

1

Uvod u mehaniku

Ključni pojmovi

mehanika
mehanika krutih tijela
statika
kinematika
dinamika
nauka o čvrstoći
mehanika fluida

Ciljevi

- Upoznati se s povijesnim razvojem mehanike
- Znati podijeliti tehničku mehaniku prema područjima izučavanja

Mehanika (grč. Μηχανική) je grana fizike koja istražuje zakonitosti mirovanja¹ i gibanja² tijela.



Slika 1.1. Egipatska piramida



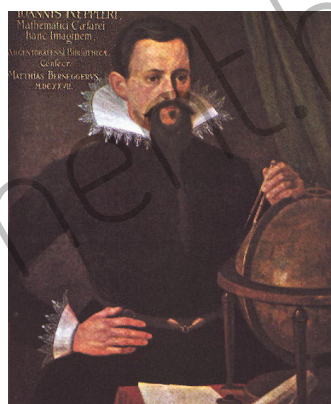
Slika 1.2. Suvremena piramida u Parizu

Rana povijest ovog područja znanosti se preklapa s ranom poviješću razvoja tehnike i astronomije.

Gradeći piramide (slika 1.1.), stari su Egipćani primjenjivali načelo kosine. Koristeći to načelo, podizali su velike i teške kamene blokove na znatnu visinu. Načelo kosine spada u područje mehanike koje se naziva statika. Zapis o načelu poluge, koji se pripisuje grčkom filozofu Arhimedu (287. – 212. pr. Kr.), prvi su pisani dokument iz tog područja. Kako bi se izgradila elegantna piramida ispred muzeja Louvre u Parizu (slika 1.2.), bila su potrebna dva tisućljeća istraživanja zakona statike, ali su rezultati bili vrijedni truda.



Slika 1.3. Astečki kalendar

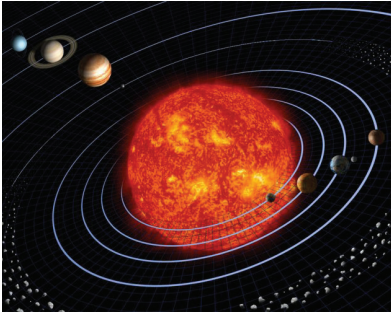


Slika 1.4. Johannes Kepler

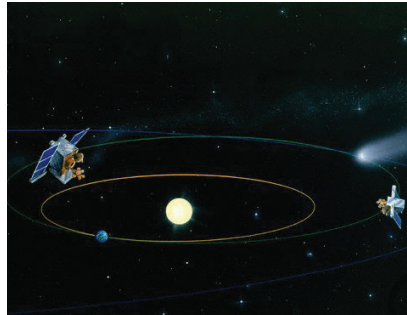
Kako bi stvorili kalendar, stari su narodi pažljivo motrili gibanje nebeskih tijela. Ne ulazeći u zakonitosti tih gibanja, koristili su ih bez dubljeg razumijevanja. Kalendar kojeg su načinili Asteci svjedočanstvo je takvog djelovanja (slika 1.3.). Johannes Kepler (1571. – 1630.) je postavio tri zakona gibanja planeta (slika 1.4.). Jedan od rezultata njegovih istraživanja je dokaz kako se planeti gibaju po eliptičnim, a ne po kružnim putanjama (slika 1.5.). Tako Kepler daje prvi znanstveni doprinos kinematici, području mehanike koje se bavi gibanjem tijela bez obzira na njegov uzrok. Keplerovim zakonima se i danas koriste stručnjaci za proračune putanja svemirskih letjelica (slika 1.6. i 1.7.).

¹ Nasuprot gibanju, mirovanje je, takvo stanje u kojem tijelo ne mijenja svoj položaj u odnosu na nepomičnu okolinu.

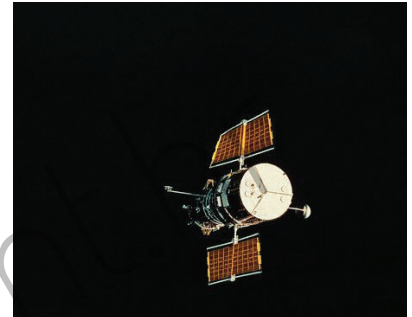
² Gibanje je promjena položaja tijela u odnosu na nepomičnu okolinu.



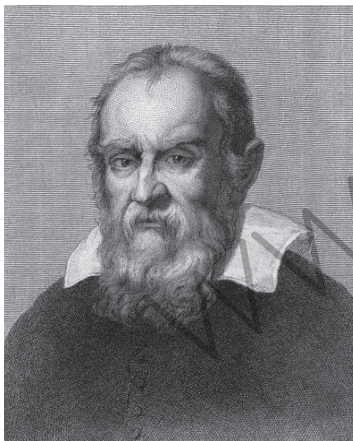
Slika 1.5. Sunčev sustav



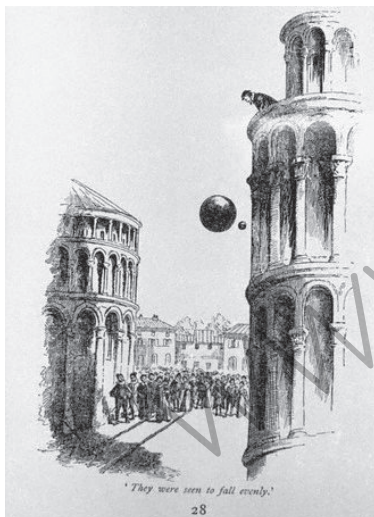
Slika 1.6. Eliptična putanja planeta



Slika 1.7. Svemirska letjelica



Slika 1.8. Galileo Galilei

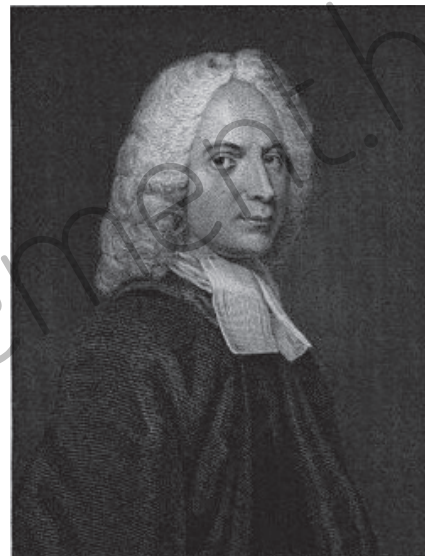


Slika 1.9.

Slobodni pad kugli različitih težina i veličina

Prvo istraživanje problema dinamike se pripisuje Galileu (1564. – 1642.), na slici 1.8. Glasovit je njegov pokus s dvjema kuglama različite mase i veličine. Bacivši ih istovremeno s kosog tornja u Pisi, dokazao je kako sva tijela, bez obzira na težinu, padaju jednako (slika 1.9.).

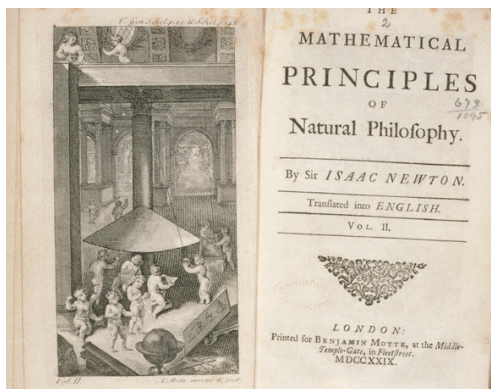
Preciznu formulaciju gibanja tijela pod utjecajem sile dao je Isaac Newton (slika 1.10.) 1687. godine u svom djelu *Principia* (slika 1.11.). Zakoni koje je u tom djelu objavio Newton i danas koriste stručnjaci pri konstrukciji strojeva i naprava koje imaju pokretne dijelove.



Slika 1.10. Sir Isaac Newton

Konstrukcija turbine motora zrakoplova na slici 1.12. bila bi nemoguća bez poznavanja tih zakonitosti.

Od naših znanstvenika svoj su doprinos dinamici dali Ruđer Bošković (1711. – 1788.) i mnogi drugi.



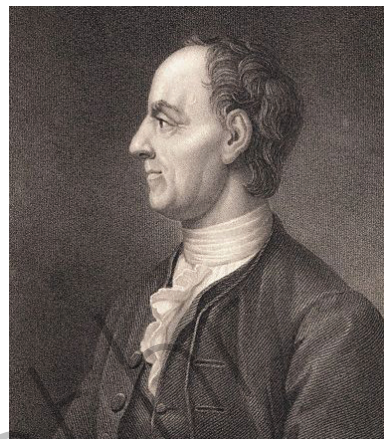
Slika 1.11. Newtonova Principia



Slika 1.12. Turbina motora zrakoplova



Slika 1.13. Ostaci rimskog akvadukta



Slika 1.14. Leonhard Euler

Iskustvom stečena znanja o ponašanju materijala ljudi su koristili od početka civilizacije, gradeći kuće i sustave za navodnjavanje. Za konstrukciju akvadukta (slika 1.13.) stari su Rimljani koristili dva područja mehanike: nauku o čvrstoći i mehaniku fluida. Kako se kamen od kojeg je akvadukt izgrađen ne bi zdrobio pod vlastitom težinom, bila su potrebna znanja iz nauke o čvrstoći. Za dopremanje vode s obližnjih izvora do gradskih kuća i fontana, i to pod odgovarajućim pritiskom, korištena su znanja iz mehanike fluida. Naravno, znanja iz oba područja su bila potpuno iskustvena, bez teorijske podloge. Na slici 1.14. je prikazan Leonhard Euler (1707. – 1783.), čiji je doprinos suvremenoj teoriji na oba područja bio presudan.

Razgranato stablo mehanike ima mnogo grana. U ovoj se knjizi neće ulaziti u sve njezine podjele, već ćemo se ograničiti samo na podjelu tehničke mehanike. Razlog tome je taj što je njezina primjena u tehnici najveća.

Tehnička mehanika se može podijeliti na sljedeće grane:

Mehaniku krutih³ tijela, koja se dalje dijeli na:

Statiku, koja proučava ravnotežu sila koje djeluju na tijelo ili sustav tijela.

Kinematiku, koja proučava gibanje tijela neovisno o uzrocima.

Dinamiku, koja proučava gibanje tijela uzrokovanom silom.

Nauku o čvrstoći⁵, koja proučava svojstva čvrstih tijela⁶ pod djelovanjem sila.

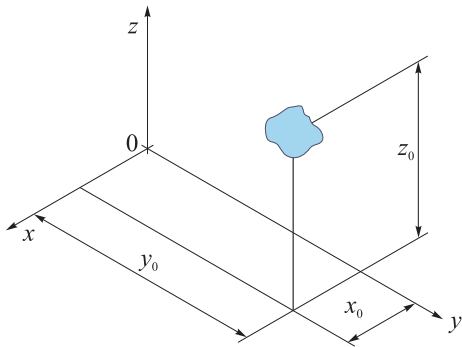
Mehaniku fluida, koja proučava mirovanje i gibanje plinova i tekućina.

³Kruto tijelo je takvo tijelo koje se pod djelovanjem sila ne deformira⁴. Ono u stvarnosti ne postoji, ali se mnogi problemi iz mehanike jednostavnije mogu riješiti svodeći stvarno tijelo na kruto tijelo.

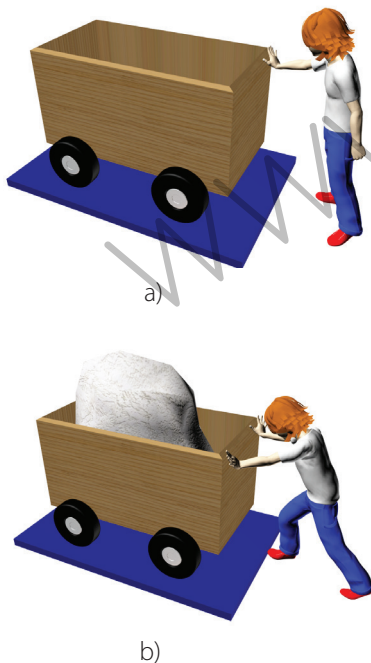
⁴Deformacija je promjena oblika i dimenzija tijela pod djelovanjem sila.

⁵Nauka o čvrstoći se naziva i mehanika čvrstih tijela.⁶

⁶Čvrsto tijelo je realno tijelo koje se pod utjecajem sila deformira.



Slika 1.15.
Tijelo u prostoru



Slika 1.16.
Masa kao otpor promjeni brzine:
a) prazno – lako gurati
b) velika masa – teško gurati



Slika 1.17.
Ubrzanje kao posljedica djelovanja sile

Za uspješno napredovanje u izučavanju mehanike, na samom je početku potrebno upoznati neke temeljne pojmove.

1.1. Temeljni pojmovi mehanike

U proučavanju mehanike sljedeći koncepti i definicije čine njezinu osnovu i moraju se razumjeti od samog početka.

Prostor je geometrijsko područje koje zauzimaju tijela čije položaje opisuju linearna i kutna mjerila, ovisno o koordinatnom sustavu (slika 1.15.).

Vrijeme je mjerilo neprekinutog niza događaja i osnovna je veličina u dinamici.

Vrijeme nije izravno uključeno u analizu statičkih problema.

Masa je mjerilo inercije tijela, odnosno njegovog otpora promjeni brzine (slika 1.16.).

Masa utječe na gravitacijsku privlačnost između tijela.

Sila je djelovanje jednog tijela na drugo.

Sila nastoji pomaknuti tijelo u smjeru njezinog djelovanja ili ga u tom smjeru deformirati.

Čestica je tijelo zanemarivih dimenzija.

U matematičkom smislu, čestica je tijelo čije se dimenzije smatraju približno jednakim nuli, tako da ga možemo promatrati kao masu koncentriranu u točki. Tijelo možemo smatrati česticom kada su njegove dimenzije zanemarive u odnosu na opis njegovog položaja, gibanja ili djelovanja sile na njega.

Neki od temeljnih pojmova mehanike kao što su inercija, sila, te akcija i reakcija sile definirani su i upisani zlatnim slovima u zakone koje je prvi ispravno postavio Isaac Newton i pokazao njihovu točnost. Izraženo suvremenim riječima ti zakoni glase:

1. Zakon inercije

Svako tijelo ili čestica ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu sve dok vanjska sila ne uzrokuje promjenu tog stanja.

2. Zakon proporcionalnosti sile i ubrzanja

Ubrzanje tijela proporcionalno je sili koja djeluje na tijelo. To ubrzanje ima isto usmjerenje kao i sila koja ga je izazvala (slika 1.17.):

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}.$$

Ovdje $\vec{F}$ označava silu, $\vec{a}$ ubrzanje, a m je masa tijela.

3. Zakon – zakon akcije i reakcije

Dva tijela djeluju jedno na drugo silama koje su jednake po veličini i suprotne po smjeru na istom pravcu. Jedna od tih sila je aktivna, a druga reaktivna, odnosno ona je reakcija na djelovanje aktivne sile.

www.element.hr

www.element.hr

2

Pogled u matematiku i mjerne jedinice

Ključni pojmovi

sinus kuta
kosinus kuta
tangens kuta
arkus sinus
arkus kosinus
arkus tangens
vektor
zbiranje vektora
rastavljanje vektora
mjerne jedinice

Ciljevi

- Znati izračunati veličinu kuta iz vrijednosti trigonometrijske funkcije
- Ovladati pojmom vektora
- Znati zbrajati vektore
- Znati rastavljati vektore na komponente
- Upoznati se s mjernim jedinicama



Slika 2.1.
Groma, 1.-2. st. pr. Kr.

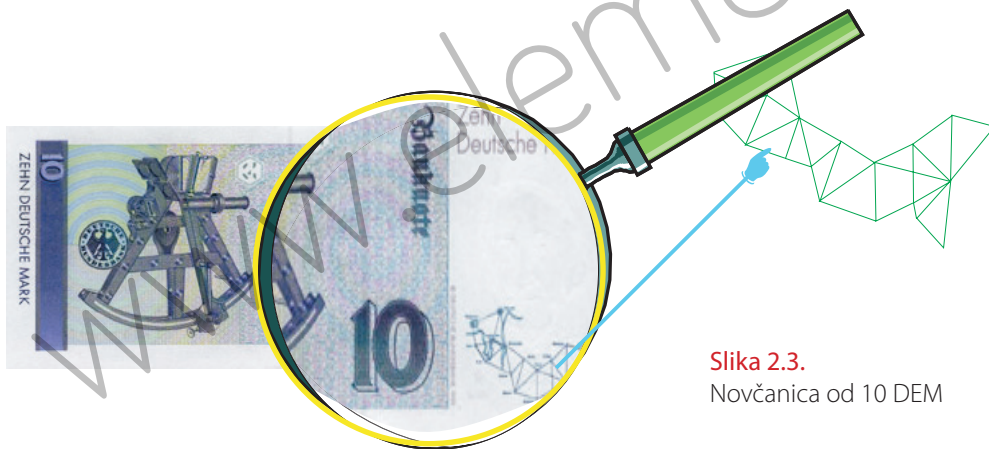
Ova groma (slika 2.1.) grube izrade pronađena je pri iskopavanjima u egipatskoj provinciji Fayum, 1899. g. Ovakvi prvi instrumenti su se mogli koristiti samo na ravnim površinama i za određivanje ograničenog broja kutova. S pomoću grome su se udaljeni predmeti označavali prema položaju kamena na vodoravnoj plohi. Smatra se da se groma koristila za određivanje smjera putova pod pravim kutom u 1. i 2. stoljeću prije Krista.



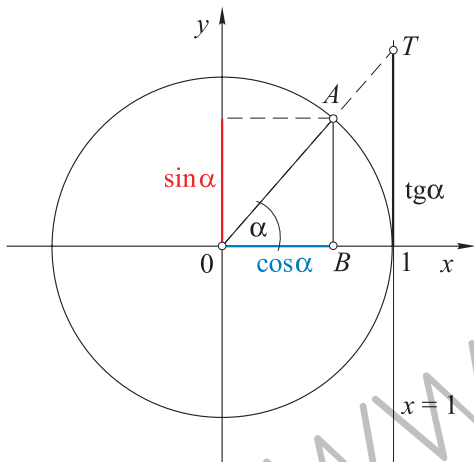
Slika 2.2.
Teodolit, 4,5 inča,
altazimut, sredina 18. st.

Teodoliti, kao ovaj primjer J. Sissona (slika 2.2.), su instrumenti za horizontalno i vertikalno mjerenje kutova i od 16. st. su se često koristili u geodeziji. Ovaj kasniji model ima libele s mjehurićem i bolju mogućnost postavljanja nonija. Sisson je 1720. izumio i teleskop.

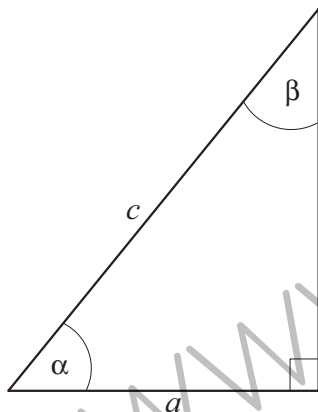
Na novčanici od 10 njemačkih maraka (DEM), na slici 2.3, prikazan je uređaj za mjerenje kutova, sekstant. Desno od njega je mreža trokuta kakva se koristi u geodeziji. Pojava trokuta i sekstanta na najčešćoj novčanici dokazuje njihovu važnost. Riječ trigonometrija dolazi iz grčkog jezika gdje gonos znači kut.



Slika 2.3.
Novčanica od 10 DEM



slika 2.4.
Jedinična kružnica



Slika 2.5.
Trigonometrijske funkcije u pravokutnom trokutu

2.1. Temeljni pojmovi trigonometrije

Osnovne zakonitosti trigonometrijskih funkcija koje će biti korištene u tehničkoj mehanici (sinus kuta, kosinus kuta i tangens kuta) prikazat ćemo na jediničnoj kružnici (slika 2.4.). Jedinična kružnica je ona kružnica čiji je polumjer jednak jediničnoj duljini koordinatnog sustava.

Na slici jedinične kružnice prikazane su tri osi (apscisa ili os kosinusa, ordinata ili os sinusa i pravac $x = 1$ ili os tangensa).

Ako napravimo pravokutni trokut unutar jedinične kružnice, gdje će hipotenuza tog trokuta biti polumjer kružnice, postavljena pod kutom α u odnosu na pozitivno usmjerenu apscisu x , onda će nam tri spomenute osi pokazati vrijednosti navedenih trigonometrijskih funkcija.

Točka A hipotenuze tog trokuta će imati koordinate kosinus α i sinus α . Kosinus α se očitava na apscisi jedinične kružnice, sinus α na ordinati te kružnice, dok produženi pravac hipotenuze siječe os tangensa pa ordinata te osi pokazuje tangens kuta α .

Sinus, kosinus i tangens kuta nazivamo trigonometrijskim funkcijama. Predznak trigonometrijske funkcije ovisi o tome u kojem kvadrantu ravnine se nalazi hipotenuza pravokutnog trokuta konstruiranog u jediničnoj kružnici.

Vidljivo je da vrijednosti trigonometrijskih funkcija sinusa i kosinusa moraju biti u intervalu $[-1, 1]$, dok vrijednost funkcije tangens može biti bilo koji realni broj.

S obzirom na to da smo u jediničnoj kružnici formirali pravokutan trokut, trigonometrijske funkcije možemo definirati preko odnosa stranica pravokutnog trokuta (slika 2.5.).

Sinus kuta

Sinus kuta predstavlja omjer nasuprotne katete i hipotenuze u pravokutnom trokutu:

$$\sin \alpha = \frac{b}{c}, \quad \sin \beta = \frac{a}{c}.$$

Kosinus kuta

Kosinus kuta predstavlja omjer priležeće katete i hipotenuze u pravokutnom trokutu:

$$\cos \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \beta = \frac{b}{c}.$$

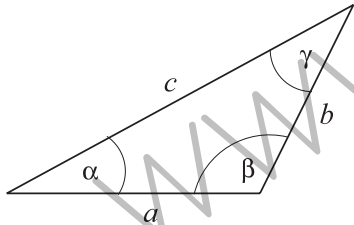
Tangens kuta

Tangens kuta predstavlja omjer nasuprotne i priležeće katete u pravokutnom trokutu:

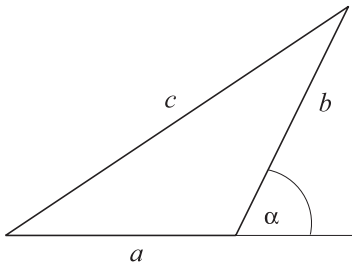
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{a}{b}.$$

Tablica 2.1.
Vrijednosti trigonometrijskih funkcija karakterističnih funkcija

	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 90^\circ$	$\alpha = 180^\circ$	$\alpha = 270^\circ$	$\alpha = 360^\circ$
$\sin \alpha$	0	0,5	0,7071	0,8660	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	0,8660	0,7071	0,5	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	0,5774	1	1,7321	$+\infty$	0	$-\infty$	0



Slika 2.6.
Sinusov poučak



Slika 2.7.
Kosinusov poučak

2.1.1. Arkus funkcije

Arkus funkcije su inverzne funkcije trigonometrijskim funkcijama, a koriste se za izračunavanje kuta iz poznatog iznosa trigonometrijske funkcije:

- arkus sinus kuta ($\arcsin$),
- arkus kosinus kuta ($\arccos$),
- arkus tangens kuta (arctg).

U trigonometriji se još koriste i poučak o sinusu i poučak o kosinusu, a kako je njihova primjena u statički krutim tijela česta, ukratko ćemo ih pokazati.

Zakovitosti koje su pokazane ovim poučcima vrijede za bilo kakav trokut.

Poučak o sinusu glasi:

Sinusi kutova unutar bilo kakvog trokuta odnose se kao nasuprotne stranice tih kutova (slika 2.6.):

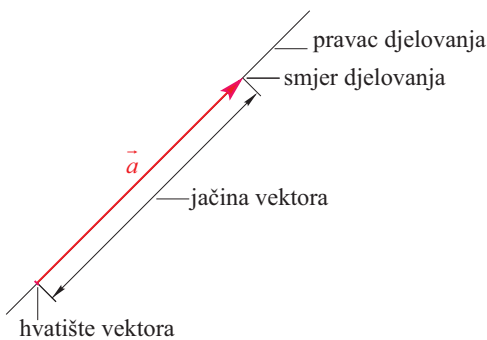
$$\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = b : c : a,$$

odnosno

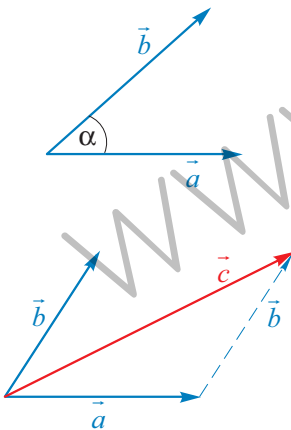
$$\frac{\sin \alpha}{b} = \frac{\sin \beta}{c} = \frac{\sin \gamma}{a}.$$

Poučak o kosinusu (slika 2.7.) ima oblik jednadžbe:

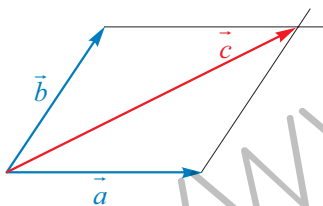
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha}.$$



Slika 2.8.
Prikaz vektora



Slika 2.9.
Zbrajanje vektora



Slika 2.10.
Metoda paralelograma

2.2. Osnove vektorskog računa

Osim skalaru, koji su potpuno označeni realnim brojem, u prirodi postoje fizikalne veličine kojima je, osim brojčanih vrijednosti, potrebno poznavati i pravac djelovanja, smjer djelovanja i hvatište (slika 2.8.). Takve veličine nazivamo vektorima. Na taj način opisujemo djelovanje sile, momenta sile, brzinu, ubrzanje i sl.

2.2.1. Zbrajanje vektora

Zbrojiti dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ znači da na kraj vektora $\vec{a}$ nanosimo početak vektora $\vec{b}$. Zbroj tih dvaju vektora je novi vektor $\vec{c}$ koji ima početak u hvatištu vektora $\vec{a}$, a kraj na kraju vektora $\vec{b}$ (slika 2.9.):

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$$

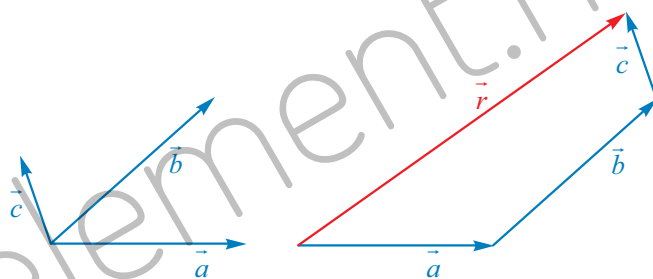
Zbrajati dva vektora možemo grafičkom i analitičkom metodom.

Grafičko zbrajanje je moguće izvesti metodom paralelograma, gdje dijagonala tog paralelograma predstavlja rezultat zbrajanja (slika 2.10.).

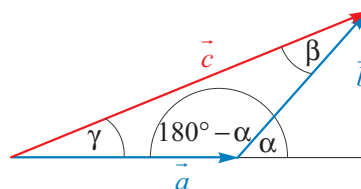
Vektori se mogu grafički zbrajati i poligonom vektora (slika 2.11.). Ova metoda je primjerena kod zbrajanja triju i više vektora.

Analitička metoda zbrajanja predstavlja računsko traženje iznosa rezultata vektorskog zbrajanja i položaja rezultata zbrajanja.

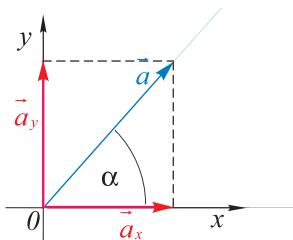
Iznos rezultata zbrajanja se dobije kosinusovim poučkom, dok se položaj rezultata zbrajanja dobije iz sinusovog poučka (slika 2.12.).



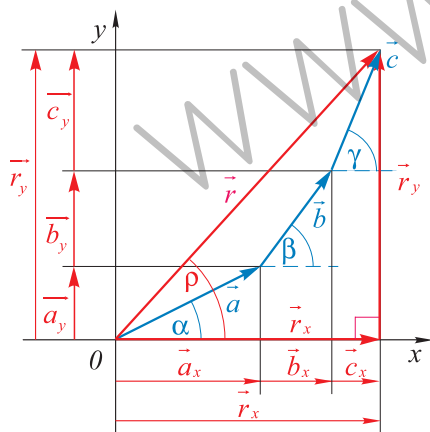
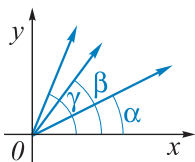
Slika 2.11.
Zbrajanje triju vektora metodom poligona



Slika 2.12.
Izračun iznosa i položaja vektora s pomoću sinusovog i kosinusovog poučka



Slika 2.13.
Projekcije vektora na os



Slika 2.14.
Analitičko zbrajanje vektora

2.2.2. Projekcije vektora na os

Svaki se vektor u ravnini može prikazati s pomoću njegovih projekcija na os x i y (slika 2.13.).

Iznos projekcije vektora na os x :

$$a_x = a \cdot \cos \alpha .$$

Iznos projekcije vektora na os y :

$$a_y = a \cdot \sin \alpha .$$

Projekcije vektora a_x i a_y predstavljaju komponente vektora u smjeru osi x i y .

Rastavljanje vektora na projekcije x i y je izuzetno praktično kod zbrajanja više vektora. Na taj način sve projekcije na os x i sve projekcije na os y svodimo na vektore istog pravca djelovanja te ih možemo algebarski zbrojiti:

$$r_x = a_x + b_x + c_x + \dots + n_x ,$$

$$r_y = a_y + b_y + c_y + \dots + n_y .$$

Kao što je vidljivo iz slike 2.14., algebarski zbroj svih projekcija na os x i algebarski zbroj svih projekcija na os y predstavljaju dvije katete pravokutnog trokuta čija je hipotenuza rezultat zbrajanja svih vektora. Iznos hipotenuze računamo s pomoću Pitagorina poučka:

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} .$$

Položaj rezultantnog vektora, odnosno kut pod kojim on leži u odabranom koordinatnom sustavu, dobije se arkus tangens funkcijom.

Ovisno o kvadrantu ravnine u kojem se rezultantni vektor nalazi, kut pod kojim on leži u odnosu na pozitivnu os x računa se prema tablici 2.2.

Tablica 2.2.
Izračunavanje kuta rezultantnog vektora

I. kvadrant ($r_x > 0, r_y > 0$) $\rho = \arctg \frac{r_y}{r_x}$	II. kvadrant ($r_x < 0, r_y > 0$) $\rho = 180^\circ - \arctg \frac{r_y}{ r_x }$	III. kvadrant ($r_x < 0, r_y < 0$) $\rho = 180^\circ + \arctg \frac{r_y}{r_x}$	IV. kvadrant ($r_x > 0, r_y < 0$) $\rho = 360^\circ - \arctg \frac{ r_y }{r_x}$