

# 1

## Dinamička ravnoteža

### Ključni pojmovi

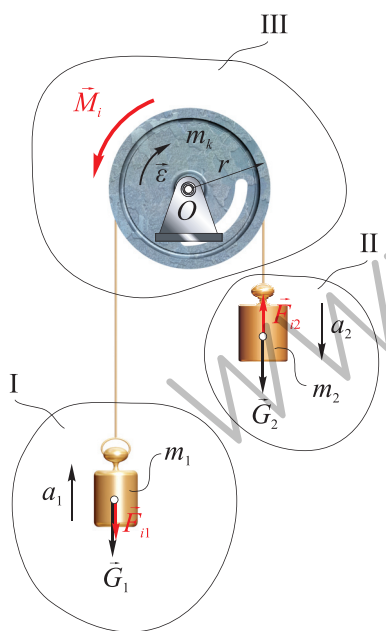
inercijalna sila  
inercijalni moment  
uvjeti dinamičke ravnoteže

### Ciljevi

- Znati dinamičke sustave rastaviti na jednostavne načelom oslobađanja veza
- Moći povezati stečena znanja iz statike i kinematike s dinamičkom ravnotežom sustava

## Načela rješavanja zadataka iz područja dinamičke ravnoteže

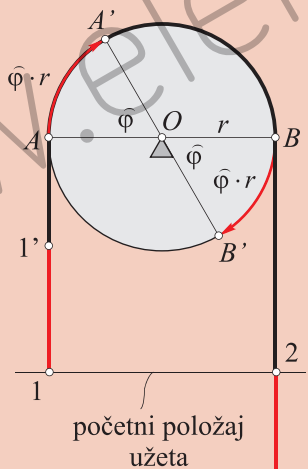
Kako bismo s lakoćom rješavali zadatke s područja dinamičke ravnoteže, potrebno je primijeniti znanja i iz statike i kinematike. Pokažimo to na primjeru sa slike 1.1. Iz statike znamo kako složeniji sustav treba svesti na nekoliko jednostavnijih načelom oslobađanja veza, poštujući načelo iz III. Newtonovog aksioma.



Slika. 1.1.

Dva utega na koloturi

## Pogled u kinematiku



Prisjetimo se kinematskih odnosa na koloturi. Ako se kolotura zarotira za kut  $\hat{\varphi}$  u smjeru kazaljke na satu, tada će za sobom povući lijevi kraj užeta iz točke 1 u točku 1', a spustiti desni kraj iz točke 2 u 2'. Uz uvjet da uže savršeno prijanja uz koloturu, vrijednosti duljina dužina  $\overline{11'}$  i  $\overline{22'}$  moraju biti jednake duljini lukova  $\widehat{AA'}$  i  $\widehat{BB'}$ . Iz matematike se prisjetimo formule za duljinu luka  $l$  kružnice radijusa  $r$  koja glasi:  $l = r \cdot \hat{\varphi}$ . Primijetimo kako kut  $\hat{\varphi}$  mora biti iskazan u radianima. Duljine dužina  $\overline{11'}$  i  $\overline{22'}$  zapravo su putovi  $s$  koje točke 1 i 2 prijeđu putujući prema gore, odnosno dolje. To znači da je  $s = \hat{\varphi} \cdot r$ . Iz toga slijedi da je brzina tih točaka  $v = \omega \cdot r$ , a njihovo ubrzanje  $a = \varepsilon \cdot r$ .

Svedimo sustav na slici 1.1. na tri jednostavnija obilježena brojevima I, II i III, kako je prikazano.

Ucrtajmo sile, momente i ubrzanja koristeći stečeno znanje. Na uteg u sustavu I djeluje njegova vlasitita težina  $G_1$  i inercijalna sila  $F_{i1}$  suprotna vektoru ubrzanja  $a_1$ . Kako uteg ubrzava prema gore, vektor ubrzanja ima smjer gibanja utega.

Na uteg u sustavu II djeluje njegova vlasitita težina  $G_2$  i inercijalna sila  $F_{i2}$  suprotna vektoru ubrzanja  $a_2$ . Kako uteg ubrzava prema dolje, vektor ubrzanja ima smjer gibanja utega.

Iz pogleda u kinematiku ponovili smo kako je  $a = a_1 = a_2$ , odnosno za svaku točku na užetu je jednaka.

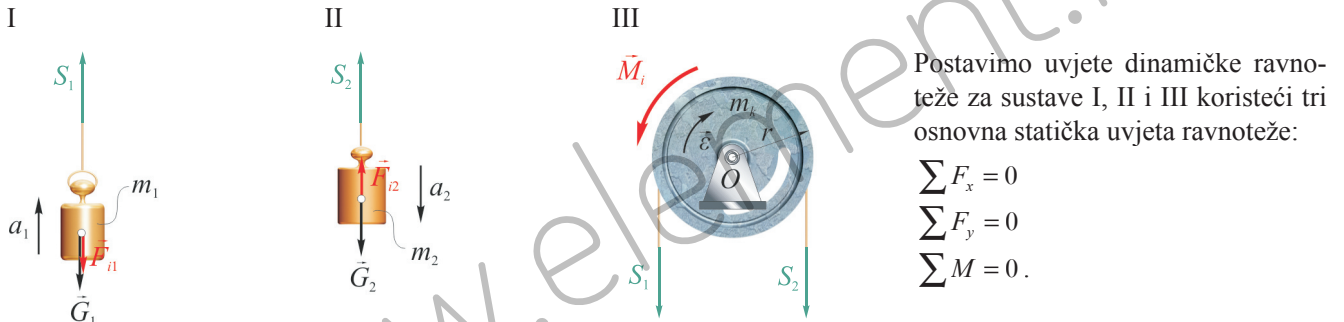
Na koloturu u sustavu III djeluje kinetički moment  $M_i$  suprotan smjeru njezine rotacije i kutnog ubrzanja  $\varepsilon$ .

Na slici 1.2. prikazani su odvojeno jednostavni sustavi I, II i III dobiveni oslobađanjem veza sa složenim sustavom na slici 1.1. Sve vanjske sile i momenti djeluju kao i na složenom sustavu, ali su u mjestima gdje su veze prekinute ucrtane sile.

Uočimo kako su sile u presjecima veza uvijek jednake, ali suprotnog smjera, sukladno III. Newtonovom aksiomu.

### Slika. 1.2.

Složeni sustav rastavljen na tri jednostavnija



Postavimo uvjete dinamičke ravnoteže za sustave I, II i III koristeći tri osnovna statička uvjeta ravnoteže:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M &= 0.\end{aligned}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$S_1 - G_1 - F_{12} = 0$$

$$G_1 = m_1 \cdot g$$

$$F_{12} = m_1 \cdot a_1$$

$$a_1 = a$$

$$S_1 - m_1 \cdot g - m_1 \cdot a = 0.$$

$$\sum F_y = 0$$

$$S_2 - G_2 + F_{12} = 0$$

$$G_2 = m_2 \cdot g$$

$$F_{12} = m_2 \cdot a_2$$

$$a_2 = a$$

$$S_2 - m_2 \cdot g + m_2 \cdot a = 0.$$

$$\sum M_O = 0$$

$$S_1 \cdot r + M_i - S_2 \cdot r = 0$$

$$M_i = \varepsilon \cdot I$$

$$I = m_k r^2$$

$$M_i = \varepsilon \cdot m_k r^2$$

$$S_1 \cdot r + \varepsilon \cdot m_k r^2 - S_2 \cdot r = 0.$$

Pod uvjetom da je  $m_1 = m$ ,  $m_2 = 5m$ , a  $m_k = 2m$ , izračunajmo ubrzanje utega i kutno ubrzanje koloture.

$$S_1 = m_1 \cdot g + m_1 \cdot a$$

$$m_1 = m$$

$$S_1 = m \cdot g + m \cdot a$$

$$S_2 = m_2 \cdot g - m_2 \cdot a$$

$$m_2 = 5m$$

$$S_2 = 5m \cdot g - 5m \cdot a$$

$$(m \cdot g + m \cdot a) \cdot r + \varepsilon \cdot 2mr^2 - (5m \cdot g - 5m \cdot a) \cdot r = 0$$

$$a = \varepsilon \cdot r$$

$$(m \cdot g + m \cdot \varepsilon \cdot r) \cdot r + \varepsilon \cdot 2mr^2 - (5m \cdot g - 5m \cdot \varepsilon \cdot r) \cdot r = 0 \quad / : r$$

$$m \cdot g + m \cdot \varepsilon \cdot r + \varepsilon \cdot 2mr - 5m \cdot g + 5m \cdot \varepsilon \cdot r = 0 \quad / : m$$

$$g + \varepsilon \cdot r + \varepsilon \cdot 2r - 5 \cdot g + 5 \cdot \varepsilon \cdot r = 0$$

$$\varepsilon \cdot r + \varepsilon \cdot 2r + 5 \varepsilon \cdot r = 5g - g$$

$$8 \varepsilon r = 4g \quad / : 8r$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{r}$$

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{r} \cdot r$$

$$a = \frac{1}{2} \cdot g = \frac{1}{2} \cdot 9,81 = 4,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

### Zaključak

Komentirajmo dobiveni rezultat.

Kako se u rezultatu za ubrzanje  $a$  u potpunosti gube nepoznanice, zaključimo da ubrzanje utega ne ovisi o njihovim masama i masi koloture, već o njihovim omjerima. Također uočimo kako niti radijus koloture ne utječe na veličinu ubrzanja, već samo na veličinu kutnog ubrzanja.

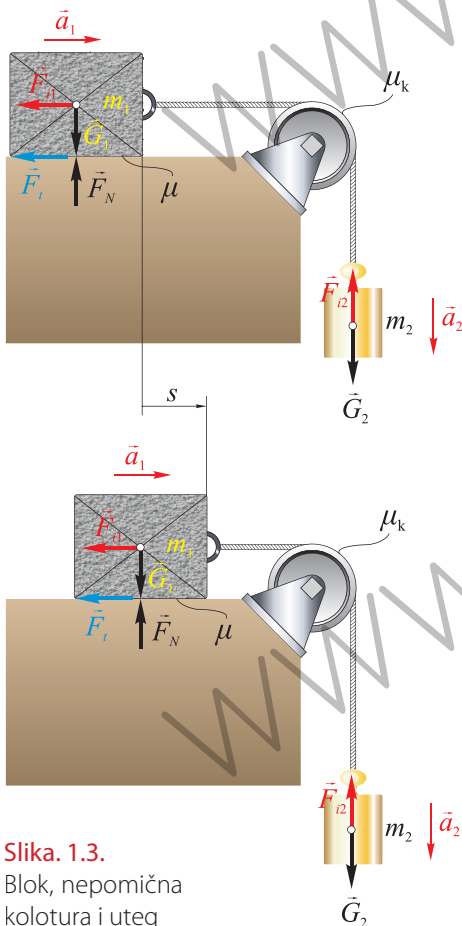
Na slici 1.3. prikazan je sustav za koji treba postaviti dinamičke uvjete ravnoteže. U prethodnom primjeru vidjeli smo kako se primjenjuje načelo rastavljanja složenog sustava na jednostavnije primjenom oslobađanja od veza. Primijenimo stečeno znanje, kako je prikazano na slici 1.4.

## Pogled u statiku

Ako je uža prebačeno preko nepomične koloture ili neke druge kružne plohe, a između njih ne postoji trenje  $\mu$ , tada će sila na aktivnom kraju užeta  $S_1$  biti jednaka sili  $S_2$  na pasivnom kraju užeta.

Ako je uža prebačeno preko nepomične koloture ili neke druge kružne plohe, a između njih postoji trenje  $\mu$ , tada sila na aktivnom kraju užeta  $S_1$  neće biti jednaka sili  $S_2$  na pasivnom kraju užeta, nego veći od nje jer mora svladati trenje. Odnos između tih dviju sila iskazan je Eulerovom formulom koja glasi:

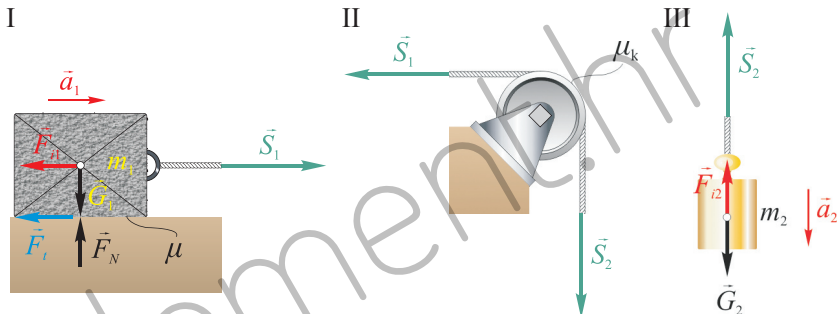
$S_1 = e^{\mu\hat{\varphi}} S_2$ , pri čemu je  $e$  baza prirodnog logaritma s vrijednošću  $e = 2,72$ . Obuhvatni kut  $\hat{\varphi}$  računa se kao zbroj kutova  $\hat{\alpha}$  i  $\hat{\beta}$  čija je vrijednost prikazana na slici i obavezno je izražen u radijanima.



Slika 1.3.  
Blok, nepomična  
kolotura i uteg

Slika 1.4.

Blok, nepomična kolotura i uteg oslobođeni veza



$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ F_N - G_1 &= 0 \\ G_1 &= m_1 \cdot g \\ F_N - m_1 \cdot g &= 0 \Rightarrow F_N = m_1 \cdot g \\ \sum F_x &= 0 \\ -F_{t1} - F_t + S_1 &= 0 \\ F_{t1} &= m_1 \cdot a_1 \\ F_t &= \mu \cdot F_N \\ F_t &= \mu \cdot m_1 \cdot g \\ -m_1 \cdot a_1 - \mu \cdot m_1 \cdot g + S_1 &= 0 \\ S_1 &= m_1 \cdot a_1 + \mu \cdot m_1 \cdot g \quad (I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= S_1 \cdot e^{\mu\hat{\varphi}} \\ \varphi &= 90^\circ \\ \hat{\varphi} &= \frac{\pi}{2} \\ S_2 &= S_1 \cdot e^{\frac{\pi}{2}} \quad (II) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ S_2 + F_{t2} - G_2 &= 0 \\ F_{t2} &= m_2 \cdot a_2 \\ G_2 &= m_2 \cdot g \\ S_2 + m_2 \cdot a_2 - m_2 \cdot g &= 0 \\ S_2 &= m_2 \cdot g - m_2 \cdot a_2 \quad (III) \end{aligned}$$

Iz kinematskih uvjeta znamo da je  $a = a_1 = a_2$ . Izjednačimo izraze II i III po  $S_2$ :

$$S_1 \cdot e^{\frac{\mu}{2}} = m_2 \cdot g - m_2 \cdot a.$$

Uvrstimo vrijednost za  $S_1$  iz izraza I:

$$(m_1 \cdot a + \mu \cdot m_1 \cdot g) \cdot e^{\frac{\mu}{2}} = m_2 \cdot g - m_2 \cdot a.$$

Pretpostavimo da je  $m_1 = 2m$  i  $m_2 = 10m$  i da je faktor trenja  $\mu = 1/10$ . Tada se dobiva:

$$\left( 2m \cdot a + \frac{1}{10} \cdot 2m \cdot g \right) \cdot e^{\frac{1}{10} \cdot \frac{\pi}{2}} = 10m \cdot g - 10m \cdot a \quad / : 2m$$

$$\left( a + \frac{1}{10} \cdot g \right) \cdot e^{\frac{\pi}{20}} = 5 \cdot g - 5 \cdot a$$

$$a \cdot e^{\frac{\pi}{20}} + \frac{1}{10} \cdot g \cdot e^{\frac{\pi}{20}} = 5 \cdot g - 5 \cdot a$$

$$a \cdot e^{\frac{\pi}{20}} + 5 \cdot a = 5 \cdot g - \frac{1}{10} \cdot g \cdot e^{\frac{\pi}{20}}$$

$$a \left( e^{\frac{\pi}{20}} + 5 \right) = g \left( 5 - \frac{1}{10} \cdot e^{\frac{\pi}{20}} \right) \quad / : \left( e^{\frac{\pi}{20}} + 5 \right)$$

$$a = \frac{g \left( 5 - \frac{1}{10} \cdot e^{\frac{\pi}{20}} \right)}{e^{\frac{\pi}{20}} + 5}$$

Uvrštavajući dobiveni izraz za  $a$  u izraz I, dobiva se:

$$S_1 = m \cdot \frac{g \left( 5 - \frac{1}{10} \cdot e^{\frac{\pi}{20}} \right)}{e^{\frac{\pi}{20}} + 5} + \frac{1}{10} \cdot m \cdot g$$

$$S_1 = mg \left( \frac{\left( 5 - \frac{1}{10} \cdot e^{\frac{\pi}{20}} \right)}{e^{\frac{\pi}{20}} + 5} + \frac{1}{10} \right)$$

Uvrštavajući izraz za  $S_1$  u izraz II, dobiva se:

$$S_2 = mg \left( \frac{\left( 5 - \frac{1}{10} \cdot e^{\frac{\pi}{20}} \right)}{e^{\frac{\pi}{20}} + 5} + \frac{1}{10} \right) \cdot e^{\frac{\pi}{20}}$$

# 2

## Snaga i stupanj iskoristivosti

### Ključni pojmovi

mehanička snaga  
vat  
konjska snaga  
stupanj iskoristivosti

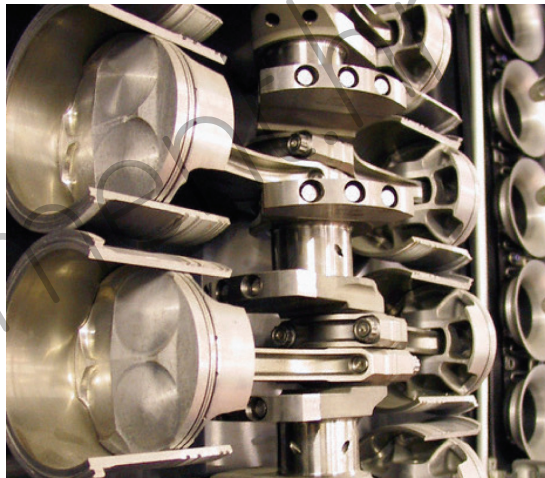
### Ciljevi

- Usvojiti pojam snage i stupnja iskoristivosti
- Usvojiti mjerne jedinice za snagu

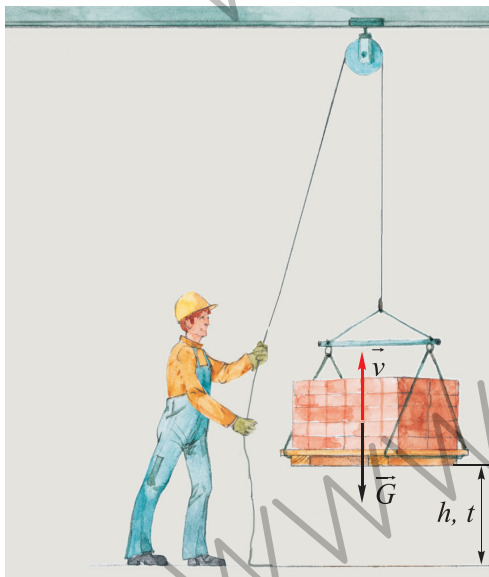
## 2.1. Mehanička snaga



Slika 2.1.  
Korištenje snage konja



Slika 2.2.  
Suvremeni motor



Slika 2.3 .

Za ilustraciju definicije mehaničke snage iskoristimo već poznatu sliku 11.7.

U davna vremena, kao na slici 2.1, kad su se brojni radovi obavljali korištenjem konjske snage, normalno je da je i pojam snage bio vezan za snagu konja. Tako je i prva jedinica za snagu bila nazvana: konjska snaga, skraćeno KS.

**Jedna konjska snaga, KS, je snaga potrebna za podizanje 75 kg na visinu od 1 m za vrijeme od 1 s.**

S vremenom, počevši od 1960. godine, uveden je ISO sustav jedinica, o kojem je bilo riječi na početku knjige. U tom se sustavu snaga izražava drugom jedinicom, nazvanom vat, W. Svoje ime je dobila po Jamesu Wattu, engleskom fizičaru. Tako suvremeni strojevi, kakav je onaj na slici 2.2., imaju snagu izraženu u toj suvremenoj mjernoj jedinici.

**Jedan vat, W, je snaga potrebna za obavljanje rada od jednog džula, J, za 1 s.**

Radnik podiže teret sile težine  $G$  na visinu  $h$ . Tada obavlja rad  $W = G \cdot h, J$ . Ako uvedemo još i vrijeme potrebno da se taj rad obavi, možemo reći da je  $P = \frac{W}{t} W$ .

S obzirom na to da se još uvijek često susreću i stara, KS, i nova jedinica, W, potrebno je znati odnos među njima.

Tako je  $1 \text{ KS} = 0.73549875 \text{ kW}$ .

Sada spomenimo i kako se općenito definira snaga.

**Snaga je rad obavljen u jedinici vremena.**

Kako bismo stekli bolji osjećaj o pojmu mehaničke snage, spomenimo i to da je snaga proporcionalna brzini kojom savladavamo neku silu.

Kako je već rečeno, rad možemo izraziti kao  $W = F_s \cdot s, \text{ J}$ .

Prema definiciji snage slijedi:  $P = \frac{W}{t} = \frac{F_s \cdot s}{t} = F_s \cdot v$  .

Dobivena snaga nikad ne može biti veća od uložene.

Omjer između dobivene i uložene snage se naziva korisnost ili stupanj iskoristivosti i obilježava se grčkim slovom  $\eta$  (eta). Naglasimo kako taj omjer nikad ne može biti veći od 1.

$$\eta = \frac{P_k}{P_u}$$

### Primjer 1.

Kolika je snaga potrebna da bi se blok gibao stalnom brzinom od  $72 \text{ kmh}^{-1}$ ?

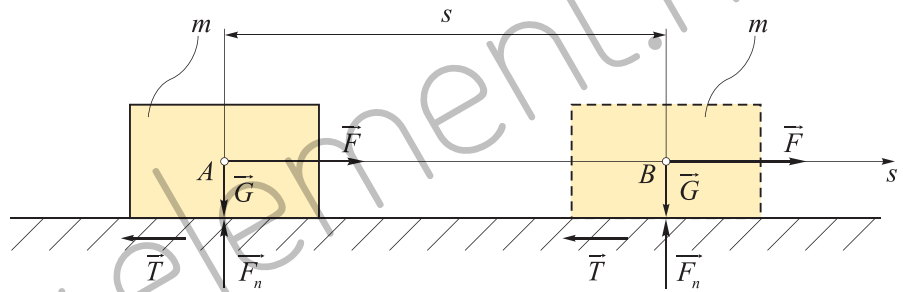
$$m = 10 \text{ kg}$$

$$s = 2 \text{ m}$$

$$\mu = 0,1$$

$$v = 72 \text{ kmh}^{-1} = 20 \text{ ms}^{-1}$$

$$P = ?$$



$$P = T \cdot v$$

$$T = F_n \cdot \mu$$

$$P = m \cdot g \cdot \mu \cdot v$$

$$P = 10 \cdot 9,81 \cdot 0,1 \cdot 20$$

$$P = 196,2 \text{ W}$$

**Pitanja za ponavljanje:.....**

1. Kako se definira snaga?
2. Navedite mjerne jedinice za snagu.
3. Definirajte 1 W.
4. Definirajte 1 KS.
5. Što je stupanj iskoristivosti snage i kako se računa?
6. Zašto stupanj iskoristivosti snage ne može biti veći od 1?

# 3

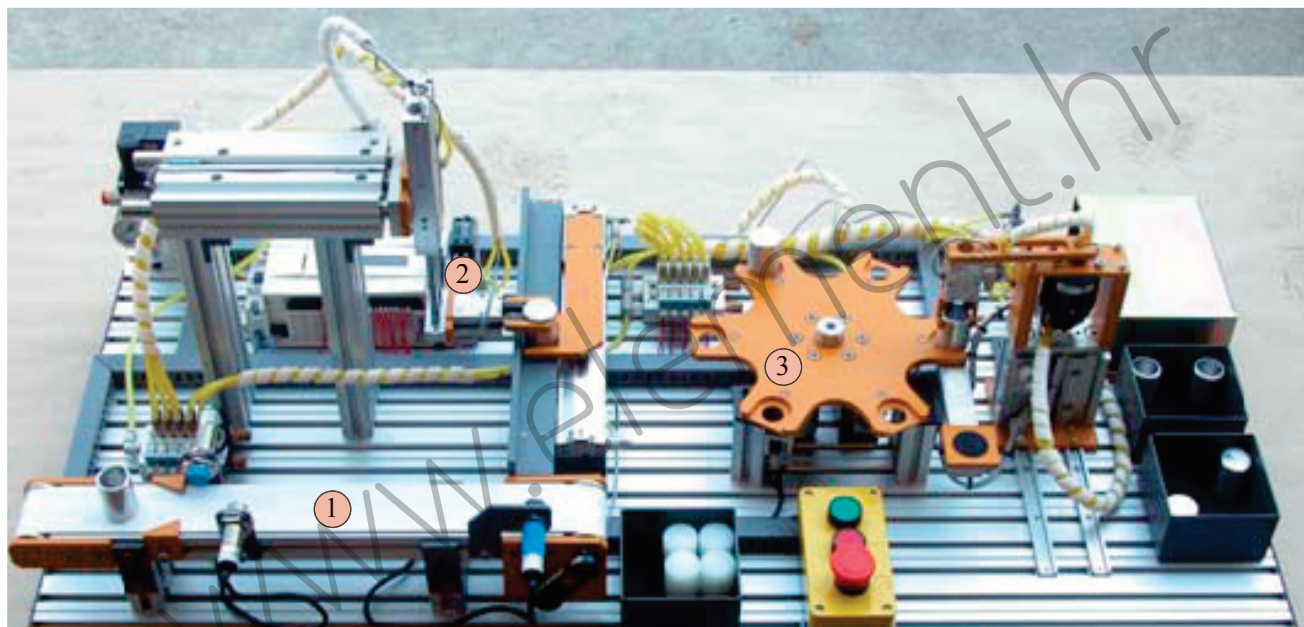
## Dinamika Jednostavnih mehanizama

### Ključni pojmovi

klipni mehanizam  
jednadžba očuvanja energije  
translatorsko gibanje  
rotacijsko gibanje  
planarno gibanje

### Ciljevi

- Upoznati se s osnovnim dinamičkim zakonitostima jednostavnih mehanizama



**Slika 3.1.**  
Edukativni mehatronički uređaj



**Slika 3.2.**  
Robotska ruka

U suvremenoj mehatronici koristi se mnogo tradicionalnih mehanizama s područja strojarstva čiji je rad potpomognut suvremenim elektroničkim sklopovima.

Na slici 3.1. prikazana je pokretna traka (1) regulirana s dva senzora. Brojem (2) prikazan je vertikalni podizač, a brojem (3) okretna ploča.

Svaki od tih mehanizama, uključujući i najsuvremeniju robotsku ruku, podliježe zakonima statike, nauke o čvrstoći i dinamike. U ovom poglavlju ćemo na pojednostavljen način predstaviti dinamiku tih i sličnih mehanizama.

## Pogled u kinematiku

Prisjetimo se ravninskog gibanja iz kinematike.

Na slici a) prikazano je kruto tijelo kako se giba translatorno. To znači da se sve njegove točke gibaju jednakom brzinom  $v$ .

Na slici b) prikazano je kruto tijelo kako se giba rotaciono. Sve njegove točke gibaju se jednakom kutnom brzinom. Iz toga slijedi da se točka  $A$  giba oko točke  $B$  na radijusu  $\overline{AB}$  kutnom brzinom  $\omega$ , a točka  $B$  oko točke  $A$  na radijusu  $\overline{BA}$  jednako tako s kutnom brzinom  $\omega$ . Kako su radijusi  $\overline{AB}$  i  $\overline{BA}$  jednaki, brzine  $v_{A/B}$  i  $v_{B/A}$  također su jednake, ali suprotnog smjera. Matematički izraženo to glasi:

$$v_{A/B} = \omega \cdot \overline{AB}$$

$$v_{B/A} = \omega \cdot \overline{BA}$$

$$\overline{AB} = \overline{BA}$$

$$v_{A/B} = v_{B/A}$$

Dakle, iznosi brzina su jednaki. Na crtežu b) uočimo kako su im smjerovi različiti, što znači da je

$$\vec{v}_{A/B} = -\vec{v}_{B/A}.$$

Na slici c) prikazano je planarno gibanje kod kojeg kruto tijelo istovremeno i rotira i translira. Dakle, kako bi se dobila ukupna brzina točke, potrebno je samo zbrojiti vektore sa slike a) i slike b). Iz toga slijedi:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}.$$

Kako na ovom mjestu ne bi ponovno izvodili izraze za ubrzanja tijela koje istovremeno translira ubrzanjem  $a$  i rotira kutnim ubrzanjem  $\varepsilon$ , uočimo sličnost ponašanja brzina s ponašanjem ubrzanja:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}.$$

Pritom imajmo u vidu da je:

$$\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_{A/B}^n + \vec{a}_{A/B}^t$$

$$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_{B/A}^n + \vec{a}_{B/A}^t$$

$$a_{A/B}^t = \varepsilon \cdot \overline{AB}$$

$$a_{B/A}^t = \varepsilon \cdot \overline{BA}$$

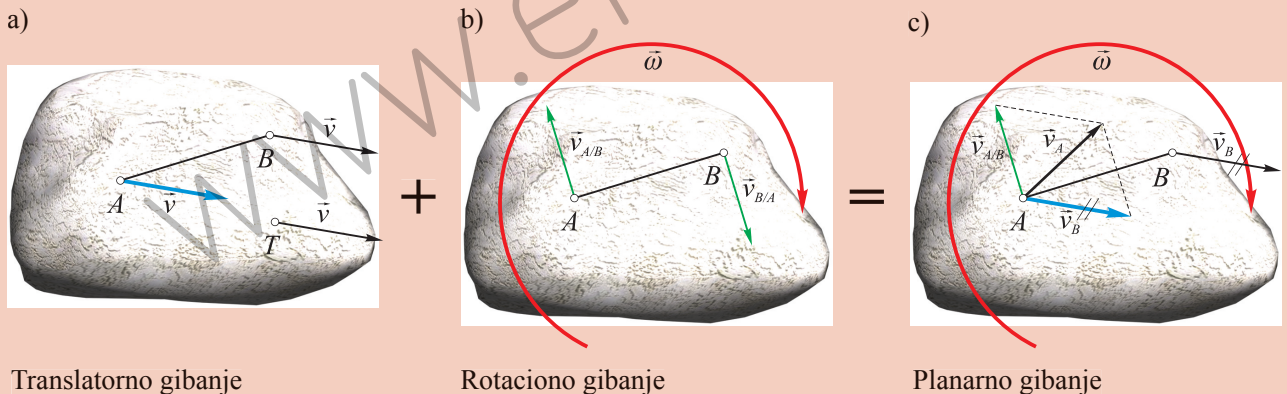
Kako su duljine dužina  $\overline{AB}$  i  $\overline{BA}$  jednake, a sve točke krutog tijela rotiraju jednakim kutnim ubrzanjem  $\varepsilon$ , proizlazi da su im tangencijalne komponente ubrzanja jednake  $a_{A/B}^t = a_{B/A}^t$ , a da su različite po smjeru:

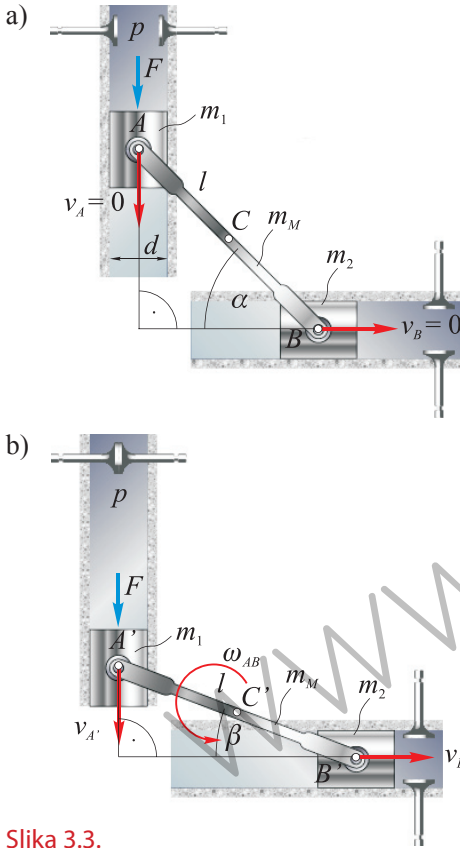
$$\vec{a}_{A/B}^t = -\vec{a}_{B/A}^t.$$

Za normalne komponente ubrzanja vrijedi:

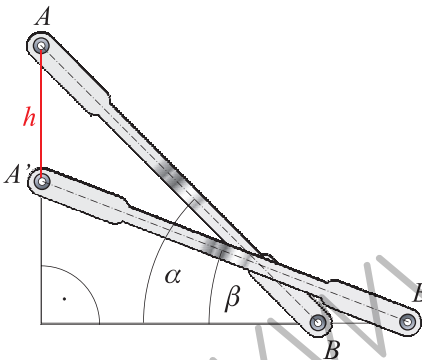
$$a_{A/B}^n = a_{B/A}^n = \omega^2 \cdot \overline{AB}.$$

Prisjetimo se kako je vektor ubrzanja  $a_{A/B}^n$  usmjeren prema točki  $B$ , a  $a_{B/A}^n$  je usmjeren prema točki  $A$ .





**Slika 3.3.**  
Klipni mehanizam



**Slika 3.4.**  
Plan položaja

Klipni mehanizam na slici 3.3. pokretan je zrakom pod stalnim pritiskom  $p$ . Zrak tlačí klip promjera  $d$  i proizvodi stalnu silu  $F$  koja gura klip prema dolje. Klipovi su povezani klipnom motkom duljine  $l$  i zbog toga se nalaze u kinematičkoj vezi. Ako je u početnom položaju na slici a) mehanizam mirovao, izračunajte brzinu klipova u krajnjem položaju prikazanom na slici b), ako je  $m_1 = m$ ,  $m_2 = m$ ,  $m_M = 0$ ,  $\alpha = 45^\circ$ , a  $\beta = 30^\circ$ .

Postavimo jednadžbu očuvanja energije tako da referentnu ravninu povučemo kroz točku  $A'$ , neuzimajući u obzir masu motke  $m_M$ .

$$\sum E = \sum E'$$

$$m_1 \cdot g \cdot h + W_F = \frac{m_1 v_{A'}^2}{2} + \frac{m_2 v_{B'}^2}{2} + \frac{v_{C'}^2}{2}.$$

Iz trokuta na slici 3.4. vidljivo je kako je klip pod djelovanjem sile  $F$  prešao put  $h$ . Zato možemo reći da je:

$$W_F = F \cdot h.$$

Iz izraza za silu pritiska  $F = p \cdot A$ , gdje je  $A$  površina klipa promjera  $d$ , dobivamo:

$$F = p \cdot \frac{d^2 \pi}{4}.$$

Uvrštavanjem u izraz za rad  $W_F$  dobivamo  $W_F = p \cdot h \cdot \frac{d^2 \pi}{4}$ .

Iz plana brzina na slici 3.5. vidimo da je  $v_{B'} = v_{A'/B'} \cdot \sin \beta$ , a  $v_{A'} = v_{A'/B'} \cdot \cos \beta$ .

Uvrstimo navedene izraze u jednadžbu zakona o očuvanju energije.

$$m_1 \cdot g \cdot h + p \cdot h \cdot \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{m_1 (v_{A'/B'} \cdot \cos \beta)^2}{2} + \frac{m_2 (v_{A'/B'} \cdot \sin \beta)^2}{2}$$

$$v_{A'/B'} = \omega_{A'/B'} \cdot \overline{AB}, \quad \overline{AB} = l \Rightarrow \omega_{A'/B'} = \frac{v_{A'/B'}}{l}$$

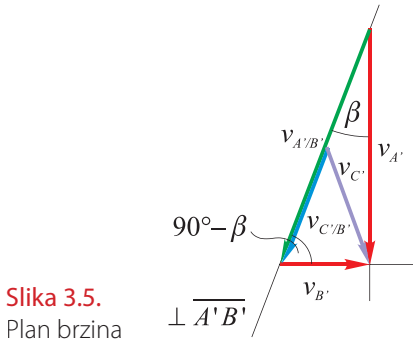
$$m_1 \cdot g \cdot h + p \cdot h \cdot \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{m_1 (v_{A'/B'} \cdot \cos \beta)^2}{2} + \frac{m_2 (v_{A'/B'} \cdot \sin \beta)^2}{2}$$

$$h \cdot \left( m \cdot g + p \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \right) = \frac{m (v_{A'/B'} \cdot \cos \beta)^2}{2} + \frac{m (v_{A'/B'} \cdot \sin \beta)^2}{2}$$

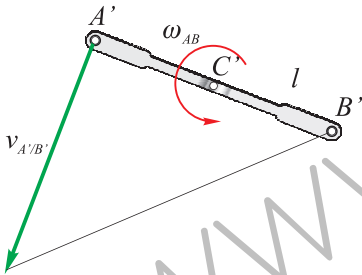
$$h \cdot \left( m \cdot g + p \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \right) = \frac{m \cdot v_{A'/B'}^2 \cdot \cos^2 \beta}{2} + \frac{m \cdot v_{A'/B'}^2 \cdot \sin^2 \beta}{2}$$

$$h \cdot \left( m \cdot g + p \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \right) = \frac{m \cdot v_{A'/B'}^2 \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2}{2} + \frac{m \cdot v_{A'/B'}^2 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^2}{2}$$

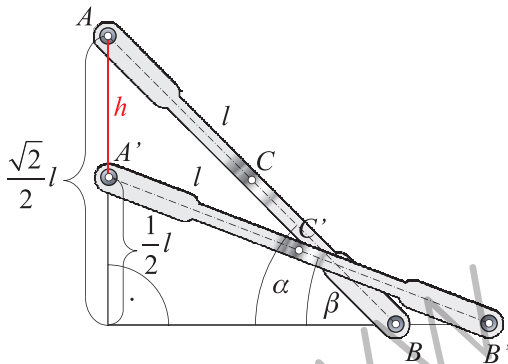
$$h \cdot \left( m \cdot g + p \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \right) = \frac{m \cdot v_{A'/B'}^2}{4} + \frac{m \cdot v_{A'/B'}^2}{8}$$



**Slika 3.5.**  
Plan brzina



**Slika 3.6.**  
Odnos kutne brzine i brzine točke A' na kraju štapa



**Slika 3.7.**  
Odnos pomaka točke A' na kraju štapa i točke C u težištu štapa

$$h \cdot \left( m \cdot g + p \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \right) = \frac{3}{8} m \cdot v_{A'/B'}^2 / \cdot \frac{8}{3m} / \cdot \sqrt{\phantom{x}}$$

$$v_{A'/B'} = \sqrt{\left( m \cdot g + p \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \right) \cdot \frac{8h}{3m}} = 2 \sqrt{\left( m \cdot g + p \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \right) \cdot \frac{2h}{3m}}$$

Iz odnosa kutnih brzina na slici 3.6. proizlazi da je:

$$v_{A'/B'} = \omega_{A'/B'} \cdot \overline{A'B'} = \omega_{A'/B'} \cdot l$$

$$\omega_{A'/B'} = \frac{v_{A'/B'}}{l}$$

Iz trokuta plana položaja na slici 3.4. vidljivo je:

$$h = l \sin \alpha - l \sin \beta$$

$$h = l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - l \cdot \frac{1}{2}$$

$$h = l \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$$

Uvrštavajući taj izraz u izraz za  $v_{A'/B'}$  dobivamo:

$$v_{A'/B'} = \sqrt{\left( m \cdot g + p \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \right) \cdot \frac{8l \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{2}}{3m}}$$

$$v_{A'/B'} = \sqrt{\left( m \cdot g + p \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \right) \cdot \frac{4l \cdot (\sqrt{2} - 1)}{3m}}$$

Uvrštavajući gornji izraz u jednačbe za  $v_A$  i  $v_B$  dobiva se:

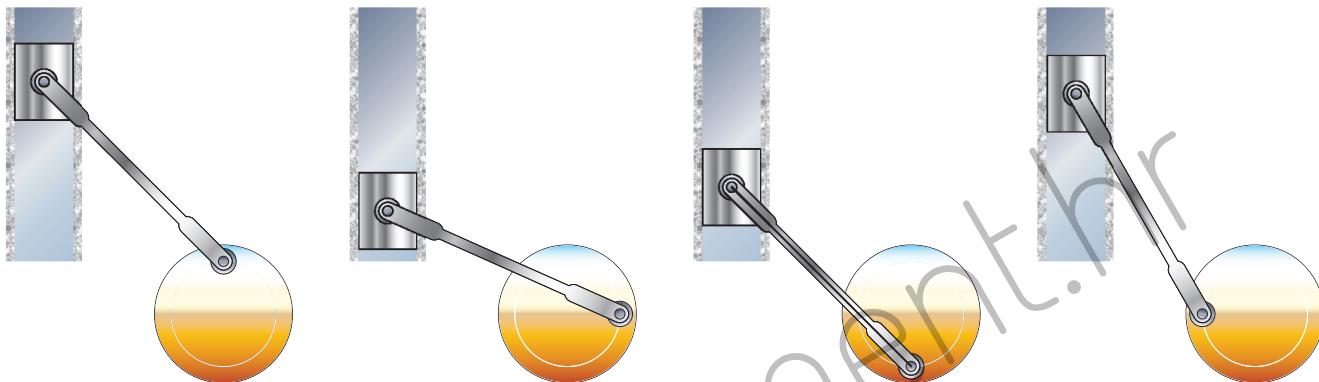
$$v_A = 2 \sqrt{\left( m \cdot g + p \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \right) \cdot \frac{2h}{3m}} \cdot \cos \beta =$$

$$= 2 \sqrt{\left( m \cdot g + p \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \right) \cdot \frac{2h}{3m}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\left( m \cdot g + p \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \right) \cdot \frac{2h}{m}}$$

$$v_B = 2 \sqrt{\left( m \cdot g + p \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \right) \cdot \frac{2h}{3m}} \cdot \sin \beta =$$

$$= 2 \sqrt{\left( m \cdot g + p \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \right) \cdot \frac{2h}{3m}} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{\left( m \cdot g + p \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \right) \cdot \frac{2h}{3m}}$$

Prema relativnoj složenosti proračuna za ovako jednostavan mehanizam možemo zamisliti složenost proračuna mehanizama u kojima su uključeni i drugi parametri, npr. trenje, toplinski gubici, itd. Zato je ovaj primjer dan radi razvijanja osjećaja za dinamičke veličine, ali i kao ilustracija i izazov za daljnje proučavanje mehatroničkih mehanizama.

**Slika 3.8.**

Prikaz načina djelovanja klipnog mehanizma

**Pitanja za ponavljanje:.....**

1. Nabrojite neke jednostavne dinamičke mehanizme.
2. Opišite rad klipnog mehanizma.
3. Kakvo gibanje obavljaju klipovi mehanizama?
4. Kakvo gibanje obavlja klipna motka?