Rješenje. Dakle, problem se sastoji u maksimizaciji funkcije (2.222) uz ograničenje

$$50x + 100y = 15000. \tag{2.223}$$

Riješimo ga metodom supstitucije. Iz ograničenja (2.223) možemo izraziti varijablu x i dobiti

$$x = 300 - 2y. \tag{2.224}$$

Nakon zamjene (2.224) u (2.222) dobivamo funkciju jedne varijable

$$\overline{Q}(y) = 100(300 - 2y)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}. \tag{2.225}$$

Deriviranjem funkcije (2.225) i izjednačavanjem derivacije s nulom dobivamo jednadžbu

$$\overline{Q}'(y) = 100 \left[\frac{600 - 6y}{3(300 - 2y)^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}} \right] = 0. \tag{2.226}$$

Rješenje jednadžbe (2.226) dobije se tako da se brojnik izjednači s nulom, tj. $600 - 6y = 0$, a odatle je $y_0 = 100$. Nije teško pokazati da je $\overline{Q}''(100) = -2 < 0$, pa je $y_0 = 100$ točka lokalnog maksimuma funkcije $\overline{Q}(y)$. Vrijednost funkcije u toj točki je $\overline{Q}(100) = 100 \cdot 100 = 10000$. Iz relacije (2.224) proizlazi da je $x_0 = 300 - 2y_0 = 100$, dok je maksimalna vrijednost funkcije (2.222) uz ograničenje (2.223) jednaka

$$Q_{max} = Q(100, 100) = 100 \cdot 100 = 10000.$$

Prema tome, maksimalna proizvodnja od 10000 jedinica, uz zadano ograničenje, ostvaruje se za količinu uloženog rada $x_0 = 100$ i količinu uloženog kapitala $y_0 = 100$.

2.7.11. Karakterizacije stacionarnih točaka

Fundamentalni rezultati diferencijalnog računa poznati su od 17. stoljeća. Prema jednom od tih rezultata za derivabilne funkcije je točka lokalnog ekstrema funkcije njezina stacionarna točka. Obratna tvrdnja općenito ne vrijedi. Taj rezultat znao je Fermat koji ga je koristio u formulaciji metode za nalaženje ekstremnih točaka i poznat je pod nazivom Fermatov teorem.[130] Uveli smo ga kao Teorem 2.7 i ilustrirali u primjeru 2.45.

U ovom pododjeljku bavimo se pitanjem mogu li se i kako okarakterizirati stacionarne točke. Odgovor se može naći u radovima Zlobec [90] i [91] za funkcije više varijabli. Ovdje ćemo ga prikazati za dvaput neprekidno derivabilne funkcije jedne varijable,

[130] Pierre de Fermat (1601.–1665.) francuski matematičar bio je po profesiji pravnik. Otkrio je važne rezultate i u teoriji brojeva. U tom području poznat je po teoremu koji su matematičari nazvali zadnji Fermatov teorem. U specijalnom slučaju teorem kaže da ne postoje prirodni brojevi x, y i z za koje je $x^3 + y^3 = z^3$. Originalni dokaz tog teorema nije pronađen, a teorem je dokazan tek 1993.!

tj. funkcije koje imaju neprekidnu drugu derivaciju. U tom slučaju rezultati iz literature znatno se pojednostavnjuju i nema potrebe da uvodimo nove pojmove.

TEOREM 2.16.

(***Karakterizacije stacionarnih točaka***) Neka je $f(x)$ dvaput neprekidno derivabilna funkcija jedne varijable na otvorenoj domeni koja sadrži interval $I = [a,b]$. Tada su u proizvoljnoj unutarnjoj točki x_0 intervala sljedeće tri tvrdnje ekvivalentne, tj. svaka tvrdnja povlači druge dvije.

(i) $f'(x_0) = 0$.

(ii) Postoji broj $\Lambda \geq 0$ takav da je

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \Lambda(x - x_0)^2$$

za svako $x \in I$.

(iii) Funkcija

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{(x - x_0)^2}$$

je ograničena na skupu $I \setminus x_0 = \{x \in I \mid x \neq x_0\}$. [131]

Dokaz. Očigledno je da su tvrdnje (ii) i (iii) ekvivalentne. Zato ćemo dokazati samo ekvivalentnost tvrdnji (i) i (ii).

Pretpostavimo da je ispunjeno (i). Dokažimo da tada vrijedi (ii)! Funkciju $f(x)$ možemo prikazati u obliku

$$f(x) = \left[f(x) + (1/2)\alpha x^2\right] - (1/2)\alpha x^2$$

gdje je α proizvoljan broj. Prema pododjeljku 2.6.3 znamo da je $(1/2)\alpha x^2$ konveksna funkcija za svako $\alpha \geq 0$. Označimo funkciju u uglatoj zagradi s

$$C(x,\alpha) = f(x) + (1/2)\alpha x^2.$$

Pokazat ćemo da postoje brojevi $\alpha \geq 0$ za koje je i C konveksna u varijabli x. Prvo, budući da je $f''(x)$ po pretpostavci neprekidna funkcija na I, ona doseže svoju minimalnu vrijednost na I, prema Weierstrassovu teoremu (Teorem 2.11). Označimo tu vrijednost s α^*. Pogledajmo sada drugu derivaciju funkcije C, tj. $C''(x,\alpha) = f''(x) + \alpha$. Znamo da je $f''(x) \geq \alpha^*$ za svako $x \in I$. Zato je $C''(x,\alpha) = f''(x) + \alpha \geq \alpha^* + \alpha$. Bez obzira na predznak broja α^* uvijek možemo naći brojeve $\alpha \geq 0$ takve da je $\alpha^* + \alpha \geq 0$. Za te brojeve je $C''(x,\alpha) \geq 0$ i sada znamo, na osnovu pododjeljka 2.6.3, ne samo da je $(1/2)\alpha x^2$ konveksna funkcija nego je to i $C(x,\alpha)$. Tako smo, usput, pokazali da se svaka dvaput neprekidno derivabilna funkcija $f(x)$ može prikazati kao razlika neke konveksne funkcije $C(x,\alpha)$ i kvadratne konveksne funkcije $(1/2)\alpha x^2$ na intervalu $I = [a,b]$ za svako "dovoljno veliko" $\alpha \geq 0$. (Ovaj rezultat nije intuitivan jer nije očigledno da se npr. periodične funkcije, kao $f(x) = \sin x$, mogu tako prikazati.)

[131] Ovaj rezultat prvi put je prikazan na 13. Međunarodnoj konferenciji iz Operacijskih istraživanja KOI 2010, koju je organiziralo Hrvatsko društvo za operacijska istraživanja na Ekonomskom fakultetu Sveučilišta u Splitu u rujnu 2010. godine. Referenca rada Zlobec [90] spomenuta je na Google-u pod "JGO-2010 most viewed paper"

S druge strane, $f(x)$ možemo prikazati i kao

$$f(x) = \left[f(x) + (1/2)\beta x^2\right] - (1/2)\beta x^2$$

za svaki broj β. Označimo funkciju u uglatoj zagradi s

$$C^*(x,\beta) = f(x) + (1/2)\beta x^2.$$

Funkcija $(1/2)\beta x^2$ je konkavna za svako $\beta \leqslant 0$, a $C^*(x,\beta)$ je konkavna ako i samo ako je $C^{*''}(x,\beta) = f''(x) + \beta \leqslant 0$. Označimo s β^* maksimalnu vrijednost funkcije $f''(x)$ na I. Sada je $f''(x) \leqslant \beta^*$ za svako $x \in I$ pa imamo $C^{*''}(x,\beta) = f''(x) + \beta \leqslant \beta^* + \beta$. Bez obzira na predznak broja β^* možemo naći brojeve $\beta \leqslant 0$ takve da je $\beta^* + \beta \leqslant 0$. Za te je brojeve $C^{*''}(x,\beta) \leqslant 0$, tj. $C^*(x,\beta)$ je konkavna na I. Ovo pokazuje da je svaka dvaput neprekidno derivabilna funkcija razlika neke konkavne funkcije $C^*(x,\beta)$ i konkavne kvadratne funkcije $(1/2)\beta x^2$ na I za svako "dovoljno malo" $\beta \leqslant 0$.

Nastavljamo dokaz s nekim "dovoljno velikim" fiksnim $\alpha \geq 0$ i "dovoljno malim" fiksnim $\beta \leqslant 0$. Budući da je $C(x,\alpha)$ konveksna u x za takvo α, prema definiciji konveksne funkcije na intervalu između x_0 i x u I imamo

$$C(\lambda x + (1-\lambda)x_0, \alpha) \leqslant \lambda C(x,\alpha) + (1-\lambda)C(x_0,\alpha)$$

za $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Budući da je $C(x,\alpha) = f(x) + (1/2)\alpha x^2$, ovo znači da je

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)x_0) \leqslant{} & (1/2)\alpha[\lambda x + (1-\lambda)x_0]^2 + \lambda f(x) - (1/2)\alpha\lambda x^2 + \\ & + (1-\lambda) f(x_0) + (1/2)\alpha(1-\lambda)(x_0)^2. \end{aligned}$$

Nakon sređivanja i dijeljenja s $\lambda > 0$, slijedi

$$\frac{[f(x_0 + \lambda(x - x_0)) - f(x_0)]}{\lambda} \leqslant f(x) - f(x_0) + (1/2)\alpha(1-\lambda)(x - x_0)^2.$$

Na lijevoj strani imamo kvocijent funkcija u varijabli λ tipa $0/0$. U ovoj situaciji koristimo L'Hospitalovo pravilo koje nakon graničnog procesa $\lambda \to 0$ daje

$$f'(x_0)(x - x_0) \leqslant f(x) - f(x_0) + (1/2)\alpha(x - x_0)^2.$$

Vratimo se tvrdnji (i). Kad je $f'(x_0) = 0$, zaključujemo da je

$$-(1/2)\alpha(x - x_0)^2 \leqslant f(x) - f(x_0).$$

Analogan postupak možemo primijeniti na konkavnu funkciju $C^*(x,\beta) = f(x) + (1/2)\beta x^2$. Prvo koristimo definiciju konkavne funkcije, zatim prelazimo natrag na f, primjenjujemo L'Hospitalovo pravilo i zaključujemo da je

$$f(x) - f(x_0) \leqslant -(1/2)\beta(x - x_0)^2.$$

Posljednje dvije nejednadžbe daju

$$-(1/2)\alpha(x - x_0)^2 \leqslant f(x) - f(x_0) \leqslant -(1/2)\beta(x - x_0)^2.$$

Brojevi $\alpha \geq 0$ i $\beta \leqslant 0$ su fiksni, zato postoji broj $\Lambda \geq 0$ takav da je $-(1/2)\alpha \geq -\Lambda$ (tj. $\Lambda \geq (1/2)\alpha$) i $-(1/2)\beta \leqslant \Lambda$ (tj. $\Lambda \geq -(1/2)\beta$). Broj Λ zadovoljava

$$-\Lambda(x-x_0)^2 \leqslant f(x) - f(x_0) \leqslant \Lambda(x-x_0)^2$$

što znači da je $\mid f(x) - f(x_0) \mid \leqslant \Lambda(x-x_0)^2$ za svako $x \in I$, što je tvrdnja (ii).

Znatno je jednostavnije dokazati da (ii) povlači (i). Prvo vidimo da iz (ii), nakon dijeljenja s $\mid x - x_0 \mid \neq 0$ slijedi

$$\mid \frac{[f(x) - f(x_0)]}{(x-x_0)} \mid \leqslant \Lambda \mid x - x_0 \mid .$$

Na granici kad $x \to x_0$ desna strana postaje nula, dok lijeva strana postaje apsolutna vrijednost derivacije. Odavde slijedi $\mid f'(x_0) \mid \leqslant 0$, pa zaključujemo da je $f'(x_0) = 0$, što je (i). ■

Geometrijska interpretacija stacionarne točke. Teorem 2.16 ima jednostavnu geometrijsku interpretaciju: Unutarnja točka x_0 nekog intervala $I = [a,b]$ je stacionarna točka dvaput neprekidno derivabilne funkcije f ako i samo ako postoji broj $\Lambda \geq 0$ za koji je funkcija apsolutne vrijednosti $\mid f(x) - f(x_0) \mid$ omeđena odozgo parabolom $\Lambda(x-x_0)^2$ na I. Vizualne ilustracije ovog teorema i nekih njegovih primjena mogu se naći u Zlobec [90], [91] i [92].[132]

U primjeru 2.45, koristeći Fermatovu metodu, vidjeli smo da je $x_0 = 0$ stacionarna točka funkcije $f(x) = x^3$. Sada ćemo taj rezultat provjeriti koristeći Teorem 2.16 (ii), (iii).

PRIMJER 2.104.

Prema teoremu 2.16 (ii) slijedi da je $x_0 = 0$ stacionarna točka funkcije $f(x) = x^3$ na intervalu $I = [-1, 1]$ ako i samo ako postoji $\Lambda \geq 0$ takvo da vrijedi $\mid x^3 \mid \leqslant \Lambda x^2$ na I. Uzmimo npr. $\Lambda = 1$. Budući da je $\mid x^3 \mid \leqslant x^2$ na intervalu I, zaključujemo da je $x_0 = 0$ stacionarna točka. Ilustrirajmo tvrdnju (iii)! Ona kaže da je $x_0 = 0$ stacionarna točka ako i samo ako je razlomljena funkcija $\mid x^3 \mid /x^2$ ograničena na skupu $I \setminus \{0\}$. Budući da je $\mid x^3 \mid /x^2 = \mid x \mid$ za $x \neq 0$, a ova funkcija je ograničena na I, ponovno zaključujemo da je $x_0 = 0$ stacionarno. Kakva je situacija s drugim točkama? Je li neka proizvoljna točka $x^* \neq 0$ stacionarna? Prema teoremu 2.16 (ii) slijedi da je x^* stacionarno ako i samo ako postoji neko $\Lambda \geq 0$ za koje vrijedi $\mid x^3 - (x^*)^3 \mid \leqslant \Lambda(x - x^*)^2$ na intervalu I. Budući da je, nakon skraćivanja tj. dijeljenja s $\mid x - x^* \mid \neq 0$, funkcija $\mid [x^2 + x \cdot x^* + (x^*)^2]/(x - x^*) \mid$ neograničena na $I \setminus \{x^*\}$, što se vidi kad "pustimo" x da teži prema x^* (tada brojnik teži prema $3(x^*)^2 \neq 0$, a nazivnik prema nuli) zaključujemo da takvo Λ ne postoji. Zaključak: Niti jedno $x^* \neq 0$ ne može biti stacionarna točka funkcije $f(x) = x^3$.

Fermatova metoda sastoji se od računanja derivacije $f'(x)$ i rješavanja jednadžbe $f'(x) = 0$. Za funkcije jedne varijable metoda je jednostavna i pouzdana. Karakterizacije (ii) i

[132] Rad Zlobec [92] dostupan je na internetu u časopisu "Mathematical Communications", 2012. godina, Vol. 17, No. 2. Časopis izdaje Odjel za matematiku osječkog sveučilišta u suradnji s Udrugom matematičara Osijek.

(iii) koriste se uglavnom za provjeru stacionarnosti i za dobivanje globalnih informacija o ponašanju funkcije. Tako iz (ii) vidimo da za specificirano $\varepsilon > 0$ svako x koje zadovoljava $\Lambda(x-x_0)^2 \leqslant \varepsilon$ mora zadovoljavati i $|f(x)-f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. Za broj Λ možemo uzeti bilo koje $\Lambda \geq (1/2)\max|f''(x)|$ gdje se maksimum funkcije apsolutne vrijednosti druge derivacije uzima po x na intervalu I. Ako neko $\Lambda \geq 0$ zadovoljava (ii), tada je (ii) zadovoljeno i za svaku njegovu veću vrijednost.

PRIMJER 2.105.

Znamo da funkcija $f(x) = x^3$ ima stacionarnu točku $x_0 = 0$ na intervalu $I = [-1, 1]$. Kako se $f(x)$ ponaša oko te točke? Specificirajmo npr. $\varepsilon = 0,1$. Ako uzmemo $\Lambda = 1$, zaključujemo da je $|f(x)| = |x^3| \leqslant 0,1$ za svako x za koje je $x^2 \leqslant 0,1$. Za isto ε, ali s izborom većeg Λ, interval oko stacionarne točke u kojem možemo ocijeniti vrijednost $f(x)$ tipično je manji. Tako za $\varepsilon = 0,1$ i $\Lambda = 3$ znamo da je $|f(x)| = |x^3| \leqslant 0,1$ za svako x za koje je $3x^2 \leqslant 0,1$.

Zadaci 2.7.

1. Zadana je funkcija dviju varijabli

$$z(x,y) = +\sqrt{25-(x-1)^2-(y-2)^2}.$$

Odredite njenu domenu A i kodomenu B.

2. Prikažite grafički funkciju dviju varijabli

$$z(x,y) = \frac{1}{4}(4-2x-y).$$

3. Prikažite grafički funkciju dviju varijabli

$$z(x,y) = 16 - x^2 - y^2$$

direktno i pomoću razinskih linija.

4. Ispitajte homogenost funkcije

$$z(x,y) = 2x^3 - 3xy^2 + 4x^2y - 5y^3$$

te ako je homogena, navedite interpretaciju stupnja homogeniteta.

5. Je li homogena Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje

$$Q(L,K) = 250L^{0,125}K^{0,875}?$$

Za koliko % se približno promijeni Q, ako se L i K povećaju za 1%?

6. Ispitajte homogenost CES funkcije proizvodnje[133]

$$Q(L,K) = A\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}, \ (A > 0, \ 0 < \delta < 1, \ \ -1 < \rho \neq 0),$$

gdje su K i L faktori proizvodnje (K-kapital, L-rad), dok su A, δ i ρ parametri. Interpretirajte rezultat.

7. Izračunajte parcijalne derivacije prvog reda funkcije

$$z(x,y) = 5x^2y^2e^{x+y},$$

u točki $(1,-1)$.

8. Izračunajte parcijalne derivacije prvog reda funkcije

$$z = 3x^2\ e^{5y}$$

u točki $(1,0)$.

9. Primjenom totalnog diferencijala izračunajte približnu vrijednost izraza

$$\sqrt{32,98^2 + 44,03^2}.$$

10. Primjenom totalnog difrencijala izračunajte približnu vrijednost izraza

$$\sqrt{3,02^2 + 3,97^2}.$$

Koliko iznosi apslutna, a koliko relativna greška?

11. Za funkciju potražnje

$$q_1 = -5p_1 + 4p_2 + 8p_3$$

odredite koeficijente parcijalne i križne elastičnosti ako je $p_1 = 4$, $p_2 = 5$, $p_3 = 10$, te interpretirajte rezultate.

12. Ako je funkcija potražnje

$$q_1 = 45p_1^{-0,2}p_2^{0,3}p_3^{1,2},$$

izračunajte koeficijente parcijalne i križne elastičnosti, te interpretirajte rezultate.

13. Zadana je funkcija potražnje u logaritamskom obliku

$$\ln q_1 = \ln 120 - 0,6\ln p_1 + 1,4\ln p_2 + 0,8\ln p_3.$$

Izračunajte koeficijente parcijalne i križne elastičnosti, te ih interpretirajte.

[133] Vidi Arrow et al., [4], Chiang [20], str. 426-428. Kratica CES dolazi od Constant Elasticity Substitution, što znači konstantna elstičnost supstitucije. Ocjenjivanju takve funkcije posvećen je rad Kmenta [39].

14. Za funkciju potražnje

$$\ln q_1 = \ln 40 - 2,5 \ln p_1 + 1,1 \ln p_2$$

izračunajte zbroj koeficijenata parcijalne i križne elastičnosti, te interpretirajte rezultat.

15. Primjenom Eulerovog torema izračunajte zbroj koeficijenata parcijalnih elastičnosti funkcije proizvodnje

$$Q(L,K) = 250\ L^{0,4}\ K^{0,8}$$

i iterpretirajte rezultat.

16. Za funkciju proizvodnje

$$\ln Q = \ln 400 + 0,6 \ln K + 0,5 \ln L$$

izračunajte zbroj koeficijenata parcijalnih elastičnosti te funkcije.

17. Izračunajte derivaciju funkcije zadane uimplicitnom obliku

$$F(x,y) = 8x^2 - 3y^2 + 4xy - 10x + 6y + 15 = 0.$$

18. Izračunajte totalnu derivaciju funkcije

$$z = 15x^2y + 8x,$$

ako je $y = -3x^2 + 6x + 2$.

19. Odredite Hesseovu matricu funkcije

$$z(x,y) = 2x^2 + 3x^2y^2 - 5y^2.$$

u točki $(2,1)$.

20. Za funkciju

$$z = 2x_1^3 + 5x_1^2x_2^2 - 4x_2^3$$

izračunajte Hesseovu matricu u točki $T(1,1)$.

21. Za funkciju

$$f(x,y,z) = 3x^4 + 2x^2y^2 - 5z^3$$

izračunajte Hesseovu matricu u točki $T(1,1,-1)$.

22. Ispitajte ima li ekstrema funkcija

$$z = x^2 + y^2 + xy - 7x + 4y + 25.$$

23. Ispitajte ima li ekstrema funkcija

$$z = -x^2 - y^2 + 10x + 2y - xy - 6.$$

24. Ispitajte ima li ekstrema funkcija

$$z = x^2 + y^2 - xy + 8x - y + 10.$$

25. Ispitajte ima li ekstrema funkcija

$$z = -x^2 - y^2 + 2x - 5y - xy - 18.$$

26. Pomoću Lagrangeove funkcije i Lagrangeovog množitelja riješite problem

$$\max z = 25xy$$

uz ograničenje

$$g(x, y) = 5x + 4y - 100 = 0.$$

Navedite interpretaciju Lagrangeovog multiplikatora.

27. Pomoću Lagrangeove funkcije i Lagrangeovog množitelja riješite problem

$$\max z = xy$$

uz ograničenje

$$g(x, y) = x + 5y - 150 = 0.$$

Navedite interpretaciju Lagrangeovog množitelja.

28. Uz pomoć Lagrangeove funkcije i Lagrangeovog množitelja riješite problem

$$\max z = 5xy$$

uz ograničenje

$$g(x, y) = 25x + 10y - 400 = 0.$$

Koja je interpretacija Lagrangeovog množitelja?

29. Primjer 2.101 riješite metodom Lagrangeovog množitelja. Navedite interpretaciju Lagrangeovog množitelja.

30. Primjer 2.102 riješite metodom Lagrangeovog množitelja. Navedite interpretaciju Lagrangeovog množitelja.

31. Primjer 2.103 riješite metodom Lagrangeovog množitelja. Navedite interpretaciju Lagrangeovog množitelja.