Da bismo znali kako treba postupati pri zaokruživanju različitih brojeva, uvedeno je pravilo koje glasi:

decimalne brojeve zaokružujemo tako da, ako se iza znamenke na koju zaokružujemo nalazi znamenka **5, 6, 7, 8** ili **9**, zaokružujemo **naviše**, a ako se iza znamenke na koju zaokružujemo nalazi znamenka **0, 1, 2, 3** ili **4**, zaokružujemo **naniže**.

Zadatci za vježbu

1. Broj 5.863 zaokružite na: a) dvije decimale, b) jednu decimalu.

2. Brojeve 4.358, 5.651 i 3.246 zaokružite na dvije decimale.

1.4.2. Iracionalni brojevi

Džepno računalo s kvadratnim korijenom pri računanju vrijednosti $\sqrt{2}$ daje aproksimaciju, a ne točnu vrijednost.

Iz prethodnih primjera zaključujemo da se svaki racionalni broj može zapisati kao decimalni broj s konačnim zapisom ili beskonačnim periodnim, odnosno mješovito periodnim zapisom.

Prirodno se pojavljuje pitanje što je s decimalnim brojevima koji imaju beskonačan neperiodni zapis, primjerice:

$$0.123456789101112131415161718192021\ldots \text{ ili}$$
$$0.1223334444555556666666\ldots \text{ ili}$$
$$0.101001000100001000001\ldots\,.$$

Takvi se brojevi, očigledno ne dobivaju kao rezultat dijeljenja. Naime, kod dijeljenja prirodnog broja m prirodnim brojem n, mogu se pojaviti samo ostatci koji su manji od n. Različitih ostataka može biti najviše n, i to: 0, 1, 2, ... , $n - 1$. Ako se pri dijeljenju ne pojavi ostatak nula, onda se neki od najviše n različitih ostataka mora ponoviti, a time i niz znamenaka u količniku, tj. javlja se periodnost.

Pi ili π je matematička konstanta, široko primjenjivana u matematici i fizici. Definira se kao odnos opsega i promjera kruga. π još nazivamo Arhimedova konstanta ili Ludolfov broj.

U praksi se bilježi malim grčkim slovom π.

Broj π je iracionalan broj. To je dokazao 1768. Johann Lambert.

Numerička vrijednost π, zaokružena na 64 decimalna mjesta, jest: π = 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 5923

Sredina ožujka, točnije 14. ožujka određen je za međunarodno obilježavanje broja π. Znate li zašto?

Navedeni brojevi s beskonačnim neperiodnim zapisom primjeri su brojeva koji se ne mogu napisati u obliku razlomka.

Brojeve koje ne možemo napisati u obliku razlomka nazivamo **iracionalnim brojevima**.

Primjer iracionalnog broja je i $\sqrt{2}$. Vrijednost tog broja na određeni broj decimala:

$$1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ \ldots\,.$$

Važno je uočiti da mu možemo izračunati samo približnu vrijednost jer je njegov decimalni zapis beskonačan i neperiodni. Dakle, $\sqrt{2}$ se ne može napisati u obliku razlomka, to jest, $\sqrt{2}$ nije racionalan broj.

Brojevi $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $1+\sqrt{2}$, $3-\sqrt{2}$, ... također su iracionalni brojevi. Sjetimo se da je opseg kruga $O = 2r\pi$, gdje je i π iracionalan broj, a u praktičnim primjenama obično ga zamjenjujemo njemu približnim brojem 3.14.

d) Koliko je zadataka riješeno s postotkom manjim od 30 %?
e) Koliko je zadataka riješeno s postotkom većim od 40 % i manjim od 70 %?
f) Postoji li zadatak koji nije riješio nijedan natjecatelj?
g) Postoji li zadatak koji su riješili svi natjecatelj?

Provjerite svoje znanje

1. Koliko je prirodnih brojeva u intervalu $\left\langle 2, \frac{11}{2}\right]$?

2. Odredite tri racionalna broja između $\frac{1}{9}$ i $\frac{1}{7}$.

3. Rabeći džepno računalo po potrebi, odredite koji je od navedenih brojeva **najveći**?

a) $\sqrt{8}-\sqrt{2}$, b) $14.1 \cdot 10^{-1}$, c) $\left|-\frac{7}{5}\right|$, d) $\frac{3}{2}-\frac{1}{12}$.

4. Koju vrijednost ima razlomak $\frac{231}{630}$?

a) $\frac{11}{90}$, b) $\frac{7}{30}$, c) $\frac{11}{30}$, d) $\frac{7}{10}$.

5. Koji od brojeva pripada skupu iracionalnih brojeva?

a) 4.33, b) $-\sqrt{16}$, c) $-\frac{4}{7}$, d) $\sqrt{5}$.

6. Koji je od navedenih brojeva najbliži broju 3? a) π, b) $4-\frac{2}{3}$, c) $\sqrt{10}$, d) 1.5^3.

Izračunajte:

7. $2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 4^2$.

8. $4-\{-3-[1-(10-9)]\}$.

9. $\left[\left(2.5-3\frac{1}{3}\right)\cdot 1.2\right]:\left(0.75-\frac{2}{3}\right)$.

10. $\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{8}{15}\right)\cdot 5\frac{1}{7}-2\right]:\left[\left(0.75+\frac{1}{4}\right):\frac{2}{3}+0.8\right]$.

11. $\left(\frac{1+0.96}{1-0.96}-1\right):\left(\frac{1+0.96}{1-0.96}+1\right)$.

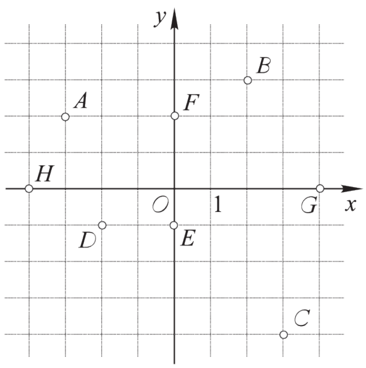
12. $\dfrac{1+3\cdot(1.5-1)}{0.1-2\frac{3}{5}}$.

13. $\dfrac{1+4.5\cdot\frac{1}{3}}{(2:0.1-4)\cdot 0.125}$.

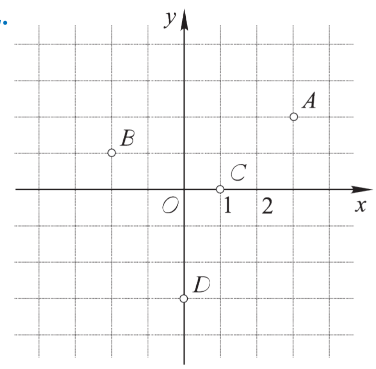
Rješenja

5.1. Točka u koordinatnom sustavu

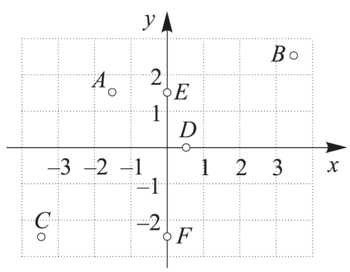
1.



2.



3.



5.2. Udaljenost točaka u koordinatnom sustavu

1. a) 13, b) 3, c) 11, d) $\sqrt{74}$, e) $\sqrt{5}$.

2. a) 5, b) $\sqrt{61}$, c) 13.

3. A (4, 0), B (0, 4), C (–4, 0), D (0, –4).

5.3. Polovište dužine

1. a) $P(4,1)$, b) $P\left(1,\frac{9}{2}\right)$.

2. a) $A'(-7,1)$, b) $A'(7,1)$,

1. Apscisa.

2. Ne. Na prvom je mjestu koordinata x, a na drugom, y, zamijenimo li im mjesta dobivamo različite točke.

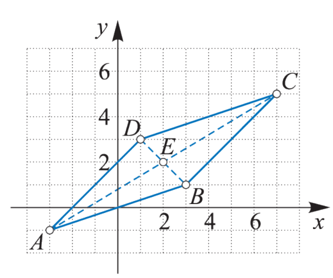
3. a. **4.** d. **5.** $B(7, 9)$.

1. a) Između 25-e i 30-e godine. b) Između 20-e i 25-e godine. c) Između 55-e i 60-e godine starosti.

2. $d_1 = d_2 = \sqrt{65}$, pravokutnik.

3. $\left(2a,\frac{b+c}{2}\right)$.

4. Polovišta obiju dužina je točka (2, 2). Paralelogram.



1. a) 1970., b) 2008., c) kasnije.

2. (3, 1), $\frac{\sqrt{232}}{2} \approx 7.62\,\text{m}$.

3. $S(3, 1)$, $r = \sqrt{32}$.

1. $A(2, 3)$, $B(3, 2)$, $C(-2, -1)$, $D(-1, -2)$.

2. a) 2., b) 3., c) 4., d) 3., e) x-os, f) 4.

3. a) $D(2, 3)$, b) $D(-5.5, -4)$, c) $D(-4, -2)$, d) $D(-1, 2)$.

4. a) da, b) ne, c) da.

Iz toga zaključujemo da je duljina kružnog luka, koji pripada središnjem kutu mjere α,

$$l = \frac{2r\pi}{360^\circ} \cdot \alpha \text{ , odnosno}$$

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}.$$

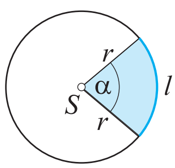
PRIMJER 1

Izračunajmo duljinu luka polumjera $r = 1$ cm ako je mjera pripadajućeg središnjeg kuta: a) $\alpha = 30^\circ$, b) $\alpha = 120^\circ$.

Rješenje

a) $l = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ} = \frac{1 \cdot \pi \cdot \cancel{30^\circ}}{\cancel{180^\circ}} = \frac{\pi}{6}$, duljina luka je $\frac{\pi}{6}$ cm.

b) $l = \frac{1 \cdot \pi \cdot \cancel{120^\circ}}{\cancel{180^\circ}} = \frac{2\pi}{3}$, duljina luka je $\frac{2\pi}{3}$ cm.



Istovjetno prethodnom zaključivanju određujemo kako površina kružnog isječka ovisi o mjeri pripadajućeg središnjeg kuta.

Dakle, za kut $\alpha = 360^\circ$ pripadajući kružni isječak je cijeli krug površine $r^2\pi$. Za kut mjere $\alpha = 1^\circ$ površina pripadajućeg kružnog isječka je

$$P = \frac{r^2\pi}{360^\circ}.$$

Za kut mjere α površina pripadajućeg kružnog isječka je

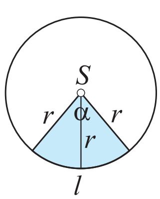
$$P = \frac{r^2\pi}{360^\circ} \cdot \alpha .$$

PRIMJER 2

Izračunajmo površinu kružnog isječka kojemu je $r = 3$ cm i središnji kut $\alpha = 60^\circ$.

Rješenje

$$P = \frac{r^2\pi}{360^\circ} \cdot \alpha = \frac{3^2 \cdot \pi}{\cancel{360^\circ}} \cdot \cancel{60^\circ} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \approx 4.71 \text{ cm}^2.$$



Formulu za izračunavanje površine kružnog isječka možemo napisati i u drugom obliku:

$$P = \frac{r^2\pi \cdot \alpha}{360^\circ} = \frac{r \cdot \overbrace{r \cdot \pi \cdot \alpha}^{l}}{2 \cdot 180^\circ} = \frac{r \cdot l}{2}, \qquad P = \frac{r \cdot l}{2}.$$

Taj se oblik formule lakše pamti jer je sličan formuli za površinu trokuta.

PRIMJER 3

Izračunajmo površinu kružnog isječka ako je $r = 4$ cm i $l = 12\pi$ cm.

Rješenje

$P = \frac{r \cdot l}{2} = \frac{4 \cdot 12\pi}{2} = 24\pi$. Tražena površina je 24π cm^2.

7.4.1. Duljina kružnog luka i površina kružnog isječka

1. a) $l = 4.7$ mm, b) $l = 7.13$ cm.

2. $P = 418.1\ \text{cm}^2$. **3.** $r = 10$ cm.

4. $\alpha = 29.2° = 29°12'$.

7.4.2. Poučak o obodnom i središnjem kutu i Talesov poučak

1. $\alpha = 145°$. **2.** $\beta = 70°20'$.

3. a) 63°30', b) 240°, c) 40°, d) 110°.

4. 144° ili 216°.

7.5. Mnogokuti

1. a) 12, b) 15. **2.** a) 65, b) 90.

3. a) 1800°, b) 2700°.

4. a) 11, b) 19. **5.** $n = 8.8$, ne.

7.5.1. Pravilni mnogokuti

1. a) 9, b) 15.

2. $\dfrac{360°}{n} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{n-2}{n} \cdot 180°$, $n = 8$.

1. d. **2.** d. **3.** a. **4.** b.

5. niti jedna.

6. trokut a) (2, –1), b) (–2, 1); četverokut a) (2, –1), (5, –4), b) (–2, 1), (–5, 4);
peterokut a) (3, –1), (5, –4), b) (–3, 1), (–5, 4);
šesterokut a) (1, –1), (2, –5), (4, –3), b) (–1, 1), (–4, 3), (–2, 5), b) (–1, 1), (–2, 5), (–4, 3);
sedmerokut a) (1, –2), (3, –5), (5, –2), b) (–1, 2), (–3, 5), (–5, 2).

7. 150°. **8.** a) ne, b) ne.

1.

tip bicikla	28	26	24	20	18
promjer kotača (mm)	711	66.04	609.6	508	457.2
opseg kotača (m)	2.23	0.207	1.915	1.596	1.436

2. a) krug, b) za 2.142 cm^2.

3. a) $\dfrac{50}{3}\pi\ \text{cm}^2$, b) $30\pi\ \text{cm}^2$.

4. a) 30°, b) 72°.

5. a) $P = \left(\dfrac{\pi}{2} + 3\right)\text{cm}^2, O = 3\pi\ \text{cm}$, b) $P = (8 - \pi)\ \text{cm}^2, O = 4\pi\ \text{cm}$, c) $P = \left(\dfrac{5\pi}{4} + 6\right)\text{cm}^2, O = \left(\dfrac{7}{2}\pi + 3\right)\text{cm}$,
d) $P = (4 - \pi)\ \text{cm}^2, O = 3\pi\ \text{cm}$.

6. a) $P = 30.9\ \text{cm}^2$, $O = 85.7$ cm; b) $O = 12\pi$ cm, $P = 30.9\ \text{cm}^2$.

7. 36°, 54°, 90°.

8. $\alpha = 21°46'$, $2\alpha = 43°32'$.

9. $\alpha = 38°45'$, $2\alpha = 77°30'$.

10. a) 8 cm, b) $8\sqrt{2}$ cm, c) 16 cm.

11. a.

12. $\delta = \gamma = \alpha = 110°$, $\beta = 140°$; b) $\alpha = 100°$, $\gamma = \varepsilon = 110°$.

13. a) 13, b) 14, c) 20, d) 48.

14. 12. **15.** $O = 72$ cm.

1. a) Prilikom prve vožnje pogonski kotač okrenuo se 6961 puta.
b) U jednoj minuti kotač se okrenuo (99.4) 100 puta.

PRIMJER 2

Koliko radijana ima kut $\alpha = 23°$?

Rješenje

$180° = \pi$ rad

$1° = \dfrac{\pi}{180}$ rad = π ÷ 1 8 0 = 0.017453293

$1° \approx 0.01745$ rad

$23° = 0.017453293 \cdot 23 = 0.401425728 \text{ rad} \approx 0.4014 \text{ rad}$.

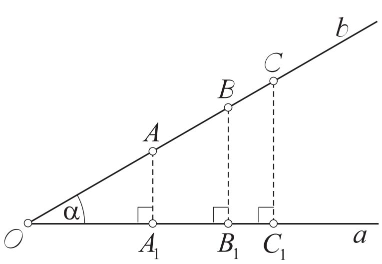
Zadatci za vježbu

1. Koliko stupnjeva, minuta i sekundi ima kut: a) $\dfrac{\pi}{12}$, b) $\dfrac{\pi}{8}$, c) 1.268 rad, d) 0.5 rad?

2. Koliko radijana ima kut: a) 42°, b) 52°, c) 62°, d) 72°?

3. Koliko radijana ima kut: a) 72°52'42", b) 52°42'32", c) 62°52'42"?

8.2. Definicije trigonometrijskih funkcija šiljastog kuta



Neka je $\measuredangle(aOb)$ šiljasti kut kojemu je mjera α.

Na završnom kraku kuta $\measuredangle(aOb)$ po volji odaberemo točke A, B, C pa iz njih spustimo okomice na početni krak a. Dobili smo točke A_1, B_1, C_1. Tako smo dobili niz sličnih pravokutnih trokuta AOA_1, BOB_1, COC_1. Odgovarajuće stranice sličnih trokuta su razmjerne pa vrijedi:

$$\frac{|A_1A|}{|OA|} = \frac{|B_1B|}{|OB|} = \frac{|C_1C|}{|OC|} = k .$$

Uočimo da je u brojniku ovih omjera duljina katete nasuprot kutu α i da je u nazivniku duljina hipotenuze. Vrijednost ovoga omjera je realan broj koji ne ovisi o izboru točaka A, B, C, već ovisi samo o veličini kuta α. Dakle, brojevna vrijednost ovoga omjera je funkcija kuta α, a pišemo je $\sin\alpha$.

konstanta (lat. *constare*) stalna ili nepromjenjiva veličina (nešto što se ne mijenja, tijekom vremena ili bilo kako drukčije: to je fiksna vrijednost)

Sinus (pišemo sin) kuta u pravokutnom trokutu je omjer duljine katete nasuprot tom kutu i duljine hipotenuze.

Analogno zaključujemo da je

$$\frac{|OA_1|}{|OA|} = \frac{|OB_1|}{|OB|} = \frac{|OC_1|}{|OC|} = \text{konstanta}$$

Kosinus (pišemo cos) kuta u pravokutnom trokutu je omjer duljine katete uz taj kut i hipotenuze.

Zadatci za vježbu

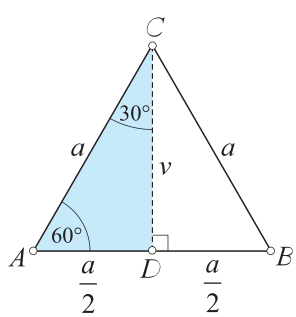
1. Izračunajte vrijednosti trigonometrijskih funkcija kuta α pravokutnog trokuta ABC kateta $a = 15$ cm i $b = 8.5$ cm.

2. Izračunajte vrijednosti trigonometrijskih funkcija kuta α pravokutnog trokuta ABC kateta $a = 17$ cm i hipotenuze $c = 31.5$ cm.

3. Nacrtajte kut α ako je: a) $\operatorname{tg}\alpha = 2$, b) $\cos\alpha = 0.8$.

4. Koji od brojeva $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{10}}{10}, \pi, \frac{1}{100}$ može biti sinus nekog kuta?

8.3. Vrijednosti trigonometrijskih funkcija kutova od 30°, 60° i 45°



Na slici je nacrtan jednakostraničan trokut ABC, duljine stranice a, i jedna njegova visina. Duljina visine je $v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tako smo dobili pravokutan trokut ADC u kojemu su kutovi 60° i 30°.

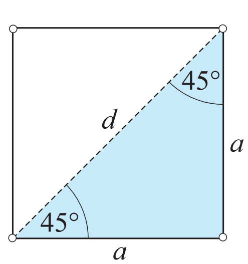
Prema definicijama trigonometrijskih funkcija dobivamo:

$$\sin 30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}, \qquad \sin 60° = \frac{v}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 30° = \frac{v}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos 60° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{\frac{a}{2}}{v} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \operatorname{tg} 60° = \frac{v}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg} 30° = \frac{v}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}, \qquad \operatorname{ctg} 60° = \frac{\frac{a}{2}}{v} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

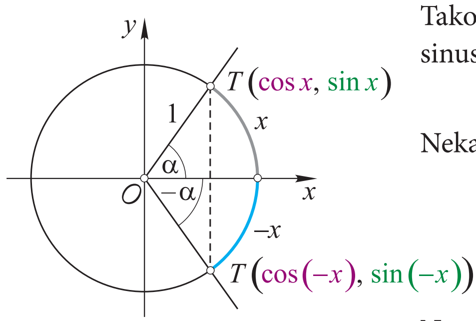


Na slici je nacrtan kvadrat stranice a. Duljina njegove dijagonale je $d = a\sqrt{2}$. Dijagonala je podijelila kvadrat na dva jednakokračna pravokutna trokuta. Njihovi kutovi su 45°.

Prema definicijama trigonometrijskih funkcija, dobivamo:

$$\sin 45° = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \operatorname{tg} 45° = \frac{a}{a} = 1,$$

$$\cos 45° = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \operatorname{ctg} 45° = \frac{a}{a} = 1.$$



Vrijednosti tih funkcija su: $\cos x$ = apscisa točke T,
$\sin x$ = ordinata točke T.

Također uočavamo da se vrijednosti trigonometrijskih funkcija kosinus i sinus nalaze u granicama od −1 do 1, tj.:

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \quad -1 \leq \sin x \leq 1, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Neka su točke T i T' na brojevnoj kružnici simetrične u odnosu na x-os.

Točke T i T' imaju jednake apscise, a ordinate su im suprotnog predznaka pa vrijedi:

$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\sin(-x) = -\sin x.$$

Navedene formule vrijede za bilo koji realni broj x.

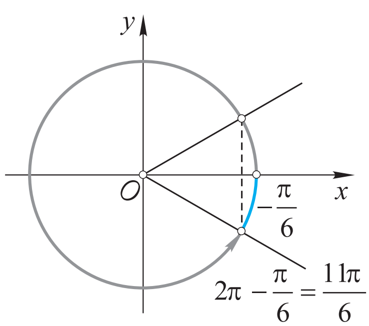
Ako za neku funkciju $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vrijedi da je $f(-x) = f(x)$, kažemo da je funkcija **parna**, a ako je $f(-x) = -f(x)$, kažemo da je **neparna**.

Kosinus je parna, a **sinus neparna funkcija**.

PRIMJER 1

Na temelju parnosti i neparnosti trigonometrijskih funkcija sinus i kosinus i njihovih vrijednosti za kut mjere $\frac{\pi}{6}$ radijana (30°), odredimo $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ i $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

Rješenje



Znamo da je $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ i $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

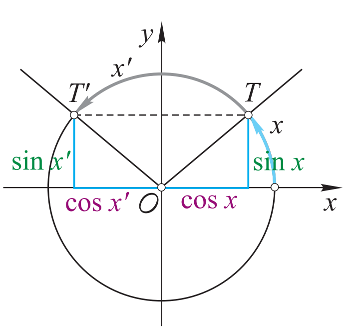
$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}, \quad \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Sa slike uočavamo da je $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$,

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Time se vrijednosti trigonometrijsakih funkcija sinus i kosinus mjere od $\frac{3\pi}{2}$ do 2π, izražene s pomoću njihovih vrijednosti za kutove od 0 do $\frac{\pi}{2}$.

Sad ćemo pokazati kako se vrijednosti funkcija sinus i kosinus za kutove mjera od $\frac{\pi}{2}$ do π i od π do $\frac{3\pi}{2}$ mogu prikazati s pomoću vrijednosti tih funkcija za kutove od 0 do $\frac{\pi}{2}$, tj. s pomoću vrijednosti iz prvog kvadranta.



Za svaki kut mjere x, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ možemo promatrati kut x', $0 < x' < \frac{\pi}{2}$, kao na slici:

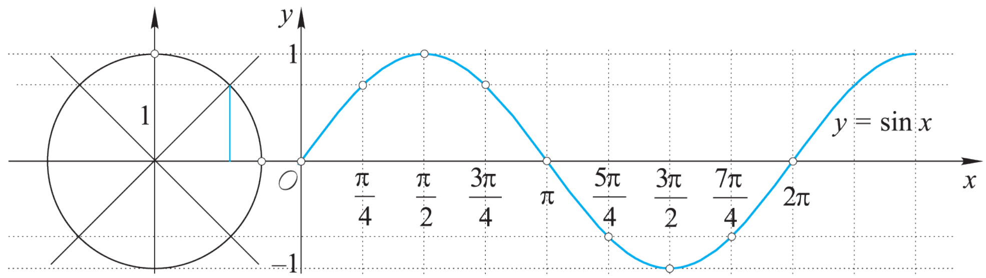
Točke T i T' su simetrične s obzirom na y-os, pa je

$$x' = \pi - x.$$

Sa slike vidimo da je $\sin x' = \sin x$, odnosno $\sin(\pi - x) = \sin x$ te
$\cos x' = -\cos x$, odnosno $\cos(\pi - x) = -\cos x$.

Sastavimo tablicu vrijednosti $f(x) = \sin x$ za realne brojeve:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$y = \sin x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0



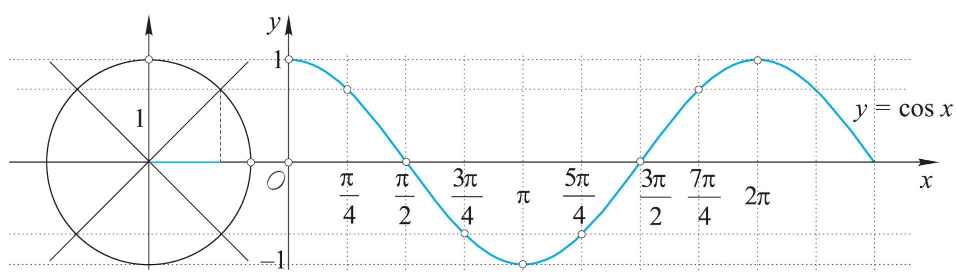
Deksterimetri su testovi kojima se mjeri brzina i točnost jednostavnih rutinskih pokreta – spretnost i brzina pokreta šake i prstiju. Koriste se u selekciji kandidata za poslove koji zahtijevaju precizno manipuliranje malim predmetima. (Najpoznatiji su Minnessota i O'Connorov deksterimetar, a koriste se i Purdue Pegboard test, O'Connorov deksterimetar s pincetom, test spretnosti upotrebe ručnog alata te **Grooved Pegboard test**.)

Nacrtali smo graf funkcije sinus na intervalu od 0 do 2π, a cjelokupni se graf, zbog periodičnosti, dobije njegovim produljavanjem na lijevu i desnu stranu te ga nazivamo **sinusoida**.

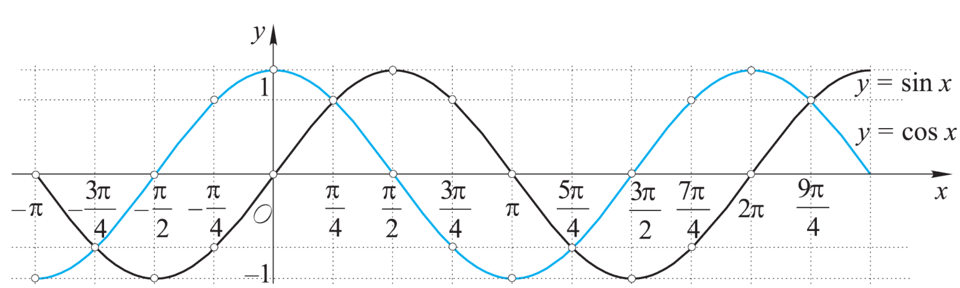
Uočavamo, kada x raste od 0 do $\frac{\pi}{2}$, $\sin x$ raste od 0 do 1; zatim, kada x raste od $\frac{\pi}{2}$ do $\frac{3\pi}{2}$, $\sin x$ pada od 1 do -1 pa u intervalu od $\frac{3\pi}{2}$ do 2π ponovo raste do 0. U intervalu od 2π do 4π zbog periodičnosti sve se navedeno ponavlja.

Istim postupkom crtamo i graf funkcije kosinus.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$y = \cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1



Graf funkcije $f(x) = \cos x$ nazivamo **kosinusoida**.



Već smo pokazali da za vrijednosti kuta od 0 do $\frac{\pi}{2}$ vrijedi:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x \quad \text{i} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\,.$$

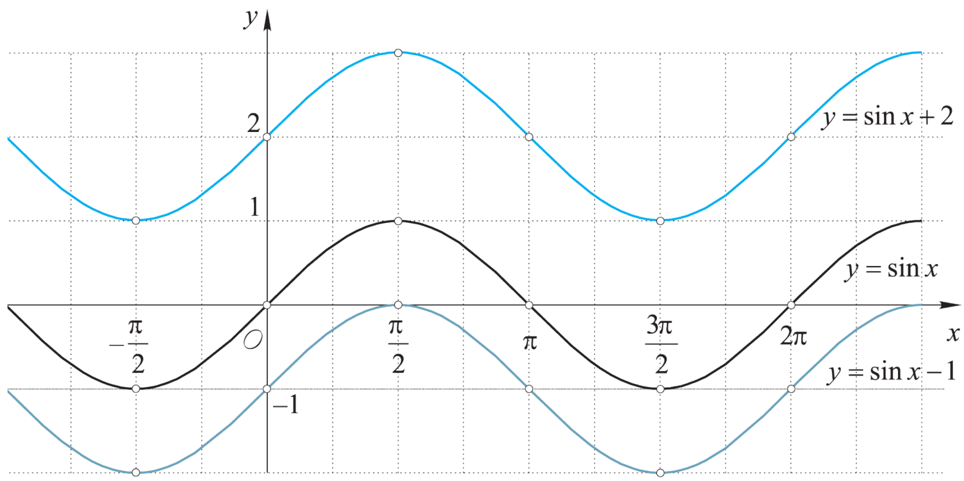
Sa slike uočavamo da te jednakosti vrijede općenito.

PRIMJER 4

Nacrtajmo grafove trigonometrijskih funkcija:
$f(x) = \sin x + 2$ i $f(x) = \sin x - 1$.

Rješenje

Svakoj ordinati funkcije $\sin x$ treba pribrojiti 2, odnosno −1.

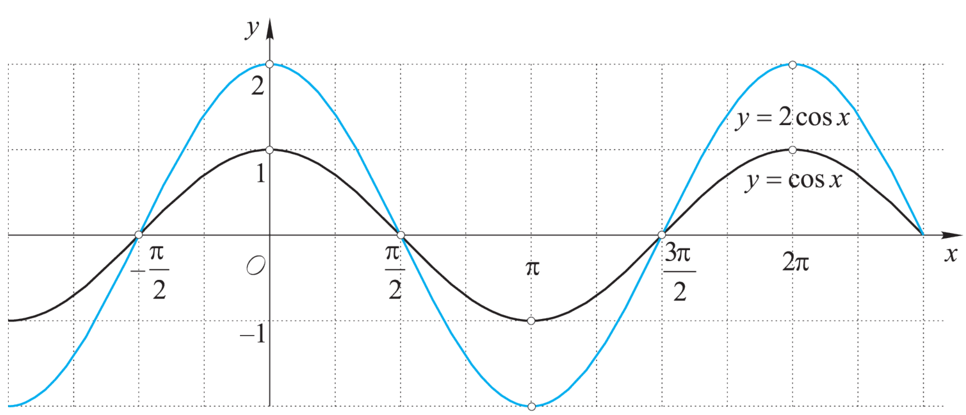


PRIMJER 5

Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = 2\cos x$.

Rješenje

Svaku ordinatu pomnožili smo s 2.



Testovi slijeđenja (ili tracing testovi) omogućuju mjerenje preciznosti i okulomotorne koordinacije. Zadatak ispitanika u ovom tipu testa jest da, najčešće objeručnom manipulacijom nekog upravljačkog mehanizma, slijedi neku trasu. Učinak se određuje kao vrijeme prolaska kroz trasu. (Primjeri testova iz ove skupine su **Bonnardelova sinusoida**, Bonnardelova omega i Turner test.)

Zadatci za vježbu

1. Može li kosinus i sinus nekog realnog broja biti:

a) 0.3, b) 3, c) 0.987, d) 1.1?

2. Na osnovi parnosti funkcije kosinus i neparnosti funkcije sinus odredite:

a) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, b) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, c) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, d) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

3. Na osnovi periodičnosti funkcija kosinus i sinus odredite:

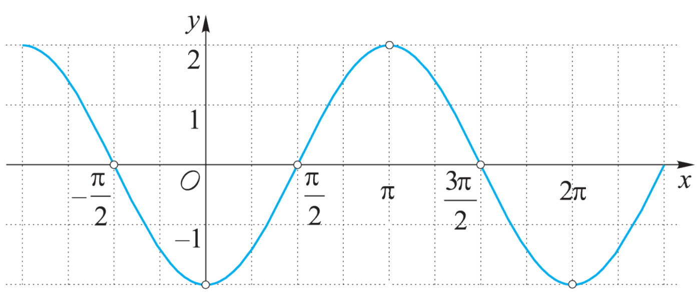
a) $\cos\frac{5\pi}{2}$, b) $\sin\frac{5\pi}{2}$, c) $\cos\frac{13\pi}{6}$, d) $\sin\frac{13\pi}{6}$.

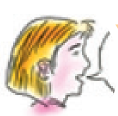
4. Odredite: a) $\cos\frac{2\pi}{3}$, b) $\sin\frac{2\pi}{3}$, c) $\cos\frac{4\pi}{3}$, d) $\sin\frac{4\pi}{3}$.

5. Nacrtajte graf funkcije: a) $f(x) = \sin x + 2$, b) $f(x) = \sin x - 2$, c) $f(x) = \cos x + 1$, d) $f(x) = \cos x - 1$.

6. Nacrtajte graf funkcije: a) $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$, b) $f(x) = -2\sin x$, c) $f(x) = 2\cos x$, d) $f(x) = -\cos x$.

7. Na slici je graf funkcije. Kako glasi njezina jednadžba?





Odgovorite na pitanja

1. Kolika je vrijednost izraza $\cos 260° + \sin 230°$? a) $\frac{1}{2}$, b) 1, c) 2, d) 0.

2. $\cos 10° = \sin \square$ a) 10°, b) 80°, c) 90°.

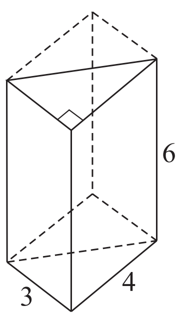
3. $\mathrm{tg}\, 50° = \square$ b) $\cos 40°$, b) $\sin 40°$, c) $\mathrm{ctg}\, 40°$.

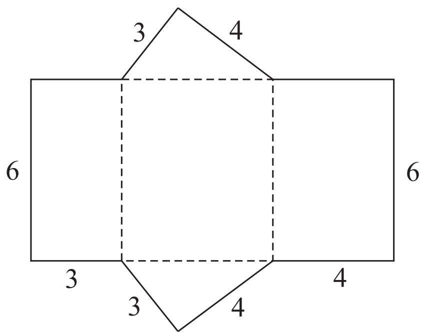
4. Broj stupnjeva jednak $\frac{5}{9}\pi$ radijana je: a) 45, b) 90, c) 100, d) 900.

5. Kolika je vrijednost x, ako je $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$? a) $\frac{\pi}{4}$, b) $-\frac{\pi}{4}$, c) $\frac{\pi}{2}$, d) $-\frac{\pi}{2}$.

PRIMJER 2

Odredite oplošje i obujam trostrane uspravne prizme kojoj je osnovica pravokutni trokut s duljinama kateta $a = 3$ cm, $b = 4$ cm i s visinom $v = 6$ cm.





Rješenje

Treća stranica osnovice je ujedno i dijagonala pripadajućeg kvadrata:

$$d^2 = 3^2 + 4^2 = 25,$$

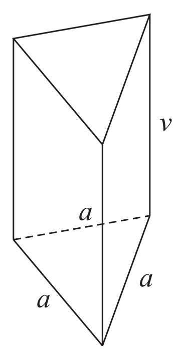
$$d = 5,$$

$$O = 2B + P = 2\cdot\frac{3\cdot4}{2} + 3\cdot6 + 4\cdot6 + 5\cdot6 = 84,$$

oplošje je 84 cm^2.

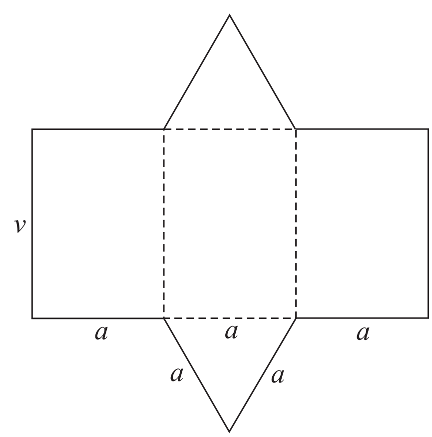
Obujam je $V = B\cdot v = \frac{3\cdot4}{2}\cdot6 = 36\ \text{cm}^3$.

Ako je osnovica (baza) trostrane uspravne prizme jednakostraničan trokut, onda je ona pravilna trostrana prizma.



$$V = B\cdot v$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot v$$



$$O = 2B + P$$

$$O = \cancel{2}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{\cancel{4}} + 3av$$

$$O = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3av$$

PRIMJER 3

Izračunajmo oplošje i obujam pravilne trostrane prizme kojoj je duljina osnovnog brida $a = 4$ cm i visina $v = 6$ cm.

Rješenje

$O = \frac{4^2\sqrt{3}}{2} + 3\cdot4\cdot6 = 85.86$, oplošje je $O \approx 85.86\ \text{cm}^2$.

$V = \frac{4^2\sqrt{3}}{4}\cdot6 = 41.7$, obujam je $V \approx 41.57\ \text{cm}^3$.