 21' 43''$ **b** $31^\circ 2' 59''$ **c** $121^\circ 1''$.

3. Napiši još bar 4 mjere kuta u radijanima čija je jedna mjera zadana, te pretvori sve te mjere iz radijana u stupnjeve:

a $\frac{\pi}{2}$ **b** $\frac{8}{3}\pi$ **c** $\frac{19\pi}{4}$ **d** $-\frac{141}{4}\pi$.

4. Napiši još bar 4 mjere u stupnjevima kuta čija je jedna mjera zadana, te pretvori sve te mjere iz stupnjeva u radijane:

a 330° **b** -60° **c** 1440° **d** -1998°

5. Odredi glavnu mjeru u radijanima kutova kojima su dane mjere:

a $\frac{13\pi}{2}$ **b** $\frac{148}{5}\pi$ **c** $\frac{872}{3}\pi$ **d** -144π.

6. Odredi glavnu mjeru u stupnjevima kutova kojima su dane mjere:

a 1080° **b** 456° **c** 12345° **d** -345°.

7. Odredi glavnu mjeru i sinus danog kuta:

a 390° **b** 1110° **c** -330° **d** 3630° **e** 420° **f** 780°
g -300° **h** 2580° **i** 405° **j** 765° **k** -315° **l** 3645°.

8. Odredi glavnu mjeru i kosinus kuta:

a $\frac{9\pi}{4}$ **b** $-\frac{\pi}{4}$ **c** $-\frac{9\pi}{4}$ **d** $\frac{81\pi}{4}$ **e** $\frac{7\pi}{3}$ **f** $-\frac{\pi}{3}$
g $-\frac{7\pi}{3}$ **h** $\frac{43\pi}{3}$ **i** $\frac{13\pi}{6}$ **j** $-\frac{\pi}{6}$ **k** $-\frac{13\pi}{6}$ **l** $\frac{133\pi}{6}$.

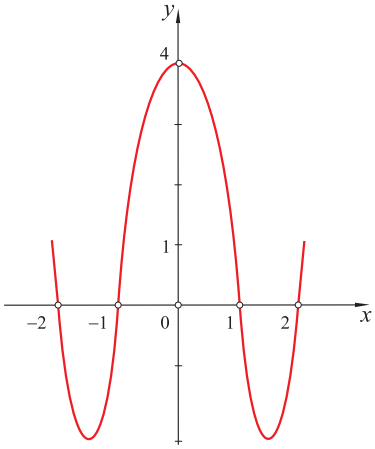
1.4. Parnost kosinusa, neparnost sinusa, tangensa i kotangensa

Parne i neparne funkcije

Promotrimo funkciju $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$. Za nju vrijedi

$$f(-x) = (-x)^4 - 5(-x)^2 + 4$$
$$= x^4 - 5x^2 + 4 = f(x),$$

tj. vrijednosti funkcije jednake su ako su argumenti suprotni brojevi. Funkciju s takovim svojstvom nazivamo **parna** funkcija. Graf je parne funkcije osnosimetričan s obzirom na y-os.



Parna i neparna funkcija

Za funkciju $f : D_f \to \mathbf{R}$ kažemo da je **parna** ako za svaki $x \in D_f$ vrijedi $f(-x) = f(x)$.

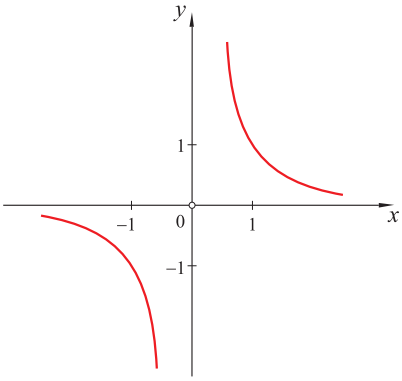
Za funkciju $f : D_f \to \mathbf{R}$ kažemo da je **neparna** ako za svaki $x \in D_f$ vrijedi $f(-x) = -f(x)$.

S druge strane, za funkciju $g(x) = \dfrac{1}{x^3}$ vrijedi

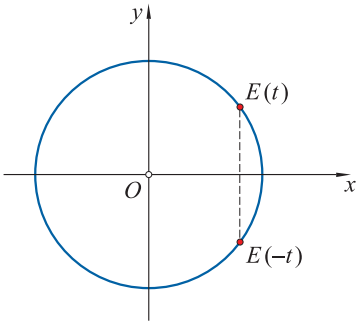
$$g(-x) = \frac{1}{(-x)^3} = -g(x), \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{0\},$$

tj. u suprotnim brojevima g poprima suprotne vrijednosti. Funkcije s tim svojstvom nazivamo **neparne** funkcije. Graf je neparne funkcije centralnosimetričan s obzirom na ishodište koordinatnog sustava.

Napomenimo da većina funkcija nije ni parna ni neparna.



Parnost kosinusa, neparnost sinusa



Promotrimo sada točke na brojevnoj kružnici kojima su pridruženi brojevi t i $-t$.

Točke $E(t)$ i $E(-t)$ simetrične su s obzirom na x-os, stoga imaju jednake apscise i suprotne ordinate. Dakle, vrijede sljedeće tvrdnje.

Za svaki realni broj t vrijedi $\cos(-t) = \cos t$, tj. kosinus je parna funkcija.

Za svaki realni broj t vrijedi $\sin(-t) = -\sin t$, tj. sinus je neparna funkcija.

PRIMJER 1.

Ispitajmo parnost funkcija

a) $f_1(x) = \sin 2x$ **b)** $f_2(x) = \sin^4 8x - \cos x$.

a) $f_1(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f_1(x)$, te je f_1 neparna.

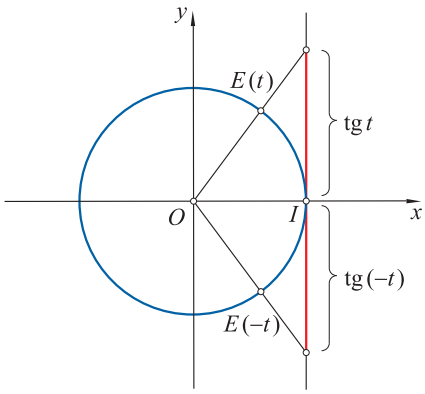
b) $f_2(-x) = \sin^4(-8x) - \cos(-x) = (-\sin 8x)^4 - \cos x = \sin^4 8x - \cos x = f_2(x)$, pa je f_2 parna funkcija.

Neparnost tangensa i kotangensa

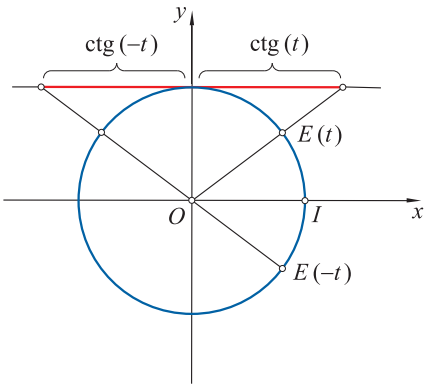
Koristeći definiciju tangensa, parnost kosinusa i neparnost sinusa imamo

$$\operatorname{tg}(-t) = \frac{\sin(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t, \quad \forall t \in D_{\operatorname{tg}}.$$

Dakle, tangens je neparna funkcija.



Tangensi brojeva t i $-t$ su suprotni brojevi.



Kotangensi brojeva t i $-t$ su suprotni brojevi.

Na isti način dobivamo da je kotangens također neparna funkcija. Naime,

$$\operatorname{ctg}(-t) = \frac{\cos(-t)}{\sin(-t)} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

Neparnost tangensa i kotangensa

Funkcije tangens i kotangens su neparne, tj. vrijedi

$$\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t, \quad \forall t \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\},$$

$$\operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t, \quad \forall t \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}.$$

ZADATCI 1.4.

1. Pojednostavni izraze:

a $\sin x \cos(-y) + \sin(-x)\cos(-y)$ **b** $\sin t \cos u - \sin t \cos(-u)$

c $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}(-\beta) - \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{tg}(-\beta)$ **d** $\operatorname{tg} x \sin y - \operatorname{ctg}(-x)\sin(-y)$.

2. Provjeri jesu li sljedeće funkcije parne:

a $f(x) = x^6 + 8x^4 - 2$ **b** $f(x) = 11x^4 - 23$ **c** $f(x) = \cos 5x$

d $f(x) = 3\cos x$ **e** $f(x) = 7\cos 11x$ **f** $f(x) = \sin^2 x$.

3. Dokaži jesu li sljedeće funkcije parne:

a $f(x) = |x| + 2x^2$ **b** $f(x) = 2\cos x + 13\cos^3 x$ **c** $f(x) = \sin^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$

d $f(x) = \sin^4 2x$ **e** $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{x^4}$ **f** $f(x) = \dfrac{\cos x - \operatorname{ctg}^2 x}{1 + \cos x}$.

4. Provjeri jesu li sljedeće funkcije neparne:

a $f(x) = x^7 - 3x^5 + 4x$ **b** $f(x) = 8x^{11} + 12x^3$ **c** $f(x) = \sin 7x$

d $f(x) = 4\sin 2x$ **e** $f(x) = \sin^3 x$ **f** $f(x) = \sin x \cos x$.

5. Dokaži da su sljedeće funkcije neparne:

a $f(x) = \sqrt[3]{x} - x$ **b** $f(x) = \operatorname{tg} x + \sin x$ **c** $f(x) = 3\operatorname{tg} x - 4\operatorname{ctg} x$

d $f(x) = 2\operatorname{tg} x - \sin x \cos x$ **e** $f(x) = \dfrac{1 - \cos^4 x}{\sin x}$ **f** $f(x) = \dfrac{x + \operatorname{tg} x}{\sin x}$.

6. Ispitaj parnost ovih funkcija:

a $f(x) = x + \sin 2x$ **b** $f(x) = \sin^3 3x \cdot \cos 5x$ **c** $f(x) = \dfrac{3}{2}\sin 2x - \dfrac{\pi}{3}$

d $f(x) = \operatorname{tg}|x| - 1$ **e** $f(x) = x^4 + \cos x(1 + \sin x)$ **f** $f(x) = 2|\sin x| - \operatorname{ctg}^2 3x$

g $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ **h** $f(x) = \dfrac{\cos x \cdot \sin 2x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x}$ **i** $f(x) = \dfrac{x + \sin^3 x}{\operatorname{tg} 4x}$

j $f(x) = \dfrac{\cos x - \sin^4 x}{\operatorname{ctg}^2 x}$ **k** $f(x) = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$ **l** $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}$

m $f(x) = \dfrac{5\cos^3 x}{|\sin x + x|}$ **n** $f(x) = \dfrac{x^4 + \operatorname{tg}(x^2 + 4)}{x - \operatorname{tg} x}$.

1.5. Periodičnost trigonometrijskih funkcija

Periodičnost sinusa i kosinusa

Kao što smo već na početku spomenuli, brojevi koji se razlikuju za višekratnik broja 2π, pridruženi su na brojevnoj kružnici istoj točki, tj. vrijedi

$$E(t) = E(t + 2k\pi) \quad \forall t \in \mathbf{R}, \ \forall k \in \mathbf{Z}.$$

Napišemo li tu nejednakost s pomoću koordinata, dobivamo

$$\begin{aligned} \sin t &= \sin(t + 2k\pi), \\ \cos t &= \cos(t + 2k\pi), \quad \forall t \in \mathbf{R}, \ \forall k \in \mathbf{Z}, \end{aligned} \tag{1}$$

tj. sinus i kosinus su **periodične** funkcije. Izrecimo to svojstvo za općenitu funkciju.

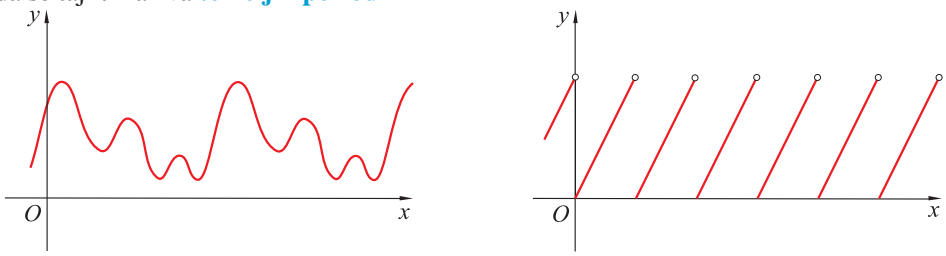
Periodična funkcija

Ako za funkciju $f : D_f \to \mathbf{R}$ postoji $\tau > 0$ takav da je

$$f(x + \tau) = f(x), \quad \text{za svaki } x \in D_f, \tag{2}$$

tada funkciju f nazivamo **periodična** funkcija.

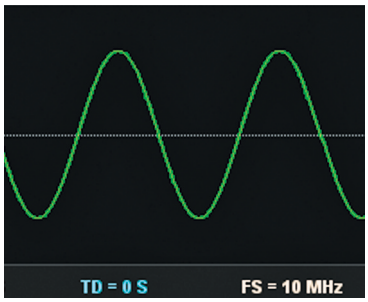
Pozitivni brojevi τ za koje vrijedi (2) nazivaju se **periodi** funkcije f. Ako postoji najmanji takav pozitivan broj τ, tada se taj τ naziva **temeljni period**.



grafovi nekih periodičkih funkcija

Dakle, iz relacije (1) zaključujemo da su periodi za funkcije sinus i kosinus $2\pi, 4\pi, 6\pi \ldots$

Temeljni period za sinus i kosinus



• Pokažimo da je 2π temeljni period funkcija sinus i kosinus. Neka je $\tau > 0$ temeljni period funkcije sinus. Uvrstimo li u (2) $x = \frac{\pi}{2}$, dobit ćemo

$$\sin\left(\tau + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2}.$$

Kako je $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, ordinata točke $E\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ jednaka je 1. Na brojevnoj kružnici jedina točka kojoj je ordinata jednaka 1 je točka $(0, 1)$, a njoj su pridruženi brojevi $\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2} \ldots$ Dakle, $\tau \in \{0, -2\pi, 2\pi, -4\pi, 4\pi \ldots\}$, a najmanji pozitivni element tog skupa je 2π, što znači da je 2π upravo temeljni period.

• Pokažimo da je 2π temeljni period i za funkciju kosinus.

U relaciju $f(x+\tau)=f(x)$ uvrstimo $f=\cos$ i $x=0$ pa dobivamo

$$\cos\tau=1.$$

Na brojevnoj kružnici točka s apscisom 1 je točka $I=E(2k\pi)$, $k\in\mathbf{Z}$. Dakle, periodi za kosinus su $2\pi, 4\pi, 6\pi\ldots$, a najmanji od njih je upravo 2π.

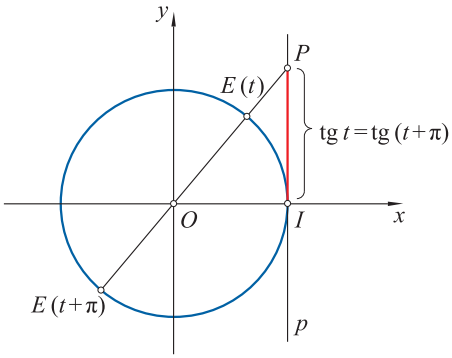
Periodičnost tangensa i kotangensa

Pokažimo da je tangens također periodična funkcija. Iz relacije (1) vrijedi

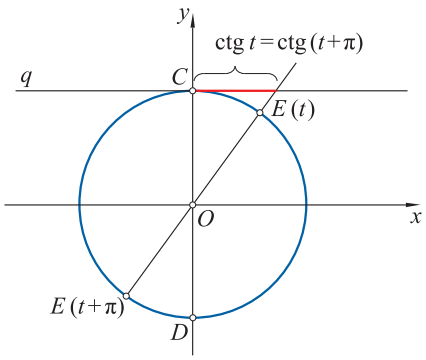
$$\operatorname{tg}(t+2k\pi)=\frac{\sin(t+2k\pi)}{\cos(t+2k\pi)}=\frac{\sin t}{\cos t}=\operatorname{tg} t,\quad t\in D_{\operatorname{tg}},\quad k\in\mathbf{Z},$$

čime je dokazano da je tangens periodična funkcija. Njeni periodi su $2k\pi, k\in\mathbf{N}$. Ali, period tangensa je i broj π. Uvjerimo se da je to stvarno tako.

Spojnice ishodišta i točaka $E(t)$ i $E(t+\pi)$ sijeku pravac p u istoj točki P, a kako su tangensi brojeva t i $t+\pi$ upravo ordinata točke P, slijedi da je $\operatorname{tg} t=\operatorname{tg}(t+\pi)$, tj. π je period funkcije tangens.



Tangensi brojeva t i $t+\pi$ su jednaki.



I kotangensi brojeva t i $t+\pi$ su jednaki.

Za funkciju kotangens situacija je vrlo slična. Iz geometrijske interpretacije kotangensa (vidi sliku) vidljivo je da brojevi t i $t+\pi$ imaju iste kotangense. Dakle, π je period i funkcije kotangens.

Temeljni period za tangens i kotangens

- Dokažimo da je π temeljni period za funkciju tangens.

Označimo sa τ temeljni period od tangensa. Dakle, vrijedi

$$\operatorname{tg} t=\operatorname{tg}(t+\tau)\quad \forall t\in D_{\operatorname{tg}}. \tag{3}$$

Uvrstimo li u (3) $t=0$, dobit ćemo $\operatorname{tg}\tau=0$. Točke $E(t)$ za koje je $\operatorname{tg} t=0$ su one čija spojnica s ishodištem O presijeca pravac p u točki I, tj. to su točke I i $\overline{I}$. Točki I priduženi su brojevi oblika $2k\pi, k\in\mathbf{Z}$, a točki $\overline{I}$ brojevi $\pi+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$. Dakle, $\tau\in\{k\pi : k\in\mathbf{Z}\}$, a najmanji pozitivni element tog skupa je π.

- Dokažimo da je π temeljni period i za funkciju kotangens.

Označimo sa τ temeljni period kotangensa. Dakle, vrijedi

$$\operatorname{ctg} t=\operatorname{ctg}(t+\tau)\quad \forall t\in D_{\operatorname{ctg}}. \tag{4}$$

Uvrstimo li u (4) $t = \frac{\pi}{2}$, dobit ćemo $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\tau\right) = 0$. Točke $E(x)$ za koje je $\operatorname{ctg} x = 0$ su one čija spojnica s ishodištem O presijeca kotangensnu os q u točki C, tj. $E(x) = C$ ili $E(x) = D$. Točki C pridruženi su brojevi oblika $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, a točki D brojevi $\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Dakle, $\frac{\pi}{2}+\tau \in \left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi; k \in \mathbf{Z}\right\}$, tj. $\tau \in \{2k\pi, \pi + 2k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$. Najmanji pozitivan element tog skupa je π, čime smo dokazali da je π temeljni period kotangensa.

Izrecimo te tvrdnje u obliku poučka.

Poučak

Trigonometrijske funkcije su periodične. Temeljni period za sinus i kosinus je 2π, a za tangens i kotangens je π.

Za periodične funkcije vrijede ova svojstva:

1. Ako je τ temeljni period funkcije $f(x)$, tada je $\frac{\tau}{a}$ temeljni period funkcije $f(ax)$.
2. Ako je τ period od f, tada je i $n\tau$ period od f, $n \in \mathbf{N}$.
3. Neka je f periodična s periodom τ_1, a g periodična s periodom τ_2, pri čemu je $\frac{\tau_1}{\tau_2} \in \mathbf{Q}$. Tada je njihova kombinacija $\alpha f + \beta g$ periodična funkcija, α, $\beta \in \mathbf{R}$, pri čemu je period od $\alpha b + \beta g$ zajednički višekratnik brojeva τ_1 i τ_2.

Koristeći se ovim svojstvima izračunajmo sljedeći primjer.

PRIMJER 1.

Odredimo period funkcije

$$f(x) = \sin 2x - 3\cos 5x + \operatorname{tg} 3x.$$

Prema prvom svojstvu vrijedi da su $\tau_1 = \pi$, $\tau_2 = \frac{2\pi}{5}$ i $\tau_3 = \frac{\pi}{3}$ temeljni periodi funkcija $\sin 2x$, $\cos 5x$ i $\operatorname{tg} 3x$. Prema trećem svojstvu period njihove kombinacije je zajednički višekratnik brojeva τ_1, τ_2 i τ_3, a u ovom slučaju to je

$$V\left(\pi, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right) = V\left(\frac{15\pi}{15}, \frac{6\pi}{15}, \frac{5\pi}{15}\right) = \frac{30\pi}{15} = 2\pi.$$

Dakle, period od f je 2π.

ZADATCI 1.5.

1. Koristeći neparnost i periodičnost sinusa, te podatak $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ izračunaj:

a $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ **b** $\sin\frac{7\pi}{3}$ **c** $\sin\frac{181\pi}{3}$ **d** $\sin\frac{17\pi}{3}$.

2. Ako je $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, koristeći parnost i periodičnost kosinusa izračunaj:

a $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **b** $\cos\frac{7\pi}{4}$ **c** $\cos\left(-\frac{1999\pi}{4}\right)$ **d** $\cos\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$.

3. Ako je $\cos 10° = 0.9848$, izračunaj:

a $\cos 370°$ **b** $\cos 1070°$ **c** $\cos(-10°)$ **d** $\cos(-710°)$.

4. Ako je $\sin 25° = 0.4226$, izračunaj:

a $\sin 385°$ **b** $\sin 1105°$ **c** $\sin(-25°)$ **d** $\sin(-1465°)$.

5. Ako je $\operatorname{tg} 6 = -0.291$, izračunaj:

a $\operatorname{tg}(-6)$ **b** $\operatorname{tg}(6 + 14\pi)$ **c** $\operatorname{tg}(1999\pi - 6)$ **d** $\operatorname{tg}(6 - 573\pi)$.

6. Pojednostavni izraze:

a $\sin(14\pi - x) - \cos(14\pi + x)$

b $\cos(x + 18\pi) - \operatorname{tg}(x - 9\pi)$

c $\cos(16\pi + 2x) + \cos(90\pi - 2x)$

d $\dfrac{\sin(x + 18\pi) - 4\sin(x - 2\pi)}{\cos(20\pi + x) + 3\cos(22\pi - x)}$

e $\dfrac{\operatorname{tg}(x - 15\pi) - 5\operatorname{tg}(16\pi - x)}{\operatorname{ctg}(x + 17\pi) + 2\operatorname{ctg}(x - 18\pi)}$

f $\dfrac{\sin(2\pi - x) - \operatorname{tg}(x + \pi)}{\cos(4\pi - x) + \operatorname{ctg}(x + \pi)}$.

7. Dokaži da je $\dfrac{2\pi}{7}$ temeljni period funkcije $f(x) = \sin 7x$.

8. Dokaži da su sljedeće funkcije periodične i odredi im temeljni period:

a $f(x) = 3\sin 2x$ **b** $f(x) = 7\sin 8x$ **c** $f(x) = 2\cos\left(7x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

d $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos 15x$ **e** $f(x) = 4\operatorname{tg}\dfrac{5}{3}x$ **f** $f(x) = \sqrt{2}\operatorname{ctg}(\sqrt{3}x - 1)$.

9. Dokaži periodičnost funkcija:

a $f(x) = \sin x + \cos x$

b $f(x) = \sin 4x - 8\cos\left(\dfrac{1}{3}x + \pi\right)$

c $f(x) = \operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x$

d $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{1}{3}x - 3\operatorname{ctg} 8x + \sin\dfrac{4}{3}x$.

10. Dokaži periodičnost funkcija:

a $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ **b** $f(x) = |\cos x|$ **c** $f(x) = \log(\cos x)$

d $f(x) = 2^{\sin x}$ **e** $f(x) = \cos^2 x$ **f** $f(x) = \cos^2|x| + \sin^3 x$.

11. Za koju realnu vrijednosti broja n funkcija $f(x) = \sin\dfrac{7}{n}x$ ima temeljni period 3π?

1.6. Osnovne relacije između trigonometrijskih funkcija

Uočimo pravokutan trokut $OE_1E(t)$. Prema Pitagorinom poučku vrijedi

$$|OE_1|^2 + |E_1E(t)|^2 = |OE(t)|^2$$

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \qquad (1)$$

jer je $|OE_1| = |\cos t|$, a $|E_1E(t)| = |\sin t|$.

Izraz (1) je osnovna relacija koja povezuje sinus i kosinus broja t. Iz nje možemo lako dobiti još dvije formule.

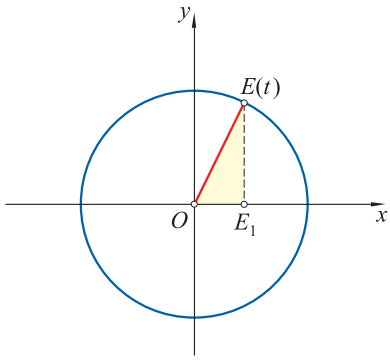
Podijelimo li obje strane osnovne relacije (1) s $\cos^2 t$ dobivamo

$$1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t},$$

a ako obje strane u (1) podijelimo sa $\sin^2 t$, dobivamo

$$\operatorname{ctg}^2 t + 1 = \frac{1}{\sin^2 t}.$$

I konačno primijetimo da je $\operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t}$, tj. $\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1$, što je također jedna od osnovnih veza između trigonometrijskih funkcija.



Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut $OE_1E(t)$ dobivamo osnovnu relaciju.

Osnovni trigonometrijski identiteti

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \qquad \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \qquad \operatorname{ctg}^2 t + 1 = \frac{1}{\sin^2 t}$$

Koristeći ove identitete moguće je s pomoću jedne vrijednosti trigonometrijske funkcije broja t odrediti vrijednost ostalih trigonometrijskih funkcija broja t.

PRIMJER 1.

Odredimo $\cos t, \operatorname{tg} t, \operatorname{ctg} t$ ako je $\sin t = -\frac{11}{61}$, $t \in \left\langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\rangle$.

Iz relacije (1) slijedi

$$\cos t = \pm\sqrt{1 - \sin^2 t},$$

pri čemu predznak korijena ovisi u kojem se kvadrantu nalazi točka $E(t)$. U ovom slučaju $E(t)$ se nalazi u četvrtom kvadrantu pa je

$$\cos t = \sqrt{1 - \left(-\frac{11}{61}\right)^2} = \frac{60}{61}.$$

Sada je $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = -\frac{11}{60}$ i $\operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = -\frac{60}{11}$.

PRIMJER 2.

Dokažimo da vrijedi jednakost $\quad \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}, \quad \sin x \neq 0.$

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + (1+\cos x)^2}{(1+\cos x)\sin x} = \frac{\sin^2 x + 1 + 2\cos x + \cos^2 x}{(1+\cos x)\sin x} = \frac{2 + 2\cos x}{(1+\cos x)\sin x} = \frac{2}{\sin x}.$$

ZADATCI 1.6.

1. Izračunaj vrijednost ostalih trigonometrijskih funkcija broja t ako je $\sin t$ jednak:

a $\frac{4}{5},\ t \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$ **b** $-\frac{63}{65},\ t \in \left\langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\rangle$

c $\frac{12}{37},\ t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ **d** $\frac{1}{\sqrt{2}},\ t \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$.

2. Izračunaj vrijednost ostalih trigonometrijskih funkcija broja t ako je $\cos t$ jednak:

a $\frac{8}{17},\ t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ **b** $\frac{7}{25},\ t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, 0 \right\rangle$

c $-0.8,\ t \in \left\langle \frac{5\pi}{2}, 3\pi \right\rangle$ **d** $-\frac{21}{29},\ t \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$.

3. Izračunaj vrijednost ostalih trigonometrijskih funkcija broja t ako je $\operatorname{tg} t$ jednak:

a $\frac{12}{5},\ t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ **b** $\frac{9}{40},\ t \in \left\langle 6\pi, \frac{13\pi}{2} \right\rangle$

c $-0.75,\ t \in \left\langle \frac{5\pi}{2}, 3\pi \right\rangle$ **d** $-\sqrt{3},\ t \in \left\langle -5\pi, -\frac{11\pi}{2} \right\rangle$.

4. Izračunaj vrijednost ostalih trigonometrijskih funkcija broja t ako je $\operatorname{ctg} t$ jednak:

a $\frac{3}{4},\ t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ **b** $\frac{21}{20},\ t \in \left\langle \pi, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$

c $\frac{7}{24},\ t \in \left\langle 2\pi, \frac{5\pi}{2} \right\rangle$ **d** $-\frac{8}{15},\ t \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$.

5. Ako je $\sin t = -\frac{7}{25},\ t \in \left\langle \pi, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$, izračunaj:

a $\frac{\sin t - \cos t}{(1+\sin t)(1-\cos t)}$ **b** $\frac{\operatorname{tg} t(1-\cos t)}{\sin^2 t}$ **c** $\frac{\operatorname{ctg} t + \operatorname{tg} t + \cos t}{\sin t}$.

6. Ako je $\operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3}$, izračunaj $\sin x$, $\cos x$ i $\operatorname{ctg} x$ pri čemu je $E(x)$ element trećeg kvadranta.

7. Ako je $\operatorname{tg} t = 3$, izračunaj:

a $\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t$ **b** $\frac{\sin t + 3\cos t}{2\sin t - 3\cos t}$ **c** $\frac{\sin^3 t - \cos^3 t}{(\sin t - \cos t)^3}$ **d** $\frac{\sin^2 t - 4\cos^2 t}{2\sin^2 t - \cos^2 t}$.

8. Ako je $\operatorname{ctg} x = -2$, izračunaj:

a $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{ctg}^2 x$ **b** $\frac{\sin x \cdot \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$ **c** $\frac{8\sin x + 2\cos x}{11\sin x - 2\cos x}$ **d** $\frac{3\sin^2 x - 2\cos^2 x}{5\cos^2 x + \sin^2 x}$.

9. Ako je $\operatorname{tg} x = 4$, izračunaj:

a $\frac{1}{\cos^2 x}$ **b** $\cos^2 x$ **c** $\frac{\sin^2 x + 1}{2\sin^2 x + 3}$ **d** $\frac{2\sin^2 x + 4\cos^2 x - 1}{5\sin^2 x - \cos^2 x + 2}$.

10. Dokaži da vrijedi:

a $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$

b $\sin x \cos x = \frac{1}{2}((\sin x + \cos x)^2 - 1)$

c $\sin x - \cos x = \pm\sqrt{(\sin x + \cos x)^2 - 4\sin x \cos x}$.

11. Ako je $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, izračunaj:

a $\sin x \cdot \cos x$

b $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$

c $\sin^2 x - \cos^2 x$

d $\sin^3 x + \cos^3 x$.

12. Ako je $\sin x \cdot \cos x = -\frac{1}{2}$, izračunaj:

a $\sin x + \cos x$

b $\sin^3 x - \cos^3 x$

c $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$

d $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^4 x - \cos^4 x}$.

13. Dokaži da izrazi ne ovise o broju x:

a $\cos^4 x + \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x$

b $\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x$

c $\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^4 x + 2\sin^4 x \cos^2 x$

d $\sin^4 x(3 - 2\sin^2 x) - \cos^4 x(2\cos^2 x - 3)$.

14. Koristeći osnovne trigonometrijske relacije dokaži sljedeće jednakosti:

a $\cos x \sin^2 x + \cos^3 x = \cos x$

b $\sin^3 t + \sin t \cos^2 t = \sin t$

c $\sin^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

d $\operatorname{tg} x \cos x - \operatorname{tg} x \cos^3 x = \sin^3 x$

e $1 + \sin x - \cos^2 x = \sin x(1 + \sin x)$

f $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$.

15. Koristeći osnovne trigonometrijske relacije dokaži sljedeće jednakosti:

a $\frac{1 - (\sin x - \cos x)^2}{\cos^2 x} = 2\operatorname{tg} x$

b $\frac{1 - (\cos x + \sin x)^2}{\sin^2 x} = -2\operatorname{ctg} x$

c $\frac{(\cos x - 1)^2 + \sin^2 x}{\cos x - 1} = -2$

d $\frac{(\sin x + 1)^2 + \cos^2 x}{\sin x + 1} = 2$

e $\frac{\cos t}{1 - \cos t} - \frac{\cos t}{1 + \cos t} = 2\operatorname{ctg}^2 t$

f $\frac{\sin x}{1 + \sin x} - \frac{\sin x}{1 - \sin x} = -2\operatorname{tg}^2 x$.

16. Koristeći osnovne trigonometrijske relacije dokaži sljedeće jednakosti:

a $\frac{1-(\sin x+\cos x)^4}{4\cos^2 x} = -\sin^2 x - \operatorname{tg} x$

b $\frac{(\sin x-\cos x)^4+(\sin x+\cos x)^4-2}{\sin^2 x} = 8\cos^2 x$

c $\frac{(\sin x-\cos x)^3+(\sin x+\cos x)^3}{2\sin x} = 1+2\cos^2 x$

d $\frac{(\sin x-\cos x)^3-(\sin x+\cos x)^3}{2\cos x} = -1-2\sin^2 x$.

17. Na osnovi veza između trigonometrijskih funkcija svedi na jednostavniji oblik sljedeće izraze:

a $\sin x - \sin x \cos^2 x$

b $\cos t - \cos t \sin^2 t$

c $(\sin t - \cos t)^2 + (\sin t + \cos t)^2$

d $(\cos x + \sin x)^3 - (\sin x - \cos x)^3$

e $(1-\cos x)(1+\cos x) - (1-\sin x)(1+\sin x)$

f $\sqrt{1 - \sin t}\sqrt{1 + \sin t}$.

18. S pomoću osnovnih trigonometrijskih identiteta svedi na jednostavniji oblik sljedeće izraze:

a $\dfrac{1-\cos^2 t}{\sin t\cos t}$ **b** $\dfrac{1}{\cos t}-\cos t-\dfrac{\sin^2 t}{\cos t}$ **c** $\dfrac{1+\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x}$

d $\dfrac{1}{1+\cos t}+\dfrac{1}{1-\cos t}$ **e** $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}-\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ **f** $\dfrac{\sin a}{1+\cos a}+\dfrac{1+\cos a}{\sin a}-\dfrac{1}{\sin a}$

g $\dfrac{\cos 2x}{1+\sin 2x}-\dfrac{1-\sin 2x}{\cos 2x}$ **h** $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

19. S pomoću osnovnih trigonometrijskih identiteta svedi na jednostavniji oblik sljedeće izraze:

a $\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} x\sin^2 x$ **b** $(1+\operatorname{tg}^2 x)\cos x$ **c** $\dfrac{\cos t-\sin t}{1-\operatorname{ctg} t}$

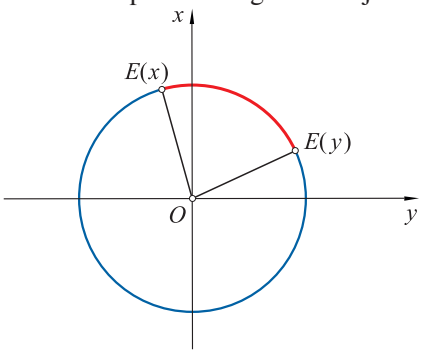
d $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}$ **e** $\dfrac{1}{(1+\operatorname{tg} x)^2+(1-\operatorname{tg} x)^2}$ **f** $\dfrac{\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg}^2 t}-\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 t}$

g $\dfrac{1-\operatorname{tg}^3 x}{1-\operatorname{tg} x}+\dfrac{1-\operatorname{ctg}^3 x}{1-\operatorname{ctg} x}$ **h** $\operatorname{tg}^2 t+\operatorname{ctg}^2 t-\dfrac{1}{\sin^2 t\cos^2 t}$.

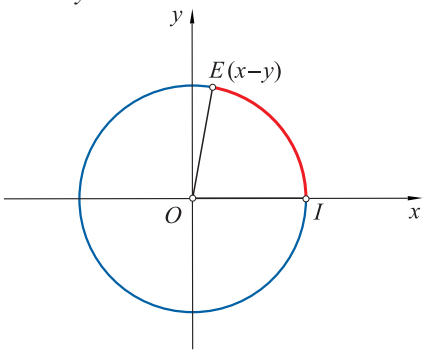
1.7. Adicijske formule

Adicijske formule za kosinus

U ovom poglavlju prikazat ćemo formule s pomoću kojih kosinus zbroja odnosno razlike dva realna broja x i y izražavamo s pomoću trigonometrijskih funkcija brojeva x i y.



Brojevima x i y pridružene su točke $E(x)$ i $E(y)$.



Broju $x-y$ pridružena je točka $E(x-y)$. Duljina luka od $E(y)$ do $E(x)$ jednaka je duljini luka od I do $E(x-y)$.

Neka su x i y dva realna broja iz intervala $[0,2\pi]$, te neka je $x \geqslant y$. Brojevima $x, y, x-y$ pridružene su redom točke $E(x)$, $E(y)$, $E(x-y)$ na brojevnoj kružnici.

Očito je duljina luka od točke $E(y)$ do točke $E(x)$ jednaka duljini luka od $I=E(0)$ do točke $E(x-y)$, pa su i pripadne tetive jednake duljine, tj. vrijedi

$$|E(y)E(x)| = |IE(x-y)|.$$

Kako je

$$E(y) = (\cos y, \sin y), \quad E(x) = (\cos x, \sin x),$$
$$E(x-y) = (\cos(x-y), \sin(x-y)), \quad I = E(0) = (1,0)$$

korištenjem formule za udaljenost dviju točaka i njenim kvadriranjem dobivamo niz identiteta:

$$\sqrt{(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2} = \sqrt{(\cos(x-y) - 1)^2 + (\sin(x-y) - 0)^2}$$
$$\cos^2 x - 2\cos x \cos y + \cos^2 y + \sin^2 x - 2\sin x \sin y + \sin^2 y = \cos^2(x-y) - 2\cos(x-y) + 1 + \sin^2(x-y),$$
$$2 - 2\cos x \cos y - 2\sin x \sin y = 2 - 2\cos(x-y),$$

pri čemu je iskorištena osnovna trigonometrijska relacija $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

Dodamo li -2 na obje strane jednakosti, te pomnožimo li je s $-\frac{1}{2}$ dobit ćemo

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y. \tag{1}$$

Time smo dokazali formulu za kosinus razlike dva realna broja x, $y \in [0, 2\pi]$, $x \geqslant y$.

Pokažimo da formula (1) vrijedi za bilo koja dva realna broja x i y.

Prvo uklonimo uvjet "$x \geqslant y$". Naime ako je $y \geqslant x$, $x, y \in [0, 2\pi]$ tada je prema (1) $\cos(y-x) = \cos y \cos x + \sin y \sin x$, a kako zbog parnosti funkcije kosinus vrijedi

$$\cos(y-x) = \cos(x-y),$$

to i za $y \geqslant x$ vrijedi (1). Dakle, za sada smo dokazali da relacija (1) vrijedi za svaka dva broja iz intervala $[0, 2\pi]$.

Ako x ili y ne pripadaju intervalu $[0, 2\pi]$, tada postoje brojevi $x_0, y_0 \in [0, 2\pi)$ i $k, m \in \mathbf{Z}$ takvi da je

$$x = x_0 + 2k\pi, \qquad y = y_0 + 2m\pi.$$

Kako su x_0, $y_0 \in [0, 2\pi)$, kad primijenimo na njih relaciju (1), dobit ćemo

$$\cos(x_0 - y_0) = \cos x_0 \cos y_0 + \sin x_0 \sin y_0,$$

a budući da je $x_0 = x - 2k\pi$ i $y_0 = y - 2m\pi$, imamo

$$\cos(x - y + 2m\pi - 2k\pi) = \cos(x - 2k\pi)\cos(y - 2m\pi) + \sin(x - 2k\pi)\sin(y - 2m\pi),$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y,$$

pri čemu je iskorištena periodičnost funkcija sinus i kosinus.

Tako smo dokazali da relacija (1) vrijedi za svaka dva realna broja x i y.

Adicijska formula za kosinus razlike

Za svaka dva realna broja x i y vrijedi

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Ukoliko u gornju relaciju umjesto y stavimo $-y$ i iskoristimo parnost kosinusa i neparnost sinusa, dobit ćemo

$$\cos(x - (-y)) = \cos x \cos(-y) + \sin x \sin(-y)$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

tj. dobili smo formulu kojom je kosinus zbroja dva broja prikazan s pomoću kosinusa i sinusa tih brojeva.

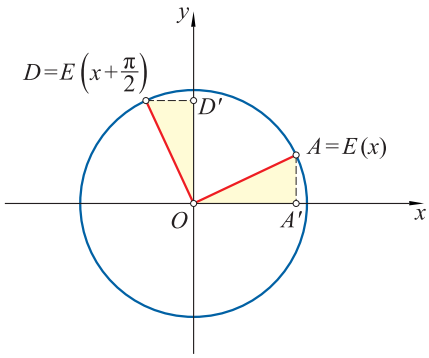
Adicijska formula za kosinus zbroja

Za svaka dva realna broja x i y vrijedi

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Za izvod odgovarajućih adicijskih formula za funkciju sinus potrebno nam je poznavanje formula koje povezuju vrijednosti trigonometrijskih funkcija argumenta $x+\frac{\pi}{2}$ s trigonometrijskim funkcijama argumenta x.

Formule redukcije za argument $x + \frac{\pi}{2}$



Neka je $A = E(x)$ točka brojevne kružnice dobivena eksponencijalnim preslikavanjem broja $x \in \mathbf{R}$, a A' neka je njena ortogonalna projekcija na x os.

Zarotiramo li trokut OAA' za $90°$ u pozitivnom smjeru, točka A preslikat će se u točku $D = E\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Kako rotacija čuva udaljenost to je

$$|OD'| = |OA'| \quad \text{i} \quad |DD'| = |AA'|.$$

Iskazano u terminima trigonometrijskih funkcija imamo

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \qquad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

Sad je lako izvesti formule za tangens i kotangens:

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\operatorname{ctg} x$$

$$\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{1}{\operatorname{ctg} x} = -\operatorname{tg} x.$$

Dakle, vrijede sljedeće formule

Formule redukcije za $x + \frac{\pi}{2}$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \qquad \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} x$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \qquad \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg} x$$

Adicijske formule za sinus

Poznavajući upravo izvedene formule redukcije i adicijske formule za kosinus dobivamo sljedeće

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= -\cos\left((x+y)+\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(x+\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right)\\ &= -\cos x\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+\sin x\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x\sin y+\sin x\cos y. \qquad (2)\end{aligned}$$

Ako umjesto y stavimo $-y$ i iskoristimo svojstva parnosti, dobivamo

$$\begin{aligned}\sin(x-y) &= \cos x\sin(-y)+\sin x\cos(-y)\\ &= -\cos x\sin y+\sin x\cos y = \sin x\cos y-\cos x\sin y. \qquad (3)\end{aligned}$$

Formulama (2) i (3) prikazan je sinus zbroja, odnosno sinus razlike dva broja s pomoću kosinusa i sinusa tih brojeva.

Adicijske formule za sinus

Za svaka dva realna broja x i y vrijedi

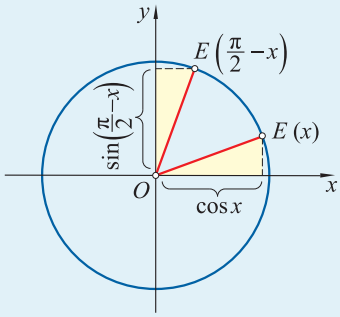
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y+\cos x\sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y-\cos x\sin y.$$

PRIMJER 1.

Izvedimo formule redukcije za argument $\frac{\pi}{2}-x$.

Koristimo adicijske formule za sinus i kosinus, te činjenice $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\frac{\pi}{2}=0$.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x-\cos\frac{\pi}{2}\sin x = \cos x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x+\sin\frac{\pi}{2}\sin x = \sin x$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$$
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} = \operatorname{tg} x.$$



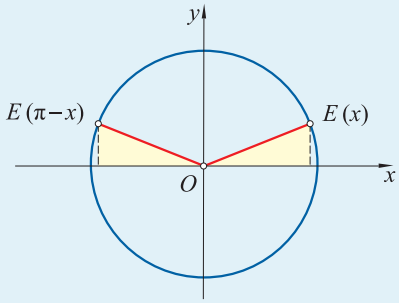
Istaknuti trokuti su sukladni.

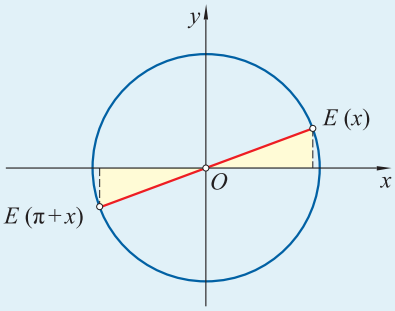
PRIMJER 2.

Dokažimo da vrijede sljedeće formule redukcije:

$$\begin{aligned}\sin(\pi-x) &= \sin x & \sin(\pi+x) &= -\sin x\\ \cos(\pi-x) &= -\cos x & \cos(\pi+x) &= -\cos x\\ \operatorname{tg}(\pi-x) &= -\operatorname{tg} x & \operatorname{tg}(\pi+x) &= \operatorname{tg} x\\ \operatorname{ctg}(\pi-x) &= -\operatorname{ctg} x & \operatorname{ctg}(\pi+x) &= \operatorname{ctg} x.\end{aligned}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin\pi\cos x - \cos\pi\sin x = \sin x$$
$$\cos(\pi - x) = \cos\pi\cos x + \sin\pi\sin x = -\cos x$$
$$\operatorname{tg}(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \frac{\sin x}{-\cos x} = -\operatorname{tg} x$$
$$\operatorname{ctg}(\pi - x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\pi - x)} = \frac{1}{-\operatorname{tg} x} = -\operatorname{ctg} x$$





$$\sin(\pi + x) = \sin\pi\cos x + \cos\pi\sin x = -\sin x$$
$$\cos(\pi + x) = \cos\pi\cos x - \sin\pi\sin x = -\cos x$$
$$\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x, \text{ jer je } \pi \text{ period za tg}$$
$$\operatorname{ctg}(\pi + x) = \operatorname{ctg} x, \text{ jer je } \pi \text{ period za ctg.}$$

PRIMJER 3.

Koristeći se adicijskim formulama, formulama redukcije i vrijednostima trigonometrijskih funkcija brojeva $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ i $\frac{\pi}{3}$ izračunajmo:

a) $\sin\frac{19\pi}{6}$ **b)** $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}$ **c)** $\cos\frac{7\pi}{12}$.

a) $\sin\frac{19\pi}{6} = \sin\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

b) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

c) $\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{3})$.

PRIMJER 4.

Dokažimo $$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = \operatorname{tg} x.$$

Koristeći adicijske formule i da je $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ imamo

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)} = \operatorname{tg} x.$$

Adicijske formule za tangens

Koristeći adicijske formule za sinus i kosinus imamo

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}=\frac{\dfrac{\sin x\cos y}{\cos x\cos y}+\dfrac{\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\cos x\cos y}{\cos x\cos y}-\dfrac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}.$$

Budući da je tangens neparna funkcija, zamjenom $y\to -y$ dobivamo

$$\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}(-y)}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}(-y)}=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}.$$

Adicijske formule za tangens

Za svaka dva realna broja $x,y\in D_{\operatorname{tg}}$ za koje je i $x\pm y\in D_{\operatorname{tg}}$, vrijedi

$$\operatorname{tg}(x\pm y)=\frac{\operatorname{tg}x\pm\operatorname{tg}y}{1\mp\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}.$$

Adicijske formule za kotangens

Možemo ih izvesti na sličan način kao formule za tangens koristeći formule za sinus i kosinus. Mi ćemo ih dokazati koristeći relaciju koja povezuje tangens i kotangens: $\operatorname{ctg}x=\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}$. Naime, vrijedi

$$\operatorname{ctg}(x\pm y)=\frac{1}{\operatorname{tg}(x\pm y)}=\frac{1\mp\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}x\pm\operatorname{tg}y}=\frac{1\mp\dfrac{1}{\operatorname{ctg}x}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{ctg}y}}{\dfrac{1}{\operatorname{ctg}x}\pm\dfrac{1}{\operatorname{ctg}y}}=\frac{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y\mp 1}{\operatorname{ctg}y\pm\operatorname{ctg}x},\qquad x,y,x\pm y\in D_{\operatorname{tg}}.$$

Adicijske formule za kotangens

Za svaka dva realna broja $x,y\in D_{\operatorname{ctg}}$ za koje je i $x\pm y\in D_{\operatorname{ctg}}$, vrijedi

$$\operatorname{ctg}(x\pm y)=\frac{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y\mp 1}{\operatorname{ctg}y\pm\operatorname{ctg}x}.$$

PRIMJER 5.

Pojednostavnimo izraz: $\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4}+x\right)-\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4}-x\right)$.

Koristeći adicijske formule za tangens pojednostavnimo svaki od pribrojnika:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+x\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-x\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}\operatorname{tg}x}-\frac{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}\operatorname{tg}x}$$

$$=\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}-\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}=\frac{1+2\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2x-1+2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2x}{1-\operatorname{tg}^2x}=\frac{4\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}.$$

Trigonometrijske funkcije dvostrukog argumenta

Za argument $2x$ vrijede sljedeće formule:

Trigonometrijske funkcije za dvostruki argument

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} \qquad \operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}$$

Naime, kako je $2x = x + x$ koristeći adicijske formule za zbroj imamo

$$\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x\cos x + \cos x\sin x = 2\sin x\cos x,$$

$$\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x\cos x - \sin x\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x+x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} x} = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x},$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg}(x+x) = \frac{\operatorname{ctg} x\operatorname{ctg} x - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} x} = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}.$$

PRIMJER 6.

Dokažimo da vrijedi

$$\frac{2\sin^2 x + \cos 2x}{2\cos^2 x - \cos 2x} = 1.$$

Koristeći formulu za kosinus dvostrukog argumenta i osnovni trigonometrijski identitet imamo

$$\frac{2\sin^2 x + \cos 2x}{2\cos^2 x - \cos 2x} = \frac{2\sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x}{2\cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1.$$

PRIMJER 7.

Izvedimo formule za sinus i kosinus trostrukog argumenta.

$$\begin{aligned}
\sin 3x &= \sin(2x+x) = \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x \\
&= 2\sin x\cos x\cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x \\
&= 2\sin x\cos^2 x + \sin x\cos^2 x - \sin^3 x = 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x \\
&= 3\sin x(1-\sin^2 x) - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x, \\
\cos 3x &= \cos(2x+x) = \cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x \\
&= (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\sin^2 x\cos x = \cos^3 x - 3\sin^2 x\cos x \\
&= \cos^3 x - 3(1-\cos^2 x)\cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x.
\end{aligned}$$

Trigonometrijske funkcije argumenta $\frac{x}{2}$

Transformirajmo razlomak $\frac{1-\cos x}{2}$ koristeći osnovnu trigonometrijsku relaciju $1=\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}$ i formulu za kosinus dvostrukog kuta $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$.

$$\frac{1-\cos x}{2}=\frac{\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)-\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}{2}=\sin^2\frac{x}{2}.$$

Na taj smo način sinus argumenta $\frac{x}{2}$ izrazili s pomoću kosinusa argumenta x. Na sličan način izvodimo i formulu za $\cos\frac{x}{2}$. Naime, vrijedi

$$\frac{1+\cos x}{2}=\frac{\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)+\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}{2}=\cos^2\frac{x}{2}.$$

Sada se lako dobiju formule za tangens i kotangens polovičnog argumenta jer je

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x},\qquad \operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}=\frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}.$$

Trigonometrijske funkcije polovičnog argumenta

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}\qquad \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}\qquad \operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

PRIMJER 8.

Odredimo $\cos\frac{\pi}{8}$.

$\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$. Kako je $E\left(\frac{\pi}{8}\right)$ u prvom kvadrantu, to je $\cos\frac{\pi}{8}>0$, pa je $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

PRIMJER 9.

Dokažimo:

a) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$ **b)** $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{\sin x}$.

a) $$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{1-\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)+\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

b) $$\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{1+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}.$$

ZADATCI 1.7.

1. Koristeći adicijske formule i vrijednosti trigonometrijskih funkcija brojeva $\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}$ izračunaj vrijednosti trigonometrijskih funkcija sljedećih brojeva:

a $\frac{2\pi}{3}$ **b** $\frac{4\pi}{3}$ **c** $\frac{3\pi}{4}$ **d** $\frac{5\pi}{6}$ **e** $\frac{7\pi}{6}$ **f** $-\frac{3\pi}{4}$.

2. Koristeći adicijske formule i vrijednosti trigonometrijskih funkcija brojeva $30°$, $60°$, $45°$ izračunaj vrijednosti trigonometrijskih funkcija sljedećih brojeva

a $120°$ **b** $240°$ **c** $300°$ **d** $150°$
e $210°$ **f** $330°$ **g** $135°$ **h** $225°$.

3. Izračunaj vrijednosti trigonometrijskih funkcija kutova:

a $480°$ **b** $1\,200°$ **c** $510°$ **d** $-1\,950°$ **e** $405°$ **f** $-585°$.

4. Izračunaj vrijednosti trigonometrijskih funkcija od:

a $\frac{17\pi}{3}$ **b** $\frac{23\pi}{3}$ **c** $\frac{31\pi}{6}$ **d** $-\frac{11\pi}{6}$ **e** $\frac{19\pi}{4}$ **f** $-\frac{37\pi}{4}$.

5. Izračunaj:

a $\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$

b $\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{19\pi}{3}-\operatorname{ctg}\frac{23\pi}{3}$

c $2\sin^2\frac{\pi}{6}-\cos^3\frac{7\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{3}$

d $3\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}+4\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$.

6. Izračunaj:

a $\sin 30°-\cos 30°+\operatorname{tg}30°-\operatorname{ctg}30°$

b $3\cos 120°-2\sin 60°+5\sin 150°$

c $\sin^2 120°+\cos 150°$

d $2\cos^2 210°-\sin^2 135°$

e $\frac{4\sin^2 30°-5\cos^2 150°}{2\cos 60°}$

f $\frac{\operatorname{tg}^2 315°+3\operatorname{ctg}^3 405°}{\sin 135°-2\cos(-405°)}$.

7. Ako je $\sin t = -\frac{11}{61}$, $t \in \left\langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\rangle$, koristeći redukcijske formule ili adicijske formule izračunaj:

a $\cos(t - \frac{\pi}{2})$ **b** $\sin(t + \pi)$ **c** $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$ **d** $\operatorname{ctg}(\pi - t)$.

8. Ako je $\cos t = \frac{24}{25}$, $t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, koristeći redukcijske formule izračunaj:

a $\sin(t - \pi)$ **b** $\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ **c** $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ **d** $\operatorname{ctg}(\pi + t)$.

9. Pojednostavni izraze:

a $5\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+7\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ **b** $2\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)$ **c** $4\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$

d $\sin^2\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)-\sin^2\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)$ **e** $\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)-\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)$ **f** $\frac{\sin(90^\circ+x)\cos(90^\circ-x)}{\cos(180^\circ+x)}$.

10. Koristeći adicijske formule dokaži sljedeće jednakosti:

a $1 - 2\sin x\cos x = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ **b** $1 + 2\sin x\cos x = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

c $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$ **d** $\sin(30^\circ + x) + \sin(30^\circ - x) = \cos x$

e $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$ **f** $\cos(45^\circ - x) + \cos(45^\circ + x) = \sqrt{2}\cos x$.

11. Pojednostavni izraze:

a $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ **b** $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$ **c** $\frac{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}$

d $\frac{1 + \operatorname{ctg}(45^\circ + x)}{1 - \operatorname{ctg}(45^\circ - x)}$ **e** $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$ **f** $\frac{\operatorname{ctg}(135^\circ+x)-\operatorname{ctg}(135^\circ-x)}{\operatorname{ctg}(135^\circ+x)+\operatorname{ctg}(135^\circ-x)}$.

12. Ako je $\sin x = \frac{4}{5}$ i $\sin y = \frac{12}{13}$, $x, y \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, koliko je:

a $\sin(x + y)$ **b** $\cos(x - y)$?

13. Ako je $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{10}$ i $\cos y = \frac{3}{5}$, $x \in \left\langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\rangle$, $y \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, koliko je:

a $\sin(x - y)$ **b** $\cos(x + y)$?

14. Izračunaj vrijednosti trigonometrijskih funkcija broja $2x$ ako je:

a $\sin x = \frac{4}{5}$, $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ **b** $\sin x = -\frac{60}{61}$, $x \in \left\langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\rangle$ **c** $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$

d $\cos x = -\frac{3}{5}$, $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$ **e** $\operatorname{tg} x = -2$, $x \in \langle 90^\circ, 180^\circ \rangle$ **f** $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, $x \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$.

15. Dokaži da vrijedi:

a $\dfrac{2\cos^2 x + \sin 2x}{2\sin^2 x + \sin 2x} = \operatorname{ctg} x$

b $\dfrac{\sin^2 2x + 4\sin^4 x}{\sin^2 2x + 4\cos^4 x} = \operatorname{tg}^2 x$

c $\dfrac{\sin 2t}{\sin t + \sin t \cos 2t} = \dfrac{1}{\cos t}$

d $\dfrac{\sin^2 2t - 2\sin^2 t}{\cos 2t} = 2\sin^2 t\,.$

16. Koristeći trigonometrijske funkcije broja $\dfrac{\pi}{6}$ izračunaj vrijednosti trigonometrijskih funkcija broja $\dfrac{\pi}{12}$.

17. Izračunaj vrijednosti trigonometrijskih funkcija brojeva $\dfrac{\pi}{8}$ i $\dfrac{5\pi}{12}$.

18. Ako je $\sin x = \dfrac{8}{17}$, $x \in \left\langle 0, \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$, izračunaj:

a $\sin \dfrac{x}{2}$ **b** $\cos \dfrac{x}{2}$ **c** $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$ **d** $\sin \dfrac{x}{4}$.

19. Ako je $\cos x = -\dfrac{12}{13}$, $x \in \left\langle \pi, \dfrac{3\pi}{2} \right\rangle$, izračunaj:

a $\sin \dfrac{x}{2}$ **b** $\cos \dfrac{x}{2}$ **c** $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$ **d** $\sin \dfrac{x}{4}$.

20. Dokaži:

a $\dfrac{2\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}} = \sin x$

b $\dfrac{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \sin x$

c $\dfrac{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \operatorname{tg} x$

d $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)\dfrac{1 - \sin x}{\cos x} = 1\,.$

1.8. Još neki trigonometrijski identiteti

Pretvorba umnoška trigonometrijskih funkcija u zbroj

Promotrimo adicijske formule za sinus zbroja, odnosno razlike:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

Ako zbrojimo te dvije jednakosti i dobivenu relaciju podijelimo s 2, dobit ćemo

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x + y) + \sin(x - y)\Big),$$

tj. dobili smo formulu kojom se produkt sinusa i kosinusa pretvara u zbroj.

Na analogan način, zbrajajući odnosno oduzimajući adicijske formule za kosinus zbroja i razlike dobivaju se formule pretvorbe umnoška trigonometrijskih funkcija u zbroj.

Formule pretvorbe umnoška trigonometrijskih funkcija u zbroj

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x+y) + \sin(x-y)\Big) \tag{1}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\Big) \tag{2}$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big) \tag{3}$$

PRIMJER 1.

Napišimo u obliku zbroja umnožak

$$\cos(60^\circ + 2t)\cos(60^\circ - 2t).$$

Koristeći formulu (2) dobivamo

$$\begin{aligned}\cos(60^\circ+2t)\cos(60^\circ-2t) &= \frac{1}{2}(\cos(60^\circ+2t+60^\circ-2t) + \cos(60^\circ+2t-60^\circ+2t))\\ &= \frac{1}{2}(\cos 120^\circ + \cos 4t) = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2} + \cos 4t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 4t.\end{aligned}$$

Pretvorba zbroja trigonometrijskih funkcija u umnožak

Uvedimo u formuli (1) ove zamjene $u = x + y$ i $v = x - y$. Tada je $x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{u-v}{2}$ i

$$\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2} = \frac{1}{2}(\sin u + \sin v),$$

odnosno

$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}. \tag{4}$$

Ako ove supstitucije provedemo i u formulama (2) i (3), dobit ćemo

$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}.$$

Formulu za razliku sinusa dobit ćemo tako da u formuli (4) umjesto v uvrstimo $-v$. Tada imamo

$$\sin u - \sin v = 2\sin\frac{u-v}{2}\cos\frac{u+v}{2}.$$

Formule pretvorbe zbroja i razlike u umnožak

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad \cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} \qquad \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

PRIMJER 2.

Svedimo na što jednostavniji oblik $\dfrac{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}$.

Koristimo pogodnu grupaciju pribrojnika u brojniku i nazivniku, te formulu za transformaciju zbroja kosinusa u produkt:

$$\frac{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}{\cos x - \cos 2x + \cos 3x} = \frac{(\cos x + \cos 3x) + \cos 2x}{(\cos x + \cos 3x) - \cos 2x} = \frac{2\cos 2x \cos x + \cos 2x}{2\cos 2x \cos x - \cos 2x} = \frac{2\cos x + 1}{2\cos x - 1}.$$

ZADATCI 1.8.

1. Napiši u obliku zbroja ove umnoške:

a $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}$ **b** $\sin 3x \cos 4x$ **c** $\sin(x+y)\cos y$

d $\cos(x+y)\cos y$ **e** $\cos(\alpha+\beta)\cos(2\alpha+\beta)$ **f** $\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-2\beta)$.

2. Pojednostavni:

a $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$ **b** $\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$

c $\dfrac{\cos(120^\circ - x)\cos(120^\circ + x)}{\sin(30^\circ - x)\sin(30^\circ + x)}$ **d** $\cos\left(30^\circ + \frac{t}{2}\right)\cos\left(30^\circ - \frac{t}{2}\right)$.

3. Napiši u obliku produkta izraze:

a $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ **b** $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

c $\cos(30^\circ - x)+\cos(30^\circ + x)$ **d** $\cos(60^\circ - x)-\cos(60^\circ + x)$.

4. Dokaži:

a $\sin(x+y)+\sin(x-y) = 2\sin x\cos y$ **b** $\cos x + \cos(2x+y) = 2\cos\frac{3x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$

c $\dfrac{\sin^2 x - \sin^2 y}{\cos^2 y - \cos^2 x} = 1$ **d** $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

5. Svedi na što jednostavniji oblik:

a $\dfrac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y}$ **b** $\dfrac{\cos x + \cos y}{\cos x - \cos y}$

c $\dfrac{\sin(3x+y)+\sin(x+3y)}{\sin 2x + \sin 2y}$ **d** $\dfrac{\cos(3x-y)-\cos(3y-x)}{\cos 2x - \cos 2y}$.

6. Svedi na što jednostavniji oblik:

a $\dfrac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x}$ **b** $\dfrac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x}$

c $\dfrac{\sin x - 2\sin 2x + \sin 3x}{\sin x + 2\sin 2x + \sin 3x}$ **d** $\dfrac{\sin x + \sin y + \sin(x+y)}{1 - \cos x + \cos y - \cos(x+y)}$

e $\dfrac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x}$ **f** $\dfrac{1 + \cos 8x - \sin 8x}{\cos 8x + \sin 8x - 1}$.

1.9. Određivanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija

Računanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija s pomoću računala

U drugom razredu odredili smo trigonometrijske funkcije nekih posebnih kutova. Isto tako naučili smo određivati vrijednosti trigonometrijskih funkcija šiljastih kutova s pomoću računala. I za ostale kutove postupak je isti.

Ponovimo! Prvo, računalo treba biti u odgovarajućem stanju (modu): DEG, RAD, GRAD, ovisno o tome unosimo li mjeru kuta u stupnjevima, radijanima ili gradima. Zatim se unese broj, te pritisne tipka odgovarajuće trigonometrijske funkcije. Na zaslonu se pojavljuje vrijednost trigonometrijske funkcije upisanog broja.

Napomenimo da na računalu ne postoji tipka za funkciju kotangens. U slučaju kad želimo izračunati kotangens broja x, prvo izračunamo njegov tangens, a zatim recipročnu vrijednost upotrebom tipke $1/x$ ili x^{-1}. Ovdje je opisan rad s jednom vrstom kalkulatora. Drukčija vrsta kalkulatora zahtijevat će nešto drukčiji postupak. Zato svatko treba proučiti upute za rad upravo svojeg računala.

PRIMJER 1.

Izračunajmo $\sin 325°3'28''$.

Računalo dovedemo u stanje DEG, upišemo broj 325.0328, te upotrijebimo tipku $\rightarrow$DEG. Na zaslonu se pojavljuje broj 325.0577778, što je decimalni zapis upisanog broja. Dalje, pritiskom na tipku SIN pojavljuje se sinus zadanog broja, tj. -0.572750101.

Izračunavanje broja ako je dana vrijednost neke trigonometrijske funkcije tog broja

Pokažimo ovaj postupak na jednom konkretnom primjeru.

PRIMJER 2.

Izračunajmo broj $t \in \langle -90°, 90° \rangle$ ako je zadano $\sin t = 0.2345$.

Neka je računalo u stanju DEG. Upišimo u računalo broj 0.2345 i pritisnimo tipku koja se nalazi na istom mjestu kao i tipka za funkciju sinus, ali je označena s $\sin^{-1}$ ili arc sin. Na zaslonu će se pojaviti rezultat 13.56215133. Ovo je rezultat u stupnjevima. Ukoliko želimo rezultat izraziti još i u minutama i sekundama, upotrijebimo tipku $\rightarrow$D.MS koja automatski prebacuje rezultat u stupnjevima u rezultat u stupnjevima, minutama i sekundama. Dakle, $t \approx 13°33'44''$. Ukoliko je računalo bilo u stanju RAD rezultat će biti 0.236704194 radijana.

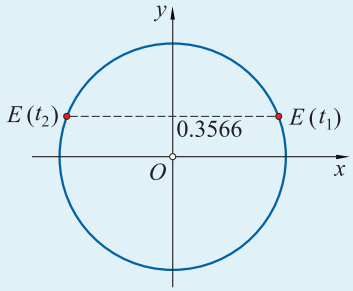
Slično se postupa ako je zadana vrijednost kosinusa ili tangensa realnog broja ili kuta. Ukoliko je dana vrijednost kotangensa broja, prvo primjenom formule $\operatorname{tg} t = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} t}$ izračunamo vrijednost tangensa, te zatim i sam realan broj t.

Primijetimo da ako je zadana vrijednost sinusa, rezultati se uvijek nalaze u intervalu $[-90°, 90°]$, ako je dana vrijednost kosinusa tada je rezultat iz intervala $[0, 180°]$, a ako je dana vrijednost tangensa, tada je rezultat element intervala $\langle -90°, 90° \rangle$.

PRIMJER 3.

Odredimo sve realne brojeve t za koje vrijedi $\sin t = 0.3566$. Rezultat iskažimo i u stupnjevima.

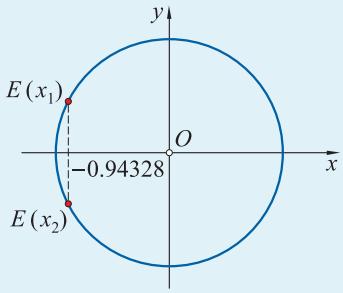
Upotrebom računala dobivamo: $t_1 = 20.8915° = 20°53'30''$ ili $t_1 = 0.3646$ rad, (četvrta decimala, odnosno druga znamenka sekundi su zaokružene vrijednosti). Iz formule redukcije znamo da je $\sin(\pi - x) = \sin x$, tj. x i $\pi - x$ imaju isti sinus (vidi sliku). Konkretno u ovom slučaju brojevi t_1 i $t_2 = \pi - t_1 = 2.777\,\text{rad} = 159°6'30''$ imaju isti sinus. I konačno, budući da je sinus periodična funkcija, dobivamo da su traženi brojevi $0.3646 + 2k\pi$ i $2.777 + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, odnosno zapisani u stupnjevima: $20°53'30'' + 360°k$ i $159°6'30'' + 360°k$, $k \in \mathbf{Z}$.



PRIMJER 4.

Odredimo sve realne brojeve x za koje vrijedi $\cos x = -0.94328$.

S pomoću računala dobivamo rezultat iz intervala $[0, \pi]$: $x_1 = 2.8032$ rad $= 160°36'36''$. Budući da vrijedi $\cos x = \cos(-x)$, to i broj $x_2 = -x_1$ ima kosinus jednak -0.94328. I konačno, kako je kosinus periodična funkcija, traženi brojevi su: $\pm 2.8032 + 2k\pi$, odnosno, u stupnjevima $\pm 160°36'36'' + 360°k$, $k \in \mathbf{Z}$.



PRIMJER 5.

Odredimo sve realne brojeve x za koje vrijedi

a) $\operatorname{tg} x = 2$ **b)** $\operatorname{ctg} x = -1.8$.

a) S pomoću računala dobivamo rezultat iz intervala $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$: $x = 1.1071$ rad $= 63°26'6''$. Tangens je periodična funkcija s periodom π, pa svi brojevi oblika $1.1071 + k\pi$ imaju tangens 2.

b) Prvo izračunajmo tangens: $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} x} = -0.5556$, pa ponovimo postupak iz prvog dijela primjera. Svi brojevi kojima je kotangens jednak -1.8 su $-0.5071 + k\pi$ ili, u stupnjevima $-29°3'17'' + 180°k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Napomenimo još da je trigonometrijske funkcije brojeva $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ i njihovih višekratnika uobičajeno pisati u obliku razlomka, a ne u decimalnom zapisu.

ZADATCI 1.9.

1. Popuni tablicu:

x	$36°20'$	$48°10'$	$322°20'$	$485°40'$	$-821°50'$	$1998°10'$
$\sin x$						
$\cos x$						
$\operatorname{tg} x$						
$\operatorname{ctg} x$						

Rezultate zaokruži na četvrtu decimalu.

2. Izračunaj:

a $\sin 36°20' + \cos 39°10'$

b $\operatorname{tg} 32°50' - \operatorname{ctg} 30°20'$

c $\sin^2 25°50' - \cos^2 52°10'$

d $\dfrac{\sin^2 63°30' - \cos 30°20'}{\operatorname{tg}^2 80° \cdot \operatorname{ctg}^2 50°20'}$

e $\cos 42°13' - \sin 32°18'$

f $\cos^2 30°15' + \sin^2 60°45'$

g $\operatorname{tg} 21°1' - \operatorname{ctg} 89°39'$

g $\sqrt{\cos 72°44' \cdot \sin 81°22'}$.

3. Popuni tablicu

t	$25°35'$	$80°14'$	$10°11'$	$37°49'$	$28°40'10''$	$30°15'24''$
$\sin t$						
$\cos t$						
$\operatorname{tg} t$						
$\operatorname{ctg} t$						

4. Odredi $t \in [0, 360°\rangle$ ako je zadano:

a $\sin t = 0.3284$

b $\sin t = -0.3423$

c $\sin t = 0.7071$

d $\cos t = 0.7821$

e $\cos t = -0.4567$

f $\cos t = 0.31313$.

5. Odredi $t \in [0, 180°\rangle$ ako je zadano:

a $\operatorname{tg} t = 2$

b $\operatorname{tg} t = -4.375$

c $\operatorname{tg} t = 0.7178$

d $\operatorname{ctg} t = 1.18$

e $\operatorname{ctg} t = -2.3$

f $\operatorname{ctg} t = 0.9763$.

6. Odredi sve realne brojeve t za koje vrijedi:

a $\sin t = 0.1234$

b $\sin t = -0.432$

c $\cos t = 0.717$

d $\cos t = -0.932$

e $\operatorname{tg} t = 3$

f $\operatorname{ctg} t = 0.5$.

1.10. Grafički prikaz trigonometrijskih funkcija

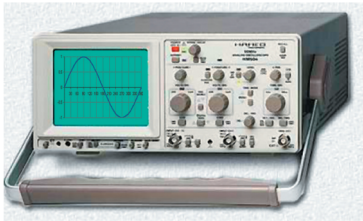
Graf funkcije sinus

Podsjetimo se kako se općenito definira graf neke funkcije $f : D_f \to \mathbf{R}$.

Graf funkcije f

Graf funkcije $f : D_f \to \mathbf{R}$ je skup $\{(x, f(x)) : x \in D_f\}$.

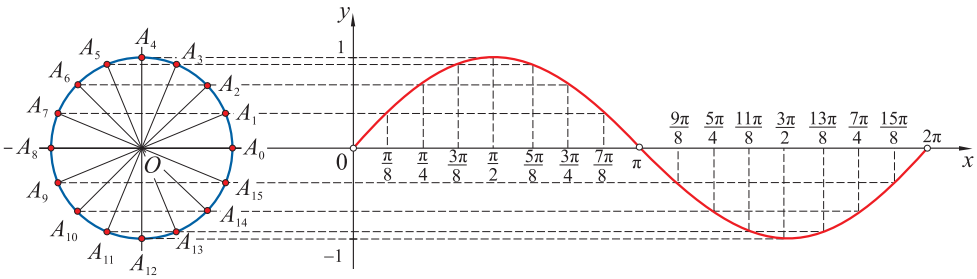
U slučaju kad je $f(x) = \sin x$, graf funkcije sinus nazivamo **sinusoida**. Dakle, sinusoida je skup točaka ravnine kojima je prva koordinata realan broj x, a druga koordinata je ordinata točke $E(x)$ dobivene namatanjem pravca na kružnicu.



osciloskop

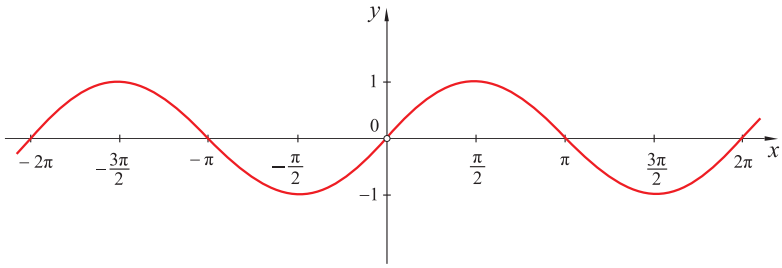
Sjetimo se da je sinus periodična funkcija s temeljnim periodom 2π, pa će za crtanje sinusoide biti dovoljno nacrtati dio grafa za $x \in [0, 2\pi]$.

Crtanje sinusoide provodimo tako da nacrtamo nekoliko točaka krivulje i spojimo ih glatkom linijom. Naravno, što je veći broj točaka, to je crtež precizniji. Pokazat ćemo postupak u kojem crtamo 2^4 točaka sinusoide na intervalu $[0, 2\pi]$.



Slika prikazuje val sinusoide na intervalu $[0, 2\pi]$. Nul-točke su u rubovima intervala i polovištu tog intervala, maksimum se postiže u $\frac{\pi}{2}$, a minimum u $\frac{3\pi}{2}$.

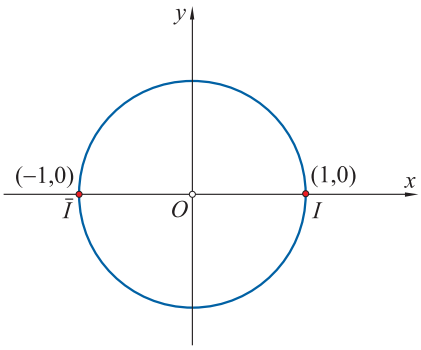
Prvo na brojevnoj kružnici k koristeći se simetralama kutova nacrtajmo točke $A_k = E\left(k\frac{\pi}{8}\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 15$. Potom, interval $[0, 2\pi]$ podijelimo na 16 jednakih dužina. Diobene točke su redom $0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \ldots, \frac{15\pi}{8}, 2\pi$. Zatim, povucimo paralelu s x-osi točkom A_1. Presjek te paralele i pravca $x = \frac{\pi}{8}$ je točka sinusoide. Potom, ponovimo taj postupak za preostale točke A_k. Spajanjem tih 16 točaka dobivamo jedan val sinusoide, tj. graf funkcije sinus na intervalu $[0, 2\pi]$. Sada taj graf možemo proširiti koristeći periodičnost funkcije sinus.



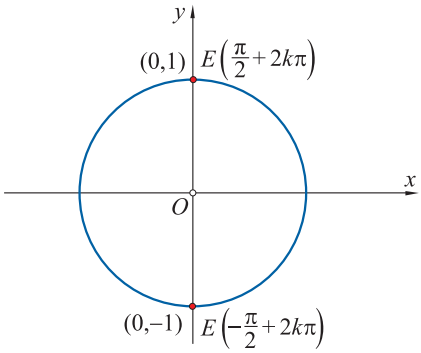
Sinus je periodična funkcija s temeljnim periodom 2π.

Korisno je zapamtiti neke karakteristične točke funkcije sinus, kao što su **nul-točke**, te točke **maksimuma** i **minimuma**.

Nul-točke su oni realni brojevi x za koje vrijedi $\sin x = 0$, tj. to su oni realni brojevi x za koje točka $E(x)$ ima ordinatu 0. Dakle, nul-točke sinusa su brojevi $2k\pi$ i $\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, što kraće pišemo $k\pi, k \in \mathbf{Z}$.



Točke I *i* $\bar{I}$ *imaju ordinatu jednaku* 0.



Točka $E\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ *ima ordinatu jednaku* 1.

Ordinata točke $E\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ *je* -1.

Točka $E\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ ima ordinatu jednaku 1 i to je najveća vrijednost koju ordinata neke točke na jediničnoj kružnici može postići. Drugim riječima, **maksimum** funkcije sinus je 1, a postiže se za $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Točka $E\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ ima ordinatu jednaku -1 i to je najmanja vrijednost za ordinatu točke brojevne kružnice. Dakle, **minimum** funkcije sinus je -1, a brojevi u kojima se postiže taj minimum su $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Kao što znamo, sinus je neparna funkcija, a to se svojstvo na grafu odražava kroz centralnu simetričnost grafa s obzirom na ishodište koordinatnog sustava.

Funkcija sinus

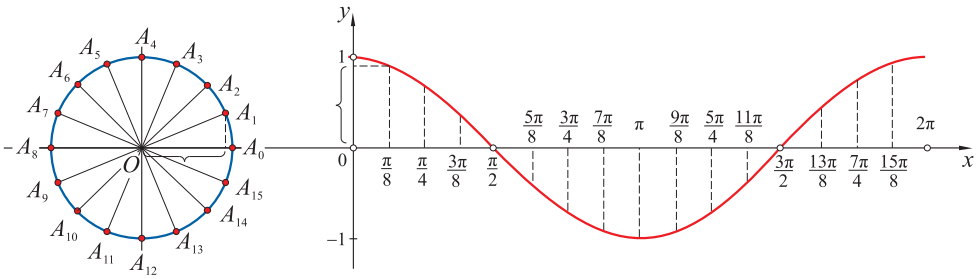
1. Temeljni period je 2π.
2. Nul-točke su $k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
3. Maksimum je 1, a točke u kojima se postiže su $\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
4. Minimum je -1, a postiže se za $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
5. Sinusoida je, zbog neparnosti, centralnosimetrična s obzirom na ishodište.

Uočimo da sinus raste na intervalima $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \ldots$, općenito na intervalima $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, a pada na intervalima $\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$.

Graf funkcije kosinus

Graf funkcije kosinus je skup $\{(x, \cos x) : x \in \mathbf{R}\}$ i naziva se **kosinusoida**.

Crtanju kosinusoide možemo pristupiti na dva načina. Prvi način analogan je crtanju sinusoide, tj. na brojevnoj kružnici k istaknemo dovoljan broj točaka $E(x)$ i apscise tih točaka su ordinate točaka kosinusoide.

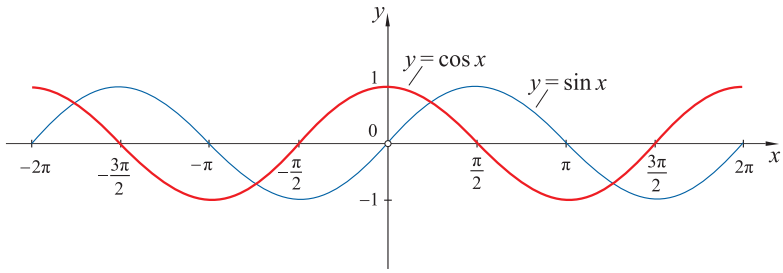


graf kosinusa na intervalu $[0, 2\pi]$

Drugi način usko je vezan uz formulu redukcije

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Dakle ako na sinusoidi promatramo točku s apscisom $x + \frac{\pi}{2}$, ta točka je točka kosinusoide s apscisom x. Specijalno, točka sinusoide s apscisom $\frac{\pi}{2}$ je točka kosinusoide s apscisom 0. Dakle, kosinusoida je sinusoida translatirana za $\frac{\pi}{2}$ ulijevo.



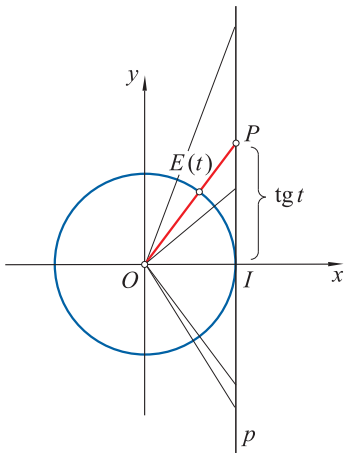
Kosinusoida je translatirana sinusoida za $\frac{\pi}{2}$ *ulijevo.*

Također, na isti način kao u slučaju funkcije sinus, izvode se zaključci o karakteristikama funkcije kosinus.

Funkcija kosinus

1. Temeljni period je 2π.
2. Nul-točke su $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
3. Maksimum je 1, a postiže se za $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
4. Minimum je -1, i postiže se za $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
5. Kosinusoida je, zbog parnosti, simetrična s obzirom na y-os.

Graf funkcije tangens



Graf funkcije tangens je skup

$$\left\{(x, \operatorname{tg} x) : x \in D_{\text{tg}} = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}\right\}$$

i naziva se **tangensoida**.

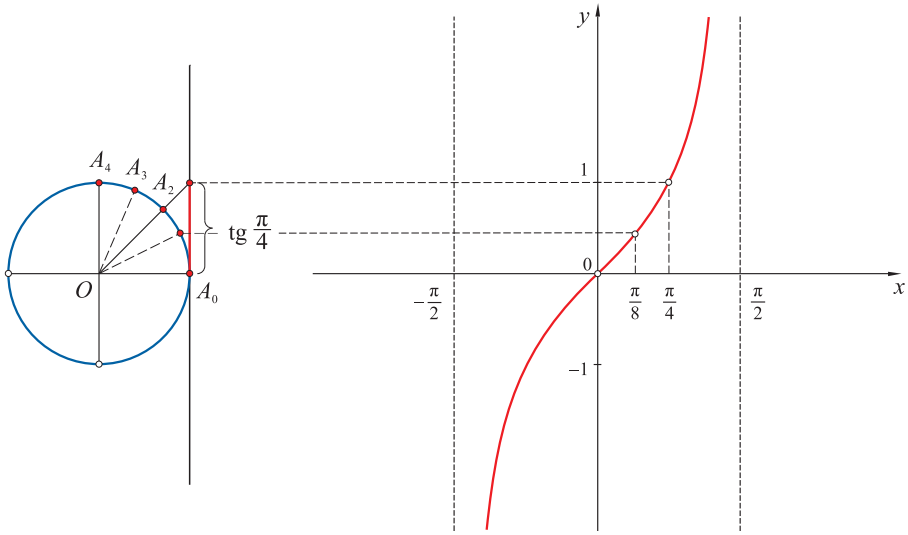
Prisjetimo se geometrijske interpretacije tangensa broja t.

Spojnica točaka O i $E(t)$ siječe pravac $p \ldots x = 1$ u točki P čija je ordinata upravo jednaka tangensu broja t.

Ukoliko t raste prema broju $\frac{\pi}{2}$, točka P klizi prema gore po pravcu p, tj. njena ordinata neograničeno raste. Ukoliko t pada prema $-\frac{\pi}{2}$, ordinata točke P postaje sve manja, tj. neograničeno pada.

Iz ove rasprave jasno je da je tangens na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ rastuća funkcija. Za brojeve $t = \frac{\pi}{2}$ i $t = -\frac{\pi}{2}$ tangens nije definiran. Crtanje provodimo na sličan način kao u primjeru sinusoide, koristeći diobu luka kružnice u 1. kvadrantu i svojstvo neparnosti tangensa.

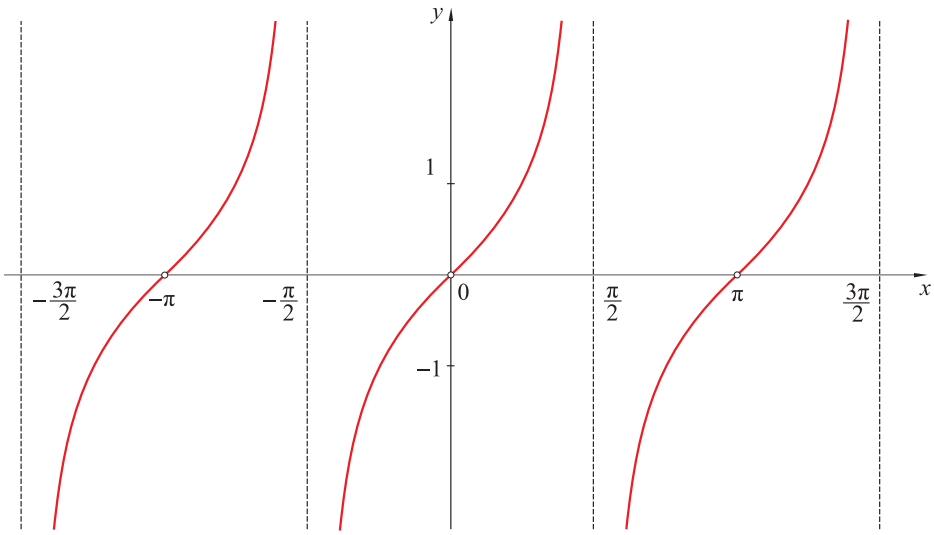
Koristeći činjenicu da je temeljni period tangensa jednak π lako proširimo sliku tako da se na crtežu pojavi nekoliko grana tangensa.



Graf funkcije tangens na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ *naziva se* **glavna** *grana tangensoide.*

Uočimo još neke karakteristike grafa. Prvo odredimo nul-točke funkcije tg. Brojevi za koje je $\operatorname{tg} x = 0$ su oni čiji je sinus jednak 0, tj. $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Funkcija tg nema maksimalnu vrijednost budući da se približavanjem broja t broju $\frac{\pi}{2}$ vrijednost ordinate točke na tangensnoj osi može po volji povećati. Isto vrijedi i za nepostojanje minimalne vrijednosti. Nadalje, kao što znamo, tangens je neparna funkcija, tj. $\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t$. Ovo svojstvo se na grafu odražava tako da je graf centralnosimetričan s obzirom na ishodište, tj. točke $(t, \operatorname{tg} t)$ i $(-t, -\operatorname{tg} t)$ leže na tangensoidi. Za brojeve $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, tangens nije definiran. Pravce $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ nazivamo **asimptotama** tangensoide.



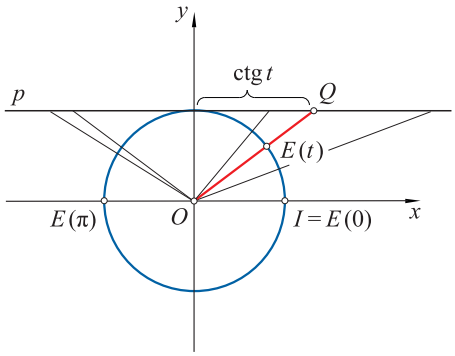
tangensoida

Funkcija tangens

1. Temeljni period je π.
2. Nul-točke su $k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
3. Maksimum i minimum ne postoje.
4. tg raste na intervalima $\left\langle -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$.
5. Tangensoida je, zbog neparnosti, centralnosimetrična s obzirom na ishodište.
6. Asimptote tangensoide su pravci $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

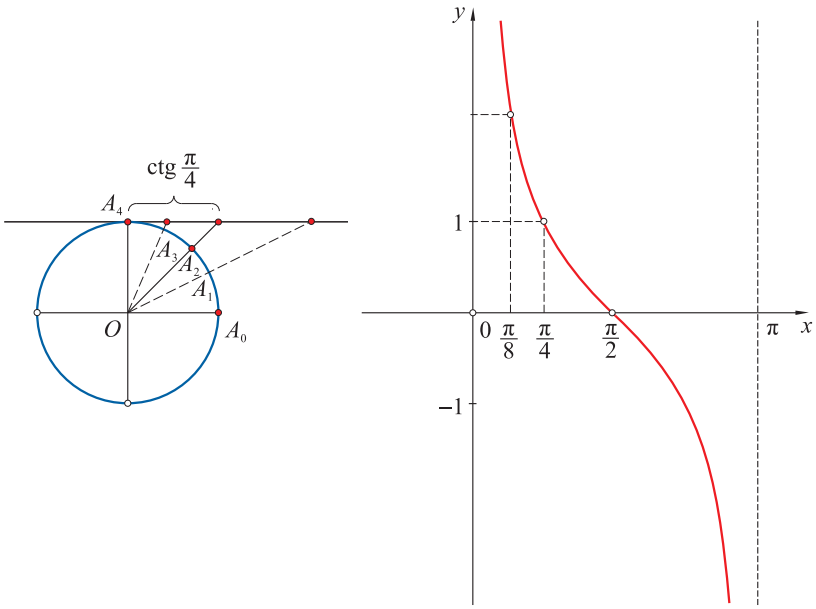
Graf funkcije kotangens

Prisjetimo se što znamo o funkciji kotangens. Prirodno područje definicije joj je skup $\mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$, neparna je i periodična s temeljnim periodom π. Stoga je dovoljno crtati je na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Nadalje, kotangens broja t je apscisa točke Q dobivene presjekom kotangensne osi $y = 1$ i pravca $OE(t)$.



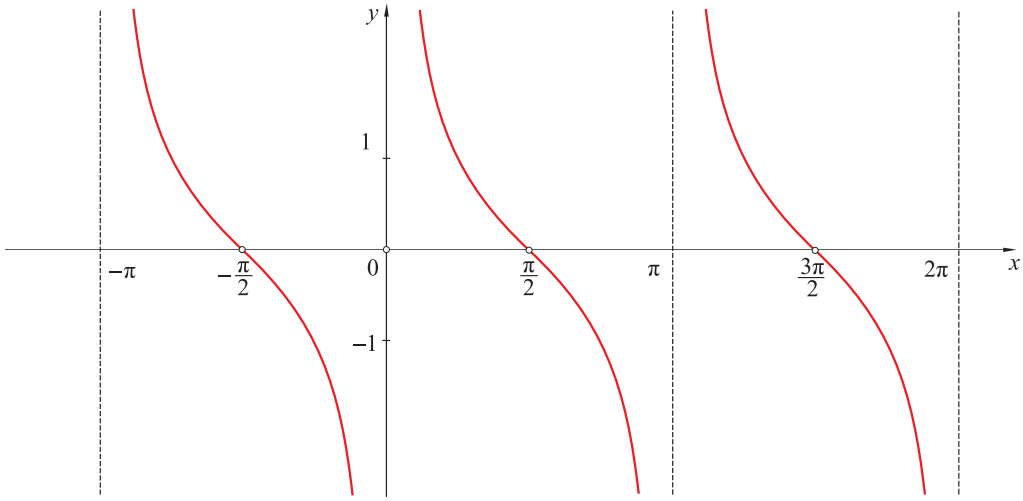
Ako t pada prema 0, točka $E(t)$ se približava točki I, a točka Q klizi po kotangensnoj osi udesno, tj. apscisa točke Q postaje sve veća. Slična se situacija pojavljuje kad se $t \in \langle 0, \pi \rangle$ približava broju π. Tada apscisa točke Q neograničeno pada.

Nacrtajmo **glavnu granu** kotangensoide, tj. graf funkcije ctg na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ koristeći kotangensnu os.



glavna grana kotangensoide

Primijetimo da na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ kotangens pada, ima nul-točku $x = \frac{\pi}{2}$, a pravci $x = 0$, $x = \pi$ su mu asimptote. Zbog periodičnosti slijedi da funkcija ctg pada na intervalima oblika $\langle k\pi, \pi + k\pi \rangle$, nul-točke su joj $\frac{\pi}{2} + k\pi$, a pravci $x = k\pi$ su joj asimptote te njen graf izgleda ovako



graf funkcije kotangens

Funkcija kotangens

1. Temeljni period je π.
2. Nul-točke su $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
3. Maksimum i minimum ne postoje.
4. ctg pada na intervalima $\langle k\pi, \pi + k\pi \rangle$, $k \in \mathbf{Z}$.
5. Kotangensoida je centralnosimetrična s obzirom na ishodište.
6. Asimptote kotangensoide su pravci $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Graf funkcije $f(x) = a\sin(bx + c)$

Graf ove funkcije također se naziva sinusoida, ali koeficijenti $a, b,$ i c utječu na ekstremalne vrijednosti, period i nul-točke funkcije. Razumno je uzeti da su koeficijenti a i b različiti od nule, jer u protivnom se funkcija svodi na konstantnu funkciju koju je lako nacrtati.

Amplituda

Broj $|a|$ naziva se **amplituda** funkcije $f(x) = a\sin(bx + c)$.

Kako je $|\sin(bx + c)| \leqslant 1$, to je

$$|a\sin(bx + c)| \leqslant |a|,$$

tj. graf će ležati između pravaca $y = -|a|$ i $y = |a|$, tj. maksimum funkcije je $|a|$, a minimum $-|a|$.

Koeficijent b regulira periodičnost funkcije f. Kad smo obrađivali periodičnost trigonometrijskih funkcija, u danom primjeru dokazali smo zapravo ovu tvrdnju:

Periodičnost

Temeljni period funkcije $f(x) = a\sin(bx + c)$ je $\dfrac{2\pi}{|b|}$.

Dakle, jedan val sinusoide sada neće biti duljine 2π, nego duljine $\dfrac{2\pi}{|b|}$.

Broj c nazivamo fazni pomak funkcije i on određuje u kojoj točki počinjemo crtati val. Naime, lako se provjeri da je $-\dfrac{c}{b}$ jedna nul-točka funkcije i val sinusoide počinjemo crtati u njoj. Drugim riječima, graf funkcije $f(x) = \sin(bx + c)$ dobivamo translacijom grafa funkcije $g(x) = \sin bx$ duž x-osi za $-\dfrac{c}{b}$.

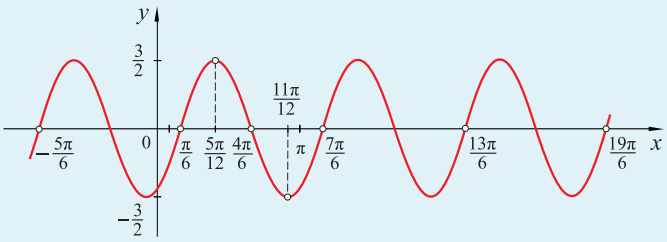
Fazni pomak

Broj c nazivamo **fazni pomak** funkcije $f(x) = a\sin(bx + c)$.

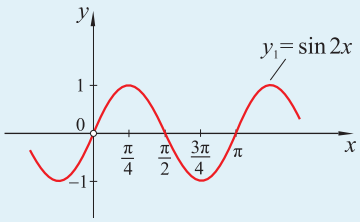
PRIMJER 1.

Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = \dfrac{3}{2}\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

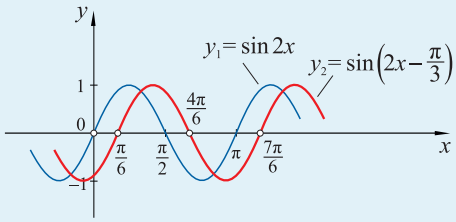
Period je $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$, a jedna nul-točka je $-\dfrac{c}{b} = \dfrac{\frac{\pi}{3}}{2} = \dfrac{\pi}{6}$. Dakle, jedan val crtamo na intervalu $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6} + \pi\right] = \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}\right]$. Nul-točke funkcije su rubovi i polovište intervala, tj. $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{4\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}$.



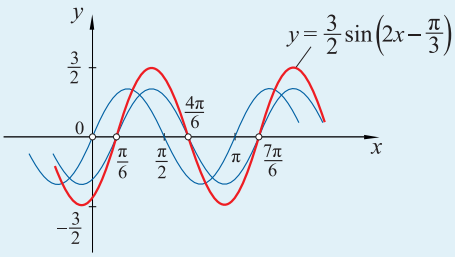
Kako je $a > 0$, maksimum je $\frac{3}{2}$ i postiže se u polovištu prve polovice intervala, tj. u $\dfrac{\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{6}}{2} = \dfrac{5\pi}{12}$. Minimum je $-\dfrac{3}{2}$ i postiže se u polovištu druge polovice intervala, tj. u $\dfrac{\frac{4\pi}{6} + \frac{7\pi}{6}}{2} = \dfrac{11\pi}{12}$. Graf se zatim periodički proširi na skup $\mathbf{R}$.



Graf ove funkcije mogli smo nacrtati i postepeno crtajući prvo funkciju $y_1 = \sin 2x$, zatim $y_2 = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ i konačno $y = \frac{3}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. Za funkciju $y_1 = \sin 2x$ znamo da ima period $\tau = \frac{2\pi}{2} = \pi$ i njen graf prikazan je na slici.

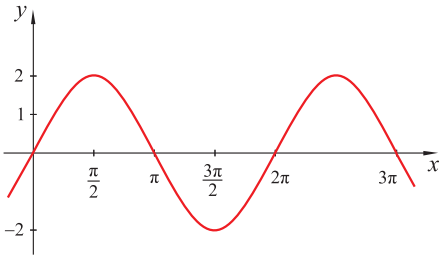


Nul-točka funkcije y_2 je $-\frac{c}{b} = \frac{\pi}{6}$, pa se graf te funkcije dobiva pomakom (translacijom) grafa od y_1 za $\frac{\pi}{6}$ udesno.

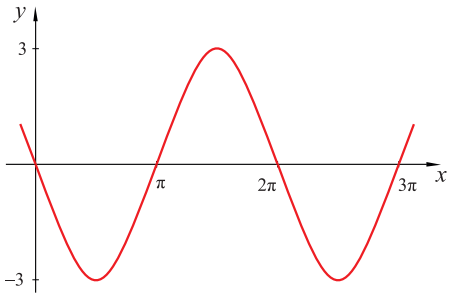


I konačno, funkcija $y = \frac{3}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ se od funkcije y_2 razlikuje samo u amplitudi i njen graf je na slici dan crvenom linijom.

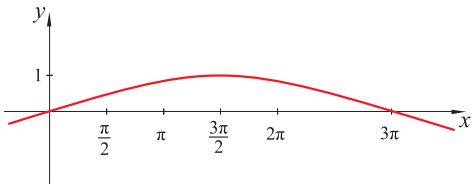
Nacrtajmo još nekoliko grafova funkcija oblika $f(x) = a\sin(bx + c)$.



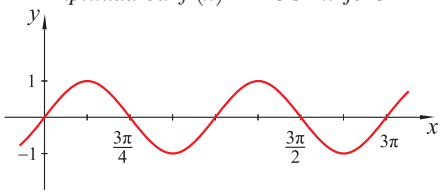
Amplituda od $f(x) = 2\sin x$ *je* 2.



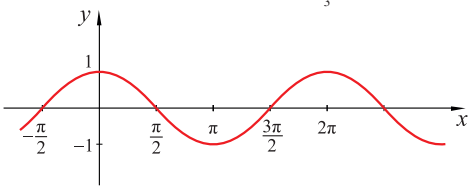
Amplituda od $f(x) = -3\sin x$ *je* 3.



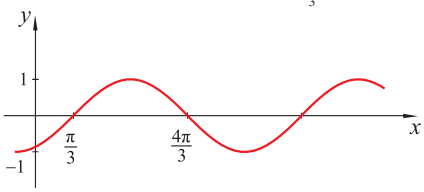
Period od $f(x) = \sin\frac{1}{3}x$ *je* $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$.



Period od $f(x) = \sin\frac{4}{3}x$ *je* $\frac{2\pi}{\frac{4}{3}} = \frac{3\pi}{2}$.



Fazni pomak funkcije $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ *je* $\frac{\pi}{2}$.



Fazni pomak funkcije $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3})$ *je* $-\frac{\pi}{3}$.

PRIMJER 2.

Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$.

Kad funkcije imaju isti temeljni period kao što je slučaj u ovom primjeru (i sin i cos imaju period 2π), tada se ovaj zbroj može pretvoriti u izraz oblika $\sin(x+\alpha)$.

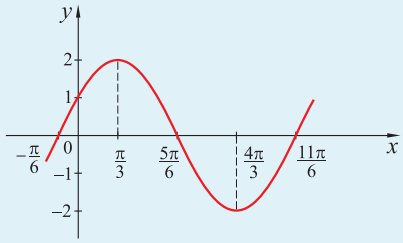
Prvo izračunamo korijen zbroja kvadrata koeficijenata uz $\sin x$ i $\cos x$:

$$\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

i napišimo f ovako:

$$f(x) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Sad se graf jednostavno nacrta.



ZADATCI 1.10.

1. U istom koordinatnom sustavu nacrtaj grafove danih funkcija f i g:

a $f(x) = \sin x, \quad g(x) = 3\sin x$

b $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{5}{2}\sin x$

c $f(x) = \sin x, \quad g(x) = -2\sin x$

d $f(x) = \sin x, \quad g(x) = -\frac{1}{2}\sin x$.

2. U istom koordinatnom sustavu nacrtaj grafove danih funkcija f i g:

a $f(x) = \cos x, \quad g(x) = 2\cos x$

b $f(x) = \cos x, \quad g(x) = -3\cos x$

c $f(x) = \cos x, \quad g(x) = -\frac{5}{2}\cos x$.

3. U istom koordinatnom sustavu nacrtaj grafove danih funkcija f i g:

a $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad g(x) = 2\operatorname{tg} x$

b $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad g(x) = -\operatorname{tg} x$.

4. U istom koordinatnom sustavu nacrtaj grafove danih funkcija f i g:

a $f(x) = \operatorname{ctg} x, \quad g(x) = 2\operatorname{ctg} x$

b $f(x) = \operatorname{ctg} x, \quad g(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x$.

5. U istom koordinatnom sustavu nacrtaj grafove danih funkcija f i g:

a $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \sin(x + \pi)$

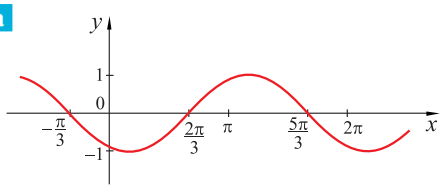
b $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

c $f(x) = \cos x, \quad g(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

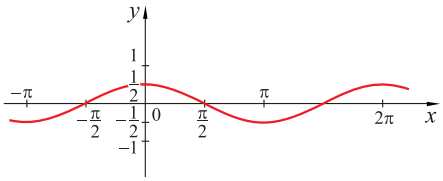
d $f(x) = \cos x, \quad g(x) = \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$.

6. Grafom je zadana funkcija $f(x) = a\sin(x + c)$. Odredi parametar a i c:

a



b



7. Skiciraj grafove ovih funkcija:

a $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad g(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

b $f(x) = \operatorname{ctg} x, \quad g(x) = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

8. Skiciraj grafove ovih funkcija:

a $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \sin 3x$

b $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \sin \frac{1}{3}x$

c $f(x) = \cos x, \quad g(x) = \cos 2x$

d $f(x) = \cos x, \quad g(x) = \cos \frac{1}{2}x$.

9. Skiciraj grafove ovih funkcija:

a $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad g(x) = \operatorname{tg} 2x$

b $f(x) = \operatorname{ctg} x, \quad g(x) = \operatorname{ctg} \frac{1}{2}x$.

10. Odredi amplitudu, period, nul-točke, točke minimuma i maksimuma danih funkcija, te skiciraj graf:

a $f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

b $f(x) = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

c $f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$

d $f(x) = 3\cos(x - \pi)$

e $f(x) = -2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

f $f(x) = -\frac{3}{2}\cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right)$.

11. Odredi period, nul-točke i asimptote danih funkcija, te skiciraj graf:

a $f(x) = 2\operatorname{tg}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$

b $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

12. Odredi amplitudu, period, nul-točke, točke minimuma i maksimuma danih funkcija, te skiciraj graf:

a $f(x) = 2\sin(3x - \pi)$

b $f(x) = -2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

c $f(x) = \frac{3}{2}\cos(2x - \pi)$

d $f(x) = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x + 3\pi\right)$.

13. Skiciraj graf danih funkcija:

a $f(x) = \sin 2x + 4$

b $f(x) = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$

c $f(x) = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

d $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 3$.

14. Nacrtaj grafove funkcija:

a $f(x) = |\cos x|$ **b** $f(x) = |\sin x|$ **c** $f(x) = |\operatorname{tg} x|$.

15. Nacrtaj grafove funkcija:

a $f(x) = \sin x + \cos x$ **b** $f(x) = \sin x - \cos x$

c $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ **f** $f(x) = \sin x + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

1.11. Trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe

Jednadžbe i nejednadžbe u kojima se nepoznanica x nalazi kao argument neke od trigonometrijskih funkcija nazivaju se **trigonometrijske jednadžbe** i **nejednadžbe**.

Primjerice, $\sin x = 0.73$, $\sin x - \cos x = 1$, $2^{\cos x} + \cos x = 0.5$ su trigonometrijske jednadžbe.

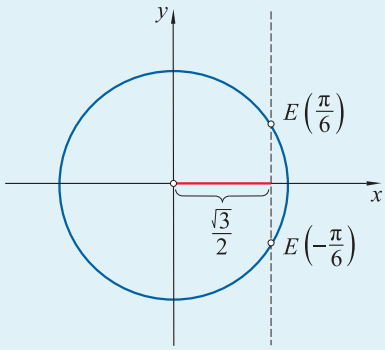
Rješenje trigonometrijske jednadžbe je svaki realan broj koji zadovoljava tu jednadžbu.

Ne postoji općenita metoda za rješavanje trigonometrijskih jednadžbi, ali se u postupku rješavanja uvijek pojavljuju elementarne jednadžbe oblika $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ ili $\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \mathbf{R}$. Zato prvo opišimo kako se rješavaju te jednadžbe.

PRIMJER 1.

Riješimo jednadžbu $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rješenja će biti oni realni brojevi x za koje točka pridružena na trigonometrijskoj kružnici ima apscisu $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Takve točke su dvije. Za jednu od njih je $x_1 = \frac{\pi}{6}$. Kako je kosinus parna funkcija i broj $x_2 = -\frac{\pi}{6}$ zadovoljava jednadžbu $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. No, zbog periodičnosti kosinusa i brojevi $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ su rješenja jednadžbe.



Zbog kratkoće zapisa, više nećemo na kružnici pisati $E\left(\frac{\pi}{6}\right)$, nego samo $\frac{\pi}{6}$.

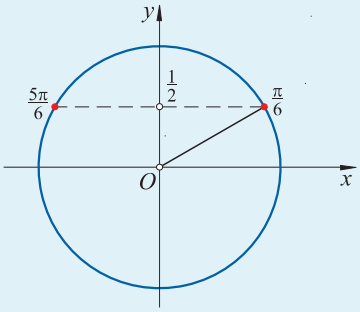
Dakle, skup rješenja jednadžbe $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ je $\left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\}$, što kraće zapisujemo ovako $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Primijetimo da početna jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja koja čine dvije skupine: u jednoj su brojevi $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, a u drugoj $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

PRIMJER 2.

Riješimo jednadžbu $\sin x = \frac{1}{2}$.

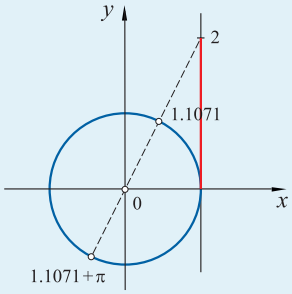
Nacrtajmo na trigonometrijskoj kružnici dva kuta čiji sinusi su $\frac{1}{2}$. To su $\frac{\pi}{6}$ i $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, ali su zbog periodičnosti sinusa i brojevi $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ i $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, rješenja jednadžbe.



PRIMJER 3.

Riješimo jednadžbu $\operatorname{tg} x = 2$.

S pomoću računala nađemo $x = 63.4349°$, odnosno $x = 1.1071$ rad. Zbog periodičnosti sva rješenja jednadžbe $\operatorname{tg} x = 2$ su $x = 63.4349° + 180°k$ ako zapisujemo u stupnjevima, tj. $x = 1.1071 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ ako radimo u radijanskoj mjeri.



PRIMJER 4.

Riješimo jednadžbe:

a) $\sin 2x = 0.5$ **b)** $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ **c)** $\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$ **d)** $\cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Uz supstituciju $2x = t$, jednadžba poprima oblik $\sin t = 0.5$ čija rješenja su $t_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $t_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Dakle, $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ili $2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, tj. $x_1 = \frac{\pi}{12} + k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

b) Uz supstituciju $t = x + \frac{\pi}{3}$, jednadžba glasi $\operatorname{tg} t = 1$ slijedi $t = \frac{\pi}{4} + k\pi$, tj. $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Rješenja jednadžbe $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ su $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

c) Iz $\operatorname{ctg} t = -1$, slijedi da je $t = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. Dakle, $2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

d) Rješenja osnovne jednadžbe $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ su $\pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, pa je $3x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, tj. $x = \pm\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

PRIMJER 5.

Riješimo jednadžbu $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$.

Uz supstituciju $\sin x = t$, ova jednadžba poprima oblik $2t^2 - 3t + 1 = 0$. Rješenja su joj $t_1 = 1$ i $t_2 = \frac{1}{2}$. Riješimo sada elementarne jednadžbe $\sin x = 1$ i $\sin x = \frac{1}{2}$. Rješenja prve jednadžbe su $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, a druge $x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ i $x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Dakle, rješenja početne jednadžbe su $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z}$.

Trigonometrijske jednadžbe oblika $a\sin x + b\cos x = c$

U svim dosadašnjim primjerima u jednadžbi se pojavljuje samo jedna trigonometrijska funkcija. I u jednadžbi $a\sin x + b\cos x = c$ se može supstitucijom $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$ jednadžba svesti na oblik u kojem se pojavljuje samo funkcija kosinus, ali se tada radi o iracionalnoj jednadžbi čije rješavanje je nešto kompliciranije. Zato se ova vrsta jednadžbi (a i mnoge druge) rješava metodom **univerzalne zamjene ili supstitucije**. Za tu metodu bitan je sljedeći poučak.

Poučak (univerzalna zamjena)

Neka je $x \in \mathbf{R} \setminus \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$. Ako je $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, tada je

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Dokaz. U izraz $\frac{2t}{1+t^2}$ uvrstimo $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ i iskoristimo poznate trigonometrijske identitete:

$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{1} = \sin x.$$

Analogno se dokazuje i druga formule. ◄

Pokažimo na jednom primjeru ovu metodu.

PRIMJER 6.

Riješimo jednadžbu $3\sin x + 4\cos x = 5$.

Koristeći univerzalnu zamjenu dobivamo $3\frac{2t}{1+t^2} + 4\frac{1-t^2}{1+t^2} = 5$, tj. $6t + 4(1-t^2) = 5(1+t^2)$.

To je kvadratna jednadžba $(3t-1)^2 = 0$ čije rješenje je $t = \frac{1}{3}$.

Dakle, zadatak se sveo na rješavanje elementarne jednadžbe oblika $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$.
Rješenje je $\frac{x}{2} = 18°26'6'' + 180°k$. Dakle, skup rješenja početne jednadžbe je

$$\{36°52'12'' + 360°k : k \in \mathbf{Z}\}.$$

PRIMJER 7.

Pokažimo još jedan način rješavanja jednadžbi tipa $a\sin x + b\cos x = c$. Riješimo jednadžbu

$$3\sin x + 4\cos x = 5$$

svođenjem na oblik $\sin(x+\alpha) = D$.

Podijelimo li cijelu jednadžbu brojem $\sqrt{a^2+b^2} = 5$ dobijemo $\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = 1$. Ovo dijeljenje dovodi jednadžbu na sličan oblik, ali sada su koeficijenti uz $\sin x$ i $\cos x$ brojevi iz $[-1, 1]$ čija je suma kvadrata jednaka 1. Neka je $\alpha \in \langle 0, 90°\rangle$ broj za koji vrijedi $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ i $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, tj. $\alpha \approx 53°7'48''$. Tada prethodna jednadžba ima oblik

$$\cos\alpha\sin x + \sin\alpha\cos x = 1,$$

odnosno, $\sin(x+\alpha) = 1$. Rješenja ove elementarne jednadžbe su $x + \alpha = 90° + 360°k$, tj. $x = 90° - 53°7'48'' + 360°k = 36°52'12'' + 360°k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Istaknimo još jednom da ne postoji jedinstvena metoda rješavanja trigonometrijskih jednadžbi. Opisali smo kako se rješavaju neke karakteristične jednadžbe, ali to ne znači da smo iscrpli bogato područje trigonometrijskih jednadžbi.

Sustavi trigonometrijskih jednadžbi

Sustavom trigonometrijskih jednadžbi nazivamo svaki sustav jednadžbi od kojih je bar jedna trigonometrijska.

PRIMJER 8.

Riješimo sustav: $\sin x \cdot \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}$; $\quad \cos x \cdot \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Zbrojimo li ove dvije jednadžbe, dobit ćemo $\cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, a ukoliko ih oduzmemo, dobivamo $\cos(x+y) = 0$. Dakle, $x - y = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ i $x + y = \pm\frac{\pi}{2} + 2m\pi$, $m, k \in \mathbf{Z}$. Zbrajajući te dvije jednadžbe dobivamo četiri klase rješenja za x i to $x_1 = \frac{\pi}{3} + (k+m)\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{6} + (k+m)\pi$, $x_3 = -\frac{\pi}{3} + (k+m)\pi$, $x_4 = \frac{\pi}{6} + (k+m)\pi$, a pripadni y su $y_1 = \frac{\pi}{6} + (m-k)\pi$, $y_2 = -\frac{\pi}{3} + (m-k)\pi$, $y_3 = -\frac{\pi}{6} + (m-k)\pi$, $y_4 = \frac{\pi}{3} + (m-k)\pi$.

Trigonometrijske nejednadžbe

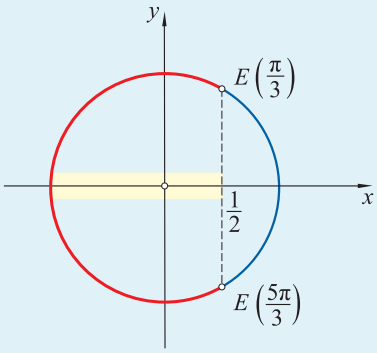
Slično kao pri rješavanju trigonometrijskih jednadžbi, rješavanje trigonometrijskih nejednadžbi svodi se na rješavanje elementarne trigonometrijske jednadžbe oblika

$$f(x) \gtrless a, \quad a \in \mathbf{R},$$

gdje je f trigonometrijska funkcija. Riješimo neke elementarne trigonometrijske nejednadžbe.

PRIMJER 9.

Riješimo nejednadžbu $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$.



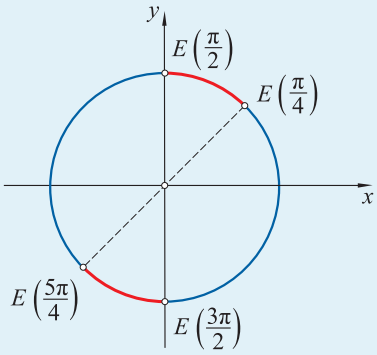
Točke trigonometrijske kružnice kojima je apscisa jednaka $\frac{1}{2}$ pridružene su brojevima $\frac{\pi}{3}$ i $\frac{5\pi}{3}$. Točke kojima je apscisa manja od $\frac{1}{2}$ su točke luka kružnice od $\frac{\pi}{3}$ do $\frac{5\pi}{3}$. Tim točkama kružnice odgovaraju brojevi iz ovih intervala: $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi, \frac{5\pi}{3}+2\pi\right]$, $\left[\frac{\pi}{3}-2\pi, \frac{5\pi}{3}-2\pi\right]$, $\left[\frac{\pi}{3}+4\pi, \frac{5\pi}{3}+4\pi\right]$, $\left[\frac{\pi}{3}-4\pi, \frac{5\pi}{3}-4\pi\right]$ ...

Dakle, rješenja nejednadžbe $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$ su svi realni brojevi iz gore navedenih intervala. Uočimo da je svaki od njih oblika $\left[\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{5\pi}{3}+2k\pi\right]$, gdje je k cijeli broj, pa se skup rješenja nejednadžbe zapisuje ovako: $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\left[\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{5\pi}{3}+2k\pi\right]$, pri čemu znak $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}$ čitamo "unija po $k \in \mathbf{Z}$".

Koristimo još i zapise: $x \in \left[\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{5\pi}{3}+2k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$ ili $\frac{\pi}{3}+2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3}+2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

PRIMJER 10.

Riješimo nejednadžbu $\operatorname{tg} x \geqslant 1$.



Točke trigonometrijske kružnice za koje je $\operatorname{tg} x = 1$ pridružene su brojevima $\frac{\pi}{4}$ i $\frac{5\pi}{4}$, a točke za koje je $\operatorname{tg} x \geqslant 1$ su točke luka od $\frac{\pi}{4}$ do $\frac{\pi}{2}$ i od $\frac{5\pi}{4}$ do $\frac{3\pi}{2}$. Skup rješenja nejednadžbe $\operatorname{tg} x \geqslant 1$ je $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\left[\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right\rangle$.

ZADATCI 1.11.

1. Riješi osnovne trigonometrijske jednadžbe:

a $\sin x = \frac{1}{2}$ **b** $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **c** $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **d** $\sin x = 1$

e $\cos x = \frac{1}{2}$ **f** $\cos x = 0$ **g** $\sin x = -\frac{1}{2}$ **h** $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

i $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **j** $\cos x = -\frac{1}{2}$ **k** $\sin x = -1$ **l** $\cos x = -1$.

2. Riješi jednadžbe:

a $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ **b** $\operatorname{tg} x = 1$ **c** $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$ **d** $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Riješi osnovne trigonometrijske jednadžbe:

a $\sin x = 0.234$ **b** $\sin x = -0.482$ **c** $\cos x = 0.288$ **d** $\cos x = -0.883$

e $\operatorname{tg} x = 5.143$ **f** $\operatorname{tg} x = -2.101$ **g** $\operatorname{ctg} x = 1.924$ **h** $\operatorname{ctg} x = -14.378$.

4. Ako je α dani realan broj, nađi sve x za koje vrijedi:

a $\sin x = \sin \alpha$ **b** $\cos x = \cos \alpha$ **c** $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$ **d** $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} \alpha$.

5. Riješi jednadžbe:

a $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **b** $\sin 10x = -\frac{1}{2}$ **c** $\cos 2x = 1$ **d** $\cos 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Riješi jednadžbe:

a $\operatorname{tg} 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **b** $\operatorname{tg} 5x = \sqrt{3}$ **c** $\operatorname{tg} 4x = 1$ **d** $\operatorname{tg} 2x = 0$.

7. Riješi jednadžbe:

a $\operatorname{ctg} 2x = 1$ **b** $\operatorname{ctg} 3x = \sqrt{3}$ **c** $\operatorname{ctg} 2x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ **d** $\operatorname{ctg} 6x = -1$.

8. Riješi jednadžbe:

a $\sin(x+\pi) = \frac{1}{2}$ **b** $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **c** $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

d $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$ **e** $\cos(4x - \pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **f** $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

9. Riješi jednadžbe:

a $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ **b** $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ **c** $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

d $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **e** $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$ **f** $\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -1$.

10. Riješi jednadžbe:

a $2\sin 3x + 1 = 0$

b $2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0$

c $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,2x - 1 = 0$

d $3\,\mathrm{ctg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0$.

11. Riješi sljedeće jednadžbe svodeći ih na kvadratne:

a $4\sin^2 x - 1 = 0$

b $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

c $6\,\mathrm{tg}^2 x - 5\,\mathrm{tg}\,x + 1 = 0$

d $\mathrm{ctg}^2 x + 2\,\mathrm{ctg}\,x - 2 = 0$

e $8\sin^2 x + 6\cos x - 3 = 0$

f $2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x - 2 = 0$.

12. Riješi jednadžbe svodeći ih na kvadratne:

a $4\cos^2 x - 7\sin x\cos x + 3\sin^2 x = 0$

b $3\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 0$

c $\cos^2 x - 12\sin x\cos x + 32\sin^2 x = 0$

d $3\sin^2 x + 3\cos^2 x = 2\sqrt{3}\sin 2x$

e $2\sin^2 x + 4\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 5$

f $6\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 2$.

13. Riješi ove jednadžbe:

a $\sin^3 x - 1 = 0$

b $2\cos^4 x - 3\cos^2 x - 2 = 0$

c $\mathrm{tg}^6 x - 64 = 0$

d $\sin^3 x + \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$.

14. Riješi linearne jednadžbe:

a $3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$

b $3\sin x = \cos x$

c $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$

d $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2$

e $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

f $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2$.

15. Riješi jednadžbe koristeći transformaciju zbroja u produkt:

a $\cos x + \cos 2x = 0$

b $\sin x - \sin 8x = 0$

c $\cos x = \cos 4x$

d $\sin x = \sin 7x$

e $\cos^2 4x - \cos^2 3x = 0$

f $\sin^2 8x - \sin^2 2x = 0$

g $\sin x + \sin 7x = \sin 4x$

h $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$.

16. Riješi jednadžbe svodeći ih na produkt nekoliko trigonometrijskih izraza:

a $\sin 2x = 2\cos x$

b $\sin 2x = \cos^2 x$

c $\mathrm{tg}\,x + \sin x = 0$

d $\mathrm{ctg}\,x - 3\cos x = 0$

e $\sin x + \mathrm{tg}\,x = 1 + \cos x$

f $3\sin 2x = 2\cos x$

g $\sin^3 x - \cos^3 x = 0$

h $\cos 2x = \cos x + \sin x$.

17. Riješi jednadžbe:

a $\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

b $\sin x + \mathrm{tg}\,x = \sqrt{3}(1 + \cos x)$

c $\cos 2x + \sin 2x = \sin 3x + \cos 3x$

d $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x + \cos x$

e $\sin^4 x + 5\cos 2x + 4 = 0$

f $\cos 3x - \cos 7x = \sqrt{3}\sin 2x$

g $\cos x - 2\cos 3x + \cos 5x = 0$

h $\cos 3x + \sin 2x - \cos x = 0$.

18. Riješi jednadžbe:

a $\cos 3x \cos 5x = \cos 7x \cos 9x$ **b** $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x$

c $\sin x \cos 7x = \sin 3x \cos 5x$ **d** $\cos 2x \sin 5x = \cos x \sin 6x$.

19. Riješi sustav jednadžbi:

a $\begin{aligned} \sin x + \sin y &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x + y &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$ **b** $\begin{aligned} \cos x + \cos y &= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x + y &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$ **c** $\begin{aligned} x + y &= \frac{\pi}{3} \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y &= 3 \end{aligned}$.

20. Riješi sustave:

a $\begin{aligned} \sin x \sin y &= 1 \\ \cos x \cos y &= 0 \end{aligned}$ **b** $\begin{aligned} \sin x \sin y &= -\frac{1}{4} \\ \cos x \cos y &= \frac{3}{4} \end{aligned}$ **c** $\begin{aligned} \sin x \cos y &= \frac{1}{2} \\ \sin y \cos x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$.

21. Riješi osnovne trigonometrijske nejednadžbe:

a $\sin x > \frac{1}{2}$ **b** $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ **c** $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ **d** $\cos x \geqslant -\frac{1}{2}$

e $\operatorname{tg} x < 1$ **f** $\operatorname{tg} x \leqslant \sqrt{3}$ **g** $\operatorname{ctg} x > -\frac{\sqrt{3}}{3}$ **h** $\operatorname{ctg} x \leqslant -1$.

22. Riješi trigonometrijske nejednadžbe:

a $\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ **b** $2 \sin x + \sqrt{3} < 0$ **c** $\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$

d $2 \cos x + 1 \geqslant 0$ **e** $\operatorname{tg} 2x - 3 < 0$ **f** $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \leqslant 1$.

23. Riješi nejednadžbe:

a $2 \cos^2 x - 1 < 0$ **b** $2 \cos^2 x - 7 \cos x + 3 < 0$ **c** $2 \sin^2 x - \sin x - 1 \geqslant 0$

d $24 \cos^2 x - 13 \sin x - 22 > 0$ **e** $\sin x + \cos^2 x \leqslant 1$ **f** $\operatorname{tg}^2 x - 3 \geqslant 0$.

24. Riješi nejednadžbe:

a $\cos x > \cos 2x$ **b** $\sin 3x \leqslant \sin 4x$ **c** $\cos 8x \leqslant \cos 4x$ **d** $\sin 2x \geqslant \sin 4x$.