

1.

Kompleksni brojevi

1.1. Prikaz kompleksnog broja

Algebarski prikaz kompleksnog broja.

Polje kompleksnih brojeva $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ sastoji se od skupa kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$ na kojem su definirane dvije operacije: **zbrajanje** i **množenje**. $\mathbf{C}$ možemo poistovjetiti sa skupom svih uređenih parova realnih brojeva: $\mathbf{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$, a operacije definiramo na sljedeći način:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (1.1)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2) \quad (1.2)$$

Realni broj x poistovjećujemo s kompleksnim brojem $(x, 0) \in \mathbf{C}$. Kako se pri tom čuvaju operacije, jer vrijedi $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$, $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$, to je polje realnih brojeva sadržano u polju kompleksnih brojeva. Broj $(0, 1)$ nije realan, označavamo ga sa i i nazivamo **imaginarna jedinica**. Vrijedi, po (1.2)

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Kompleksan broj $z = (x, y)$ možemo pisati i u obliku:

$$\begin{aligned} z = (x, y) &= (x, 0) + (0, y) \\ &= (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy. \end{aligned}$$

Prikaz $z = x + iy$ nazivamo **algebarski prikaz** kompleksnog broja z . Broj x se naziva **realni**, a broj y **imaginarni dio** kompleksnog broja z . Označavamo ih sa $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako im se podudaraju realni i imaginarni dijelovi: $z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2, y_1 = y_2$.

Sa $-z$ označavamo broj $(-1) \cdot z = -x - iy$. **Oduzimanje** kompleksnih brojeva je definirano sa

$$z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \quad (1.3)$$

Kompleksan broj $\bar{z} = x - iy$ nazivamo **konjugiranim** broju $z = x + iy$. Također, broj z je konjugiran broju $\bar{z}$ i zato kažemo da $z, \bar{z}$ čine par **konjugirano-kompleksnih** brojeva. Njihovim zbrajanjem i oduzimanjem dobivamo

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}). \quad (1.4)$$

Također, vrijedi $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$. Označimo

$$|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.5)$$

Kako je uobičajeno, množenje kompleksnih brojeva pisat ćemo (uglavnom) bez znaka $\cdot$, dakle $z_1 z_2$ umjesto $z_1 \cdot z_2$.

Ako je $z \neq 0$, sa $\frac{1}{z}$ označavamo broj

$$\frac{1}{z} := \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Uvjeri se da vrijedi $z \cdot \frac{1}{z} = 1$. Tako možemo definirati i dijeljenje kompleksnih brojeva:

$$\frac{z_1}{z_2} := z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{-x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (1.6)$$

Računske operacije s kompleksnim brojevima izvodimo ne pamteći formule (1.2) i (1.6), već sa kompleksnim brojevima postupamo kao s "polinomima po varijabli i ", uvažavajući pri tom $i^2 = -1$, npr.

$$(4 - 3i)(2 + 5i) = 8 - 6i + 20i - 15i^2 = 23 + 14i,$$

$$\frac{1 + 2i}{3 - 2i} = \frac{1 + 2i}{3 - 2i} \cdot \frac{3 + 2i}{3 + 2i} = \frac{3 + 6i + 2i + 4i^2}{9 - 4i^2} = \frac{-1 + 8i}{13}.$$

1.1. Odredi realni i imaginarni dio sljedećih kompleksnih brojeva:

A. $\frac{1}{1-i}$; B. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$; C. $(1-i\sqrt{3})^3$.

RJEŠENJE. Moramo odrediti algebarski prikaz zadanih kompleksnih brojeva.

A. $z = \frac{1}{1-i} = \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i}{1-i^2} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

Dakle, $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2}$.

B. $z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = \left(\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)^3 = \left(\frac{1-2i+i^2}{2}\right)^3 = (-i)^3 = i$.

Oдавде, $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 1$.

C. $(1-i\sqrt{3})^3 = 1 - 3i\sqrt{3} + 3(i\sqrt{3})^2 - (i\sqrt{3})^3 = 1 - 3\sqrt{3}i - 9 + 3\sqrt{3}i = -8$, te je $\operatorname{Re} z = -8$, $\operatorname{Im} z = 0$.

1.2. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi $\bar{z} = z^2$.

RJEŠENJE. Prikažimo broj z u obliku $z = x + iy$; što uvršteno u jednadžbu daje

$$x - iy = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

Prema tome, x i y moraju zadovoljavati sistem

$$\begin{cases} x = x^2 - y^2, \\ y = 2xy, \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - x - y^2 = 0, \\ (2x + 1)y = 0. \end{cases}$$

Druga je jednadžba zadovoljena za $x = -\frac{1}{2}$ ili $y = 0$. Uvrstimo li $x = -\frac{1}{2}$ u prvu jednadžbu, dobivamo $y^2 = \frac{3}{4}$, što daje $y_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Uvrstimo li pak $y = 0$ u prvu jednadžbu, dobivamo $x^2 - x = 0$ i odavde $x_3 = 0$, $x_4 = 1$. Postoje dakle četiri rješenja:

$$z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = 0, \quad z_4 = 1.$$

1.3. Pokaži da operacija kompleksnog konjugiranja ima svojstva:

- A. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; B. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$;
 C. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$; D. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

RJEŠENJE. A.

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)} = \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} \\ &= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 = \overline{z_1} + \overline{z_2} \end{aligned}$$

Na sličan se način pokazuju i ostale relacije.

Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja

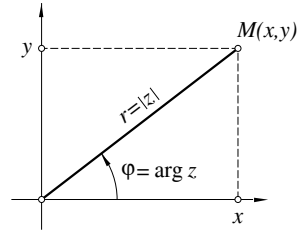
Kompleksan broj $z = x + iy$ možemo prikazati točkom $M(x, y)$ ili pak vektorom $\overrightarrow{OM}$ u ravnini xOy , koju nazivamo **kompleksna** ili **Gaussova ravnina** (sl. 1.1.).

Duljina r vektora $\overrightarrow{OM}$ naziva se **modul**, **norma** ili **apsolutna vrijednost** kompleksnog broja z

$$r = |z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}. \quad (1.7)$$

Kut kojeg vektor $\overrightarrow{OM}$ zatvara s pozitivnim dijelom realne osi naziva se **argument** kompleksnog broja z ; označavamo ga sa $\text{Arg } z$. On je određen do na višekratnik broja 2π . Za **glavnu vrijednost argumenta** uzimamo vrijednost tog kuta unutar intervala $[0, 2\pi)$ i označavamo ga sa $\varphi = \arg z$. Dakle, vrijedi

$$\begin{aligned} \text{Arg } z &= \arg z + 2k\pi = \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \\ \text{tg } \varphi &= \frac{y}{x}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r} \end{aligned} \quad (1.8)$$



Slika 1.1. Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja

Stoga kompleksan broj možemo napisati u tzv. **trigonometrijskom** obliku

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1.9)$$

Uvedimo simbol $e^{i\varphi} := \cos \varphi + i \sin \varphi$. Prikaz $z = r e^{i\varphi}$ naziva se **eksponencijalni** oblik kompleksnog broja. Neka je $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Tada vrijedi

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)$$

te je

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (1.10)$$

Oдавde zaključujemo

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad (1.11)$$

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 + 2k\pi \quad (1.12)$$

Kako je $\frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2} (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)$ (provjeri!), to vrijedi

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (1.13)$$

i oдавde

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (1.14)$$

$$\text{Arg } \frac{z_1}{z_2} = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2) = \varphi_1 - \varphi_2 + 2k\pi. \quad (1.15)$$

1.4. Ako je $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$ i $z_1 z_2 \neq -1$, dokaži da je $z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ realan broj.

RJEŠENJE. Broj z je realan ako i samo ako vrijedi $z = \bar{z}$. Po uvjetima zadatka imamo

$$1 = |z_1|^2 = z_1 \bar{z}_1, \quad 1 = |z_2|^2 = z_2 \bar{z}_2.$$

Zato je, koristeći pravila konjugiranja

$$\bar{z} = \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{1 + \bar{z}_1 \bar{z}_2} \cdot \frac{z_1 z_2}{z_1 z_2} = \frac{\bar{z}_1 z_1 z_2 + \bar{z}_2 z_1 z_2}{z_1 z_2 + \bar{z}_1 \bar{z}_2 z_1 z_2} = \frac{z_2 + z_1}{z_1 z_2 + 1} = z$$

i z je realan.

1.5.

Prikaži u trigonometrijskom obliku sljedeće brojeve:

A. $\sqrt{3} + i$;

B. $-2i$;

C. $-\sqrt{2}$;

D. 2 ;

E. $1 + i^{123}$;

F. $-1 + 2i$.

RJEŠENJE.

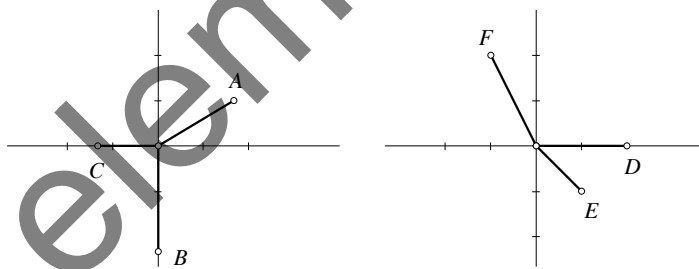
A.

$$\left. \begin{aligned} r &= |\sqrt{3} + i| = \sqrt{3+1} = 2, \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}, \quad \varphi = \frac{\pi}{6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

B. $r = |-2i| = 2$; $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ te je $z = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$.

C. $r = |-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $\varphi = \pi$, $z = \sqrt{2} (\cos \pi + i \sin \pi)$.

D. $r = |2| = 2$, $\varphi = 0$, $z = 2 (\cos 0 + i \sin 0)$.



Slika 1.2.

E. $1 + i^{123} = 1 + i^{4 \cdot 30 + 3} = 1 + (i^4)^{30} i^3 = 1 + i^3 = 1 - i$. Oдавде $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\varphi = 2\pi - \arctan 1 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ te slijedi $z = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$

F. $r = |-1 + 2i| = \sqrt{5}$, $\operatorname{tg} \varphi = -2 \Rightarrow \varphi = \pi - \arctan 2 = 1,1071 = 116^\circ 34'$. Dobivamo $z = \sqrt{5} (\cos 116^\circ 34' + i \sin 116^\circ 34')$. Vidi sl 1.2.

1.6. Prikaži u trigonometrijskom obliku

A. $z = -\sin \pi/8 - i \cos \pi/8;$

B. $z = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad 0 < \alpha < \pi/2.$

RJEŠENJE.

A. $r = \left(\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} \right)^{1/2} = 1$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos \pi/8}{\sin \pi/8} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}.$$

Kako se broj z nalazi u trećem kvadrantu, to je $\varphi = \frac{3\pi}{8} + \pi = \frac{11\pi}{8}$. Dakle, $z = \cos \frac{11\pi}{8} + i \sin \frac{11\pi}{8}$.

B. $r = \sqrt{1 + 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \sqrt{2 + 2 \cos \alpha} = 2 \cos \frac{\alpha}{2},$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \text{ te je } \varphi = \frac{\alpha}{2}. \text{ Dakle,}$$

$$z = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

1.2. Potenciranje i korjenovanje

Označili smo $e^{i\varphi} := \cos \varphi + i \sin \varphi$. Kako vrijedi

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \psi + i \sin \psi) &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi + i(\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi) \\ &= \cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi) \end{aligned}$$

to dobivamo $e^{i\varphi} e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$. Odavde indukcijom zaključujemo da vrijedi $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$, tj. vrijedi **de Moivreova formula**

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi \quad (1.16)$$

Potenciju kompleksnog broja, napisanog u trigonometrijskom obliku, računamo po formuli

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (1.17)$$

Odavde zaključujemo

$$|z^n| = |z|^n \quad (1.18)$$

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n\varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (1.19)$$

Odredimo sada n -ti korijen kompleksnog broja z , $z \neq 0$. Stavimo $w := \sqrt[n]{z}$, tj. $z = w^n$ i prikažimo ih u trigonometrijskom obliku: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $w = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$. Tada iz

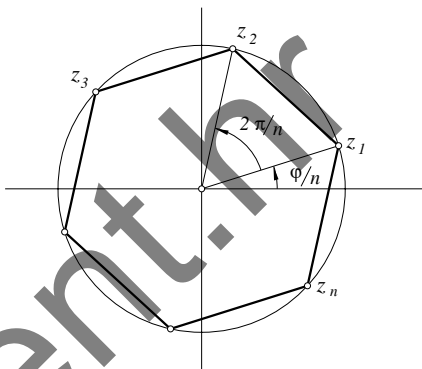
$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho^n (\cos n\psi + i \sin n\psi)$$

slijedi $\rho = \sqrt[n]{r}$ i $n\psi = \varphi + 2k\pi$. Uvrštavanjem $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ dobivamo n različitih vrijednosti n -tog korijena kompleksnog broja z :

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (1.20)$$

Tu je $\varphi = \arg z$, a $\sqrt[n]{r}$ označava realan i pozitivan n -ti korijen iz pozitivnog broja $r = |z|$.

Sve vrijednosti od $\sqrt[n]{z}$ leže na kružnici polumjera $\rho = \sqrt[n]{|z|}$, sa središtem u ishodištu, a argumenti tih brojeva razlikuju se za višekratnik od $2\pi/n$. Dakle, n -ti korijeni kompleksnog (pa i realnog!) broja čine vrhove pravilnog n -terokuta sa središtem u ishodištu.



Slika 1.3. Svi n -ti korijeni kompleksnog broja su vrhovi pravilnog n -terokuta sa središtem u ishodištu. Polumjer n -terokuta iznosi $\sqrt[n]{r}$.

1.7. Izračunaj $(-1 + i\sqrt{3})^{60}$.

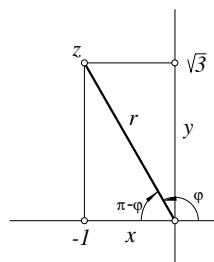
RJEŠENJE. Prikažimo $-1 + i\sqrt{3}$ u trigonometrijskom obliku. On se nalazi u drugom kvadrantu i vrijedi

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2,$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \varphi) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}.$$

Dakle, $r = 2$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$:

$$-1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$



Slika 1.4.

Možemo sada primijeniti de Moivreovu formulu (1.16)

$$\begin{aligned} (-1 + i\sqrt{3})^{60} &= 2^{60} \left[\cos\left(60 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(60 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ &= 2^{60} [\cos(40\pi) + i \sin(40\pi)] = 2^{60}. \end{aligned}$$

1.8. Izračunaj $\left(1 + \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^6$.

RJEŠENJE. Po zadatku 1.6.B, kompleksan broj $z = 1 + \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ima prikaz $z = 2 \cos \frac{\pi}{12} (\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$. Zato je

$$\begin{aligned} z^6 &= 2^6 \left(\cos \frac{\pi}{12}\right)^6 \left(\cos \frac{6\pi}{12} + i \sin \frac{6\pi}{12}\right) \\ &= 2^6 \left(\frac{1 + \cos \pi/6}{2}\right)^3 \cdot i = 2^6 \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{4}\right)^3 \cdot i = (2 + \sqrt{3})^3 i. \end{aligned}$$

1.9. Izračunaj $\frac{(1+i)^{16}}{(1-i\sqrt{3})^9}$.

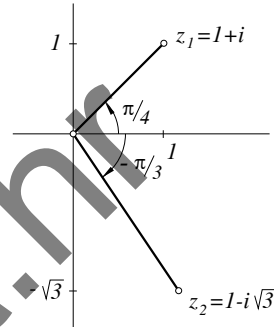
RJEŠENJE. Prikažimo najprije brojeve

$$z_1 = 1 + i \quad \text{ i } \quad z_2 = 1 - i\sqrt{3}$$

u trigonometrijskom obliku:

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}),$$

$$\begin{aligned} z_2 &= 2 \left[\cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) + i \sin(2\pi - \frac{\pi}{3}) \right] \\ &= 2 \left[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3}) \right]. \end{aligned}$$



Slika 1.5.

Sada je

$$\begin{aligned} \frac{(1+i)^{16}}{(1-i\sqrt{3})^9} &= \frac{(\sqrt{2})^{16} [\cos(16 \cdot \frac{\pi}{4}) + i \sin(16 \cdot \frac{\pi}{4})]}{2^9 [\cos(-9 \cdot \frac{\pi}{3}) + i \sin(-9 \cdot \frac{\pi}{3})]} \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos(16 \cdot \frac{\pi}{4} + 9 \cdot \frac{\pi}{3}) + i \sin(16 \cdot \frac{\pi}{4} + 9 \cdot \frac{\pi}{3}) \right] \\ &= \frac{1}{2} [\cos(7\pi) + i \sin(7\pi)] = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

1.10. Dokaži da je polinom $P(x) = (\cos \alpha + x \sin \alpha)^n - \cos n\alpha - x \sin n\alpha$ djeljiv s polinomom $Q(x) = x^2 + 1$.

RJEŠENJE. Vrijedi $Q(x) = (x-i)(x+i)$. $P(x)$ će biti djeljiv sa $Q(x)$ ukoliko je djeljiv sa $(x-i)$ i sa $(x+i)$, tj. ako su brojevi $x_1 = i$ i $x_2 = -i$ nul točke polinoma $P(x)$. Izračunajmo stoga $P(i)$ i $P(-i)$.

$$\begin{aligned} P(i) &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n - \cos n\alpha - i \sin n\alpha \\ &= \cos n\alpha + i \sin n\alpha - \cos n\alpha - i \sin n\alpha = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(-i) &= (\cos \alpha - i \sin \alpha)^n - \cos n\alpha + i \sin n\alpha \\ &= [\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)]^n - \cos(-n\alpha) - i \sin(-n\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Dakle, $P(x)$ je djeljiv sa $(x+i)(x-i) = Q(x)$.

1.11. Odredi kompleksan broj z za kojeg vrijedi $|z-1| = |z|$ i $\text{Arg}(z^3) = \pi/3 + \text{Arg } z$.

RJEŠENJE. Prikažimo broj z u trigonometrijskom obliku, $z = r \cos \varphi + i r \sin \varphi$. Prvi uvjet daje

$$(r \cos \varphi - 1)^2 + (r \sin \varphi)^2 = r^2 \implies r = \frac{1}{2 \cos \varphi},$$

a drugi, po formuli (1.19)

$$3\varphi = \frac{\pi}{3} + \varphi + 2k\pi \implies \varphi = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

za neku vrijednost cijelog broja k . Samo vrijednosti $k = 0$ i $k = 1$ daju kut unutar intervala $[0, 2\pi)$. Za $k = 1$ dobivamo $\varphi = 7\pi/6$ što daje negativan r i to rješenje odbacujemo. Za $k = 0$ dobivamo $\varphi = \pi/6$ i $r = \sqrt{3}/3$. Dakle,

$$z = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

1.12. Izračunaj **A.** $\text{Arg} \frac{1+i}{1-i}$; **B.** $\text{Arg}(-2 - 2i\sqrt{3})^4$.

RJEŠENJE. **A.**

$$\begin{aligned} \text{Arg} \frac{1+i}{1-i} &= \text{Arg}(1+i) - \text{Arg}(1-i) \\ &= \left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi \right) - \left(-\frac{\pi}{4} + 2m\pi \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

ili, na drugi način

$$\text{Arg} \frac{1+i}{1-i} = \text{Arg} \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \text{Arg} \frac{1+2i+i^2}{2} = \text{Arg } i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

B.

$$\begin{aligned} \text{Arg}(-2 - 2i\sqrt{3})^4 &= 4 \arg(-2 - 2i\sqrt{3}) + 2k\pi \\ &= 4 \left[\pi + \arctg \frac{2\sqrt{3}}{2} \right] + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

1.13. Odredi sve vrijednosti korijena

$$\text{A. } \sqrt[3]{-1+i}; \quad \text{B. } \sqrt[4]{16}; \quad \text{C. } \sqrt[3]{-1}; \quad \text{D. } \sqrt{3+4i},$$

i prikaži ih u kompleksnoj ravnini.

RJEŠENJE.

A. Napišimo broj $-1 + i$ u trigonometrijskom obliku:

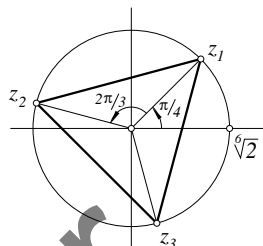
$$-1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Prema tome, vrijedi $|-1+i| = \sqrt{2}$, $\varphi = 3\pi/4$ i po (1.20) dobivamo

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{-1+i} &= \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{3\pi/4 + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 2k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2, \\ &= \sqrt[6]{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right) \right], \quad k = 0, 1, 2.\end{aligned}$$

Postoje tri vrijednosti ovog korijena:

$$\begin{aligned}k = 0 : \quad z_1 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \\ k = 1 : \quad z_2 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right), \\ k = 2 : \quad z_3 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right).\end{aligned}$$



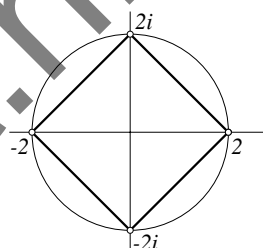
Slika 1.6.

B. Broj 16 u trigonometrijskom obliku ima prikaz $16 = 16(\cos 0 + i \sin 0)$, pa je

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{16} &= \sqrt[4]{16} \left(\cos \frac{0 + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{4} \right), \\ &= 2 \left(\cos \frac{k\pi}{2} + i \sin \frac{k\pi}{2} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3.\end{aligned}$$

Dobivamo sljedeće četiri vrijednosti:

$$\begin{aligned}k = 0 : \quad z_1 &= 2(\cos 0 + i \sin 0) = 2, \\ k = 1 : \quad z_2 &= 2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = 2i, \\ k = 2 : \quad z_3 &= 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2, \\ k = 3 : \quad z_4 &= 2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right) = -2i.\end{aligned}$$



Slika 1.7.

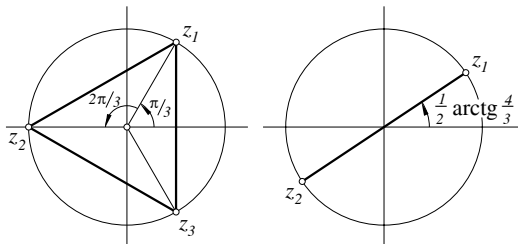
Vidimo da smo $\sqrt[4]{16}$ mogli pronaći i bez upotrebe de Moivreove formule znajući da je jedno rješenje broj 2, a sljedeća tri predstavljaju preostale vrhove kvadrata sa središtem u ishodištu.

C. Trigonometrijski oblik broja -1 je $-1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi)$. Zato

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Dobivamo

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z_2 &= -1, \\ z_3 &= \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$



Slika 1.8.

D. Trigonometrijski oblik ovog broja glasi

$$3 + 4i = 5 \left(\cos(\arctg \frac{4}{3}) + i \sin(\arctg \frac{4}{3}) \right).$$

Zato je

$$\sqrt{3+4i} = \sqrt{5} \left(\cos \frac{\arctg \frac{4}{3} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\arctg \frac{4}{3} + 2k\pi}{2} \right), \quad k = 0, 1.$$

Za $k = 0$ dobivamo:

$$z_1 = \sqrt{5} \left(\cos\left(\frac{1}{2} \arctg \frac{4}{3}\right) + i \sin\left(\frac{1}{2} \arctg \frac{4}{3}\right) \right).$$

Drugo rješenje z_2 je simetrično prvom s obzirom na ishodište, tj. $z_2 = -z_1$.

1.14. Odredi realna rješenja jednadžbe $(x+i)^n - (x-i)^n = 0$.

RJEŠENJE. Jednadžba je ekvivalentna sa

$$\left(\frac{x+i}{x-i} \right)^n = 1 \implies \frac{x+i}{x-i} = \sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Izračunajmo odavde x :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sin \frac{2k\pi}{n} - i(1 + \cos \frac{2k\pi}{n})}{1 - \cos \frac{2k\pi}{n} - i \sin \frac{2k\pi}{n}} \\ &= \frac{\left(\sin \frac{2k\pi}{n} - i(1 + \cos \frac{2k\pi}{n}) \right) \left(1 - \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right)}{\left(1 - \cos \frac{2k\pi}{n} \right)^2 + \left(\sin \frac{2k\pi}{n} \right)^2} \\ &= \frac{\sin \frac{2k\pi}{n}}{1 - \cos \frac{2k\pi}{n}} = \frac{2 \cos \frac{k\pi}{n} \sin \frac{k\pi}{n}}{2 \left(\sin \frac{k\pi}{n} \right)^2} = \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

1.15. Izračunaj A. $|(1-i\sqrt{3})^4 (\sqrt{3}+i)^6|$; B. $|\sqrt[5]{3-4i}|$; C. $|\sqrt{(1+i)^8}|$.

RJEŠENJE.

$$\text{A. } |(1-i\sqrt{3})^4 (\sqrt{3}+i)^6| = |(1-i\sqrt{3})^4| \cdot |(\sqrt{3}+i)^6| = |1-i\sqrt{3}|^4 |\sqrt{3}+i|^6 = (\sqrt{1+3})^4 (\sqrt{3+1})^6 = 2^{10}.$$

$$\text{B. } |\sqrt[5]{3-4i}| = \sqrt[5]{|3-4i|} = \sqrt[5]{\sqrt{9+16}} = \sqrt[5]{5}.$$

$$\text{C. } |\sqrt{(1+i)^8}| = \sqrt{|1+i|^8} = \sqrt{(\sqrt{1+1})^8} = \sqrt{2^4} = 4.$$