

1

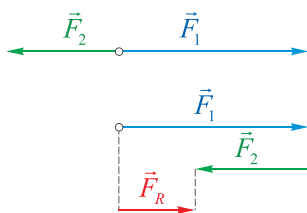
Sile u prostoru

Ključni pojmovi

prostorna sila
komponente prostorne sile
prostorni sustav sila
rezultanta prostornog sustava sila
ravnoteža prostornog sustava sila

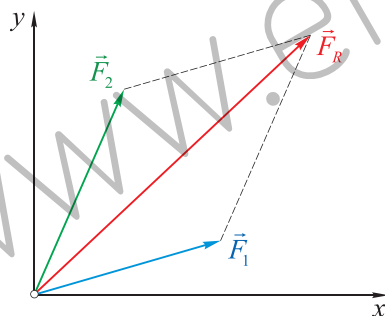
Ciljevi

- Spoznati pojam prostornog djelovanja sile
- Ovladati načinom rastavljanja prostorne sile na komponente
- Znati prostornu silu prikazati preko projekcija na osi prostornog koordinatnog sustava
- Ovladati načinom zbrajanja prostornih sila zajedničkog hvatišta
- Ovladati pojmom ravnoteže prostornih sila zajedničkog hvatišta
- Moći riješiti zadatke prostornog sustava sila zajedničkog hvatišta izračunavanjem rezultantne sile ili primjenom prostornih uvjeta ravnoteže



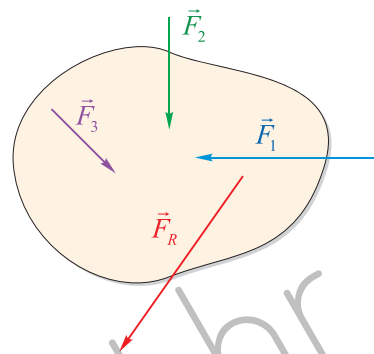
Slika 1.1.a)

Rezultanta kolinearnog sustava sila



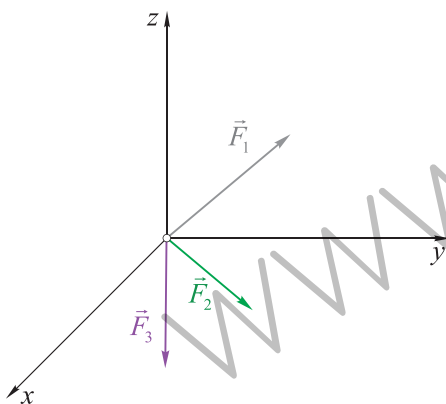
Slika 1.1.b)

Rezultanta konkurentnog sustava sila



Slika 1.1.c)

Rezultanta nekonkurentnog sustava sila



Slika 1.2.a)

Prostorni sustav sila istog hvatišta

U udžbeniku *Tehnička mehanika 1 – STATIKA* prikazane su sile čije je djelovanje obuhvaćeno jednom ravninom. Tu smo vidjeli kako se različiti ravninski sustavi sila sastoje u rezultatnu silu, što je prikazano slikama 1.1.a), 1.1.b) i 1.1.c).

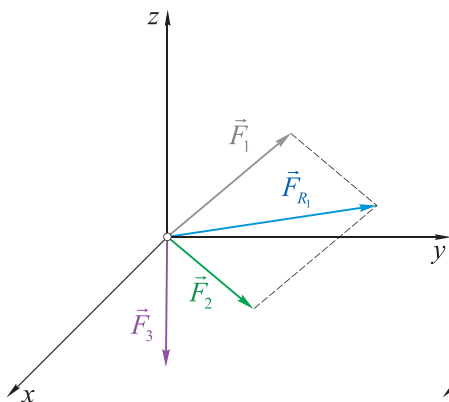
Međutim, djelovanje više sila na neko tijelo najčešće nije ravninsko nego prostorno. Prostorni sustav sila može biti sa zajedničkim hvatištem ili s različitim hvatištem. U ovom poglavlju će biti prikazan način sastavljanja prostornih sila istog hvatišta u rezultatnu silu, zatim rastavljanje sile na prostorne komponente, kao i ravnoteža sila istog hvatišta u prostoru.

1.1. Sastavljanje sila istog hvatišta u prostoru

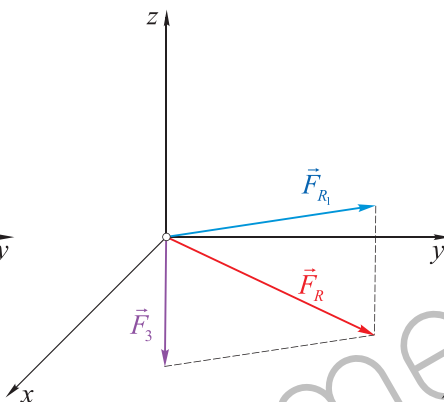
1.1.1. Sastavljanje triju sila

Uzmimo da u nekoj točki O djeluju tri sile čiji pravci djelovanja ne leže u zajedničkoj ravnini, kao što je prikazano slikom 1.2.a). Njihovo djelovanje može se svesti na rezultatnu silu primjenom pravila o zbrajanju sila. Ako silu $\vec{F}_1$ i silu $\vec{F}_2$ zbrojimo metodom paralelograma sila ili metodom trokuta sila, dobit ćemo njihovu rezultatnu silu $\vec{F}_{R1}$ (slika 1.2.b), koja će biti prikazana dijagonalom tog paralelograma. Ako zatim silu $\vec{F}_{R1}$ na isti način zbrojimo sa silom $\vec{F}_3$, dobit ćemo ukupnu rezultatnu silu $\vec{F}_R$ (slika 1.2.c).

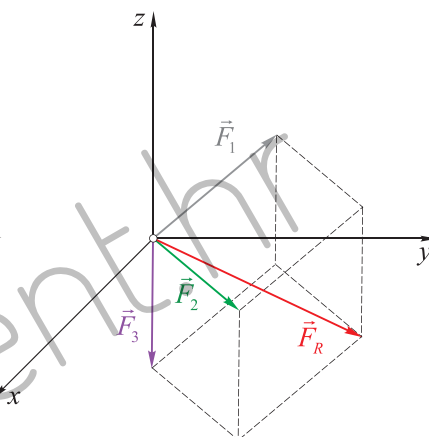
Iz priloženog vidimo da kod zbrajanja triju prostornih sila možemo primijeniti tzv. pravilo paralelepipeda sila. Odnosno, ako nacrtamo paralelepiped čiji su bridovi upravo zadane sile, njihova rezultatna će biti prostorna dijagonala tog paralelepipeda (slika 1.2.d).



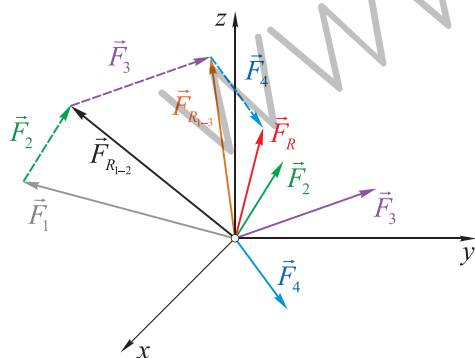
Slika 1.2.b)
Zbrajanje dviju sila metodom paralelograma



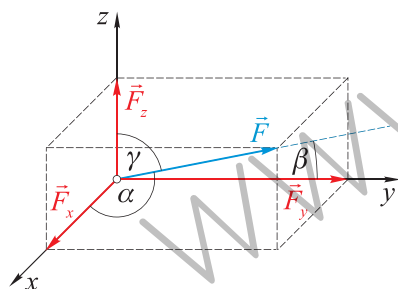
Slika 1.2.c)
Zbrajanje sila metodom paralelograma



Slika 1.2.d)
Rezultanta prostornog sustava sila istog hvatišta (metoda paralelepipeda)



Slika 1.3.
Prostorni poligon sila



Slika 1.4.
Komponente sile kao projekcije na osi

1.1.2. Sastavljanje više sila

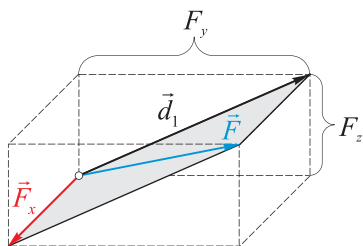
Sastavljanje četiriju i više prostornih sila u rezultantu najbolje je prikazati tzv. prostornim poligonom sila (slika 1.3.). Način stvaranja prostornog poligona sila analogan je ravninskopoligonu. Na kraj prve prostorne sile nanosi se početak druge sile u prostoru i tako do zadnje. Spajanjem početka prve i kraja zadnje nanesene sile dobivamo novu prostornu silu koja predstavlja rezultantu ukupnog sustava sila. Bitno je napomenuti da redoslijed nanošenja sila ni u prostornom sustavu nije bitan za točno dobivanje iznosa i položaja rezultantne sile.

1.2. Rastavljanje prostorne sile na komponente

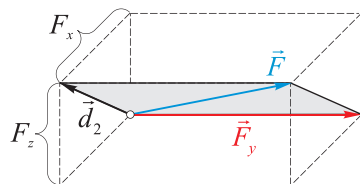
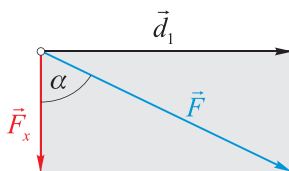
Kako se prostor može opisati troosnim koordinatnim sustavom, tako i svaku silu koja djeluje u prostoru možemo rastaviti na tri komponente usmjerene po osima trodimenzionalnog koordinatnog sustava, kako je prikazano na slici 1.4. Komponente sile $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$ i $\vec{F}_z$ čine stranice prizme čija je prostorna dijagonala sila $\vec{F}$. Sila $\vec{F}$ s osi x zatvara kut α , s osi y kut β , a s osi z kut γ .

Ako položimo ravninu kroz pravce osi x i sile $\vec{F}$, presjek s prizmom činit će pravokutnik čije su stranice F_x i ravninska dijagonala d_1 pravokutnika stranica F_y i F_z (slika 1.5.a). Dijagonala pravokutnika nastalog presijecanjem prizme bit će upravo sila $\vec{F}$ koja sa stranicom F_x zatvara kut α . Iz trigonometrijskih odnosa dobivamo da je $\cos \alpha = \frac{F_x}{F}$, iz čega slijedi iznos komponente $\vec{F}_x$:

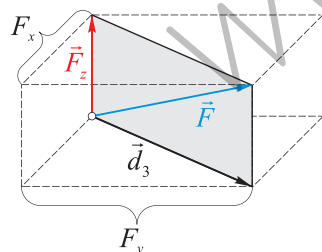
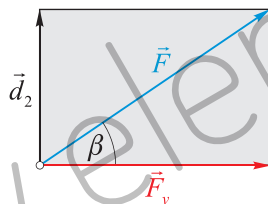
$$F_x = F \cdot \cos \alpha.$$



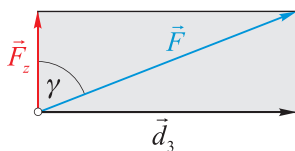
Slika 1.5.a)

Prikaz $\vec{F}_x$ komponente sile $\vec{F}$ 

Slika 1.5.b)

Prikaz $\vec{F}_y$ komponente sile $\vec{F}$ 

Slika 1.5.c)

Prikaz $\vec{F}_z$ komponente sile $\vec{F}$ 

Na ist način možemo dobiti iznose komponenti F_y i F_z .

Ako presijecemo prizmu ravninom koja prolazi pravcima $\vec{F}$ i osi y , dobit ćemo pravokutnik stranica F_y i dijagonale d_2 pravokutnika stranica F_x i F_z (slika 1.5.b). Dijagonala pravokutnika nastalog presijecanjem ravnine i prizme jest sila $\vec{F}$ koja sa stranicom F_y zatvara kut β . Iz trigonometrijskih odnosa dobivamo da je $\cos \beta = \frac{F_y}{F}$, odnosno:

$$F_y = F \cdot \cos \beta.$$

I na kraju, ako prizmu presijecemo ravninom koja prolazi pravcima sile $\vec{F}$ i osi z , dobit ćemo pravokutnik čije su stranice F_z i ravninska dijagonala pravokutnika stranica F_x i F_y (slika 1.5.c). U pravokutniku nastalom ovakvim presjekom sila $\vec{F}$ jest dijagonala koja sa stranicom F_z zatvara kut γ . Ponovno, iz trigonometrijskih funkcija dobivamo da je $\cos \gamma = \frac{F_z}{F}$, odnosno:

$$F_z = F \cdot \cos \gamma.$$

1.3. Metode izračunavanja rezultantne sile

Do iznosa i položaja rezultante prostornog sustava sila moguće je doći analitičkim i grafičkim putem. Zbog prevladanosti grafičkih metoda, a i zbog jasnijeg i lakšeg shvaćanja ovih sadržaja ovdje ćemo pokazati samo analitičku metodu izračunavanja iznosa i položaja rezultantne sile.

Za prostorni sustav triju sila prema slici 1.6. postaviti ćemo ishodište u hvatište sila. Sila $\vec{F}_1$ s osi x zatvara kut α_1 , s osi y kut β_1 , a s osi z kut γ_1 . Na ist način je sila $\vec{F}_2$ određena kutovima α_2 , β_2 i γ_2 , dok je sila $\vec{F}_3$ određena kutovima α_3 , β_3 i γ_3 .

Prema prikazanom načinu rastavljanja prostorne sile na tri komponente, sve tri sile ćemo rastaviti na taj način.

Možemo pisati:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \cos \beta_1$$

$$F_{1z} = F_1 \cdot \cos \gamma_1$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha_2$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \cos \beta_2$$

$$F_{2z} = F_2 \cdot \cos \gamma_2$$

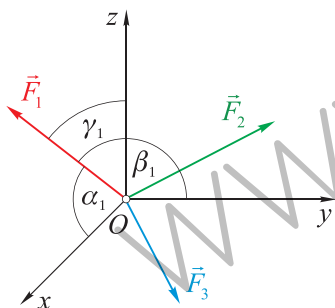
$$F_{3x} = F_3 \cdot \cos \alpha_3$$

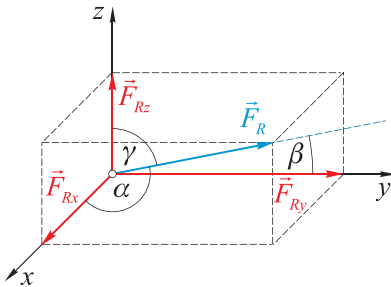
$$F_{3y} = F_3 \cdot \cos \beta_3$$

$$F_{3z} = F_3 \cdot \cos \gamma_3.$$

Slika 1.6.

Prostorni sustav sila istog hvatišta





Slika 1.7.

Rezultantna sila prostornog sustava sila istog hvatišta

Pošto se komponente $\vec{F}_{1x}$, $\vec{F}_{2x}$ i $\vec{F}_{3x}$ nalaze na istoj osi, možemo ih algebarski zbrojiti u jednu komponentu F_{Rx} , odnosno:

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}.$$

Na isti način možemo dobiti da je:

$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}, \text{ odnosno } F_{Rz} = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z}.$$

Na ovaj način smo izračunali komponente ukupne rezultantne sile $\vec{F}_R$.

Ujedno, sila $\vec{F}_R$ predstavlja prostornu dijagonalu prizme čije stranice imaju iznos komponenta $\vec{F}_{Rx}$, $\vec{F}_{Ry}$ i $\vec{F}_{Rz}$ (slika 1.7.).

Iznos rezultantne sile $\vec{F}_R$ je:

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2 + F_{Rz}^2}.$$

Ako s α , β i γ označimo kutove koje rezultantna sila F_R zatvara s koordinatnim osima, dobivamo njezin pravac pomoću relacija:

$$\cos \alpha = \frac{F_{Rx}}{F_R}, \quad \cos \beta = \frac{F_{Ry}}{F_R}, \quad \cos \gamma = \frac{F_{Rz}}{F_R}.$$

1.4. Ravnoteža sila u prostoru istog hvatišta

S obzirom da govorimo o silama koje imaju zajedničko hvatište, uvjet njihove ravnoteže jest da je rezultantna sila jednaka nuli, odnosno:

$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2 + F_{Rz}^2} = 0$. Kako bi ovaj uvjet bio zadovoljen, sve komponente rezultantne sile moraju biti nula.

Ravnoteža prostornih sila istog hvatišta određuje se s tri jednadžbe:

1. $\sum_{i=1}^n F_{xi} = 0$, zbroj projekcija svih sila na os x mora biti jednak nuli;
2. $\sum_{i=1}^n F_{yi} = 0$, zbroj projekcija svih sila na os y mora biti jednak nuli;
3. $\sum_{i=1}^n F_{zi} = 0$, zbroj projekcija svih sila na os z mora biti jednak nuli.

Primjer 1.

Rastavite silu $\vec{F}$ po osima koordinatnog sustava ako ona s njihovim pozitivnim usmjerenjima zatvara kutove α , β i γ .

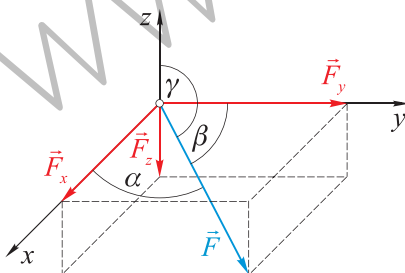
Zadano:

$$F = 580 \text{ N}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\beta = 50^\circ$$

$$\gamma = 250^\circ$$



Rješenje:

$$F_x = F \cdot \cos \alpha = 580 \cdot \cos 30^\circ = 580 \cdot 0,8660 = 502,28 \text{ N}$$

$$F_y = F \cdot \cos \beta = 580 \cdot \cos 50^\circ = 580 \cdot 0,6428 = 372,82 \text{ N}$$

$$F_z = F \cdot \cos \gamma = 580 \cdot \cos 250^\circ = 580 \cdot (-0,3420) = -198,37 \text{ N}.$$

Primjer 2.

Čelična alka uzidana u pod prostori je zategnuta je pomoću užadi sa silama $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$. Sile su prostorne i s pozitivnim osima koordinatnog sustava zatvaraju zadane kutove ($F_1 \rightarrow \alpha_1, \beta_1$ i γ_1 , $F_2 \rightarrow \alpha_2, \beta_2$ i γ_2 , $F_3 \rightarrow \alpha_3, \beta_3$ i γ_3).

Potrebno je izračunati iznos i položaj rezultantne sile zatezanja alke.

Zadano:

$$F_1 = 500 \text{ N}$$

$$\alpha_1 = 160^\circ$$

$$\beta_1 = 70^\circ$$

$$\gamma_1 = 55^\circ$$

$$F_2 = 300 \text{ N}$$

$$\alpha_2 = 150^\circ$$

$$\beta_2 = 115^\circ$$

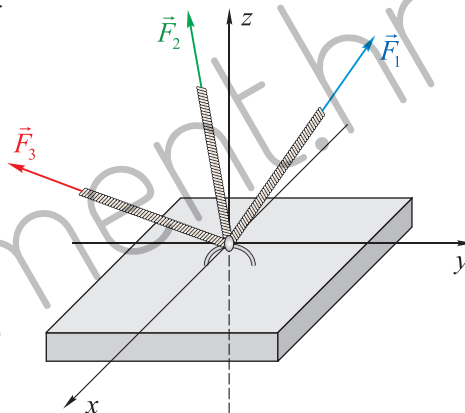
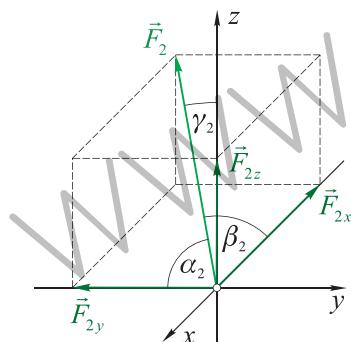
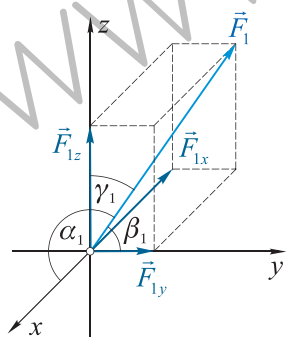
$$\gamma_2 = 70^\circ$$

$$F_3 = 900 \text{ N}$$

$$\alpha_3 = 70^\circ$$

$$\beta_3 = 220^\circ$$

$$\gamma_3 = 45^\circ$$



Rješenje:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 500 \cdot \cos 160^\circ = 500 \cdot (-0,9397) = -502,28 \text{ N}$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \cos \beta_1 = 500 \cdot \cos 70^\circ = 500 \cdot 0,3420 = 171,01 \text{ N}$$

$$F_{1z} = F_1 \cdot \cos \gamma_1 = 500 \cdot \cos 55^\circ = 500 \cdot 0,5736 = 286,79 \text{ N.}$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 300 \cdot \cos 150^\circ = 300 \cdot (-0,8660) = -259,81 \text{ N}$$

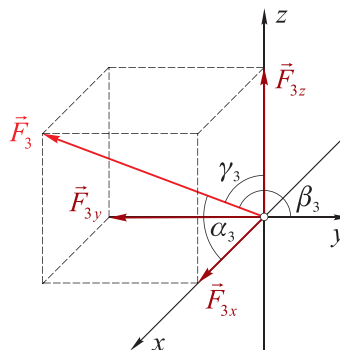
$$F_{2y} = F_2 \cdot \cos \beta_2 = 300 \cdot \cos 115^\circ = 300 \cdot (-0,4226) = -126,79 \text{ N}$$

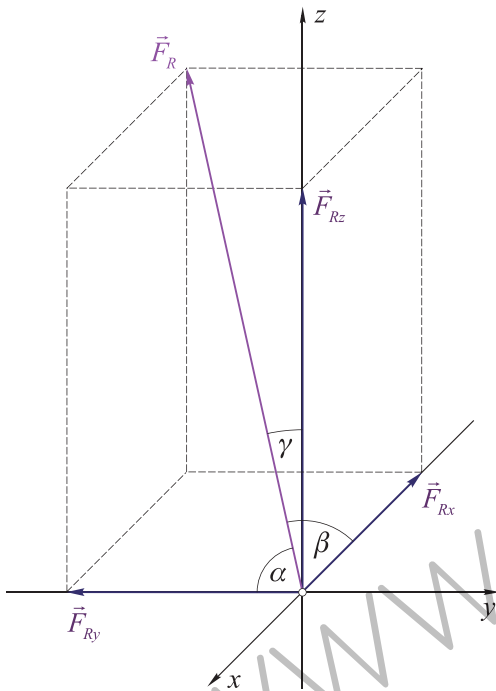
$$F_{2z} = F_2 \cdot \cos \gamma_2 = 300 \cdot \cos 70^\circ = 300 \cdot 0,3420 = 102,61 \text{ N.}$$

$$F_{3x} = F_3 \cdot \cos \alpha_3 = 900 \cdot \cos 70^\circ = 900 \cdot 0,3420 = 307,82 \text{ N}$$

$$F_{3y} = F_3 \cdot \cos \beta_3 = 900 \cdot \cos 220^\circ = 900 \cdot (-0,7660) = -689,44 \text{ N}$$

$$F_{3z} = F_3 \cdot \cos \gamma_3 = 900 \cdot \cos 45^\circ = 900 \cdot 0,7071 = 636,40 \text{ N.}$$





$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = -469,85 - 259,81 + 307,82 = -421,84 \text{ N}$$

$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 171,01 - 126,79 - 689,44 = -645,17 \text{ N}$$

$$F_{Rz} = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} = 286,79 + 102,61 + 636,40 = 1\,025,75 \text{ N}$$

Iznos rezultantne sile:

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2 + F_{Rz}^2} = \sqrt{(-421,84)^2 + (-645,17)^2 + 1\,025,75^2}$$

$$F_R = 1\,283,10 \text{ N}$$

Položaj rezultantne sile u prostoru određen je kutovima koje zatvara s pozitivnim osima koordinatnog sustava:

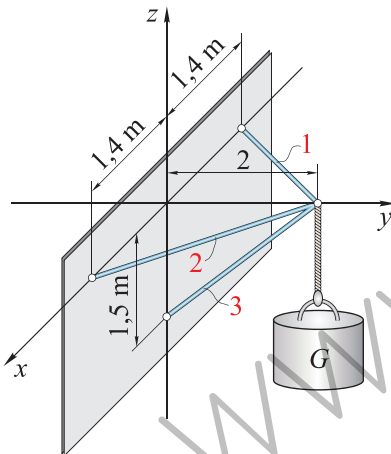
$$\alpha = \arccos \frac{F_{Rx}}{F_R} = \arccos \frac{-421,84}{1\,283,10} = 109,19^\circ$$

$$\beta = \arccos \frac{F_{Ry}}{F_R} = \arccos \frac{-645,17}{1\,283,10} = 120,19^\circ$$

$$\gamma = \arccos \frac{F_{Rz}}{F_R} = \arccos \frac{1\,025,75}{1\,283,10} = 36,92^\circ$$

Primjer 3.

Prema slici, tri zglobno vezana štapa pridržavaju teret od 30 kN. Potrebno je izračunati sile u štapovima 1, 2 i 3.



Rješenje:

Zadatak ćemo riješiti iz uvjeta ravnoteže čvora.

Poznato nam je da sile u štapovima djeluju na pravcu štapa. Iz podataka sa slike izrazit ćemo prostorne komponente pojedinih sila u štapovima.

Štap 1:

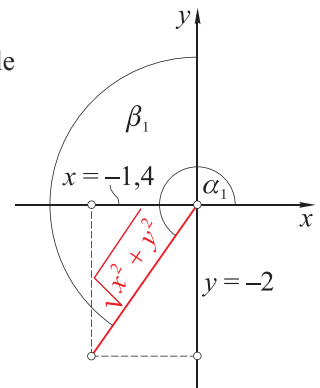
Vidljivo je da je štap 1 smješten u ravnini x-y.

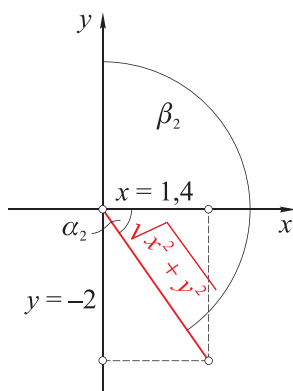
Kako je sila u štapu na pravcu štapa, kutove sile ćemo dobiti iz kota položaja štapa:

$$\cos \alpha_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-1,4}{\sqrt{(-1,4)^2 + (-2)^2}} = -0,5735$$

$$\cos \beta_1 = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-2}{\sqrt{(-1,4)^2 + (-2)^2}} = -0,8333$$

$$\cos \gamma_1 = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{0}{\sqrt{(-1,4)^2 + (-2)^2}} = 0$$





Iz ovoga slijedi iznos prostornih komponenti sile u štapu 1:

$$S_{1x} = S_1 \cdot \cos \alpha_1 = -0,5735 \cdot S_1$$

$$S_{1y} = S_1 \cdot \cos \beta_1 = -0,8333 \cdot S_1$$

$$S_{1z} = S_1 \cdot \cos \gamma_1 = 0.$$

Štap 2:

Štap 2 je također smješten u ravnini x - y :

$$\cos \alpha_2 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1,4}{\sqrt{(1,4)^2 + (-2)^2}} = 0,5735$$

$$\cos \beta_2 = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-2}{\sqrt{(1,4)^2 + (-2)^2}} = -0,8333$$

$$\cos \gamma_2 = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{0}{\sqrt{(1,4)^2 + (-2)^2}} = 0.$$

Iz ovoga slijedi iznos prostornih komponenti sile u štapu 2:

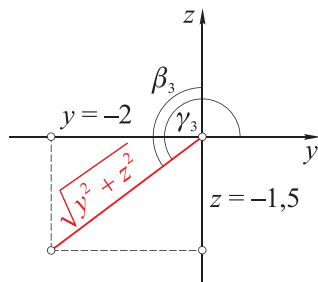
$$S_{2x} = S_2 \cdot \cos \alpha_2 = 0,5735 \cdot S_2$$

$$S_{2y} = S_2 \cdot \cos \beta_2 = -0,8333 \cdot S_2$$

$$S_{2z} = S_2 \cdot \cos \gamma_2 = 0.$$

Štap 3:

Štap 3 je smješten u ravnini y - z :



$$\cos \alpha_3 = \frac{x}{\sqrt{z^2 + y^2}} = \frac{0}{\sqrt{(-1,5)^2 + (-2)^2}} = 0$$

$$\cos \beta_3 = \frac{y}{\sqrt{z^2 + y^2}} = \frac{-2}{\sqrt{(-1,5)^2 + (-2)^2}} = -0,8$$

$$\cos \gamma_3 = \frac{z}{\sqrt{z^2 + y^2}} = \frac{-1,5}{\sqrt{(-1,5)^2 + (-2)^2}} = -0,6.$$

Iz ovoga slijedi iznos prostornih komponenti sile u štapu 3:

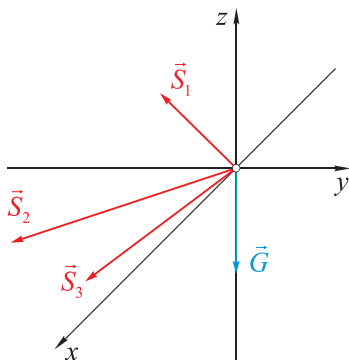
$$S_{3x} = S_3 \cdot \cos \alpha_3 = 0$$

$$S_{3y} = S_3 \cdot \cos \beta_3 = -0,8 \cdot S_3$$

$$S_{3z} = S_3 \cdot \cos \gamma_3 = -0,6 \cdot S_3.$$

Težina G je usmjerena po osi z , pa su njezine komponente G_x i G_y jednake nuli.

Postavit ćemo uvjete ravnoteže čvora (pretpostavit ćemo da svi štapovi vuku čvor prema njihovom učvršćenju, odnosno da su vlačno opterećeni):



$$\sum F_x = 0$$

$$S_{1x} + S_{2x} + S_{3x} + G_x = 0$$

$$-0,5735 \cdot S_1 + 0,5735 \cdot S_2 + 0 + 0 = 0$$

$$S_1 = S_2.$$

$$\sum F_y = 0$$

$$S_{1y} + S_{2y} + S_{3y} + G_y = 0$$

$$-0,8333 \cdot S_1 - 0,8333 \cdot S_2 - 0,8 \cdot S_3 + 0 = 0.$$

Kako je $S_1 = S_2$, možemo pisati: $2 \cdot (-0,8333 \cdot S_1) - 0,8 \cdot S_3 = 0$, odnosno:

$$S_1 = \frac{0,8}{-1,6667} \cdot S_3 = -0,48 \cdot S_3.$$

$$\sum F_z = 0$$

$$S_{1z} + S_{2z} + S_{3z} + G_z = 0$$

$$0 + 0 - 0,6 \cdot S_3 - 30 = 0$$

$$-0,6 \cdot S_3 = 30$$

$$S_3 = \frac{30}{-0,6} = -50 \text{ kN}.$$

Predznak (-) govori da je štap 3 opterećen tlačno.

$$S_1 = S_2 = -0,48 \cdot (-50) = 24 \text{ kN}.$$

Štapovi 1 i 2 su opterećeni vlačno, što potvrđuje pozitivni predznak ispred rezultata.

Pitanja za ponavljanje:.....

1. Objasnite pravilo paralelepipeda kod sastavljanja tri sile istog hvatišta u prostoru.
2. Skicirajte i napišite izraze za komponente prostorne sile prikazujući ih kao stranice prizme.
3. Na koji način možemo prikazivati načine zbrajanja prostornih sila istog hvatišta?
4. Objasnite analitički postupak zbrajanja prostornih sila zajedničkog hvatišta.
5. Što predstavlja rezultatnu silu prostornog sustava zajedničkog hvatišta?
6. S koliko jednadžbi se opisuje ravnoteža prostornog sustava sila istog hvatišta? Napišite te jednadžbe.

2

Kinematika

Ključni pojmovi

kinematika
pravocrtno gibanje
krivocrtno gibanje
jednoliko kružno gibanje
translacija i rotacija
sferno gibanje
sastavljeno gibanje
slobodno gibanje
složeno gibanje
remeni mehanizam
tarni mehanizam
zupčasti mehanizam
planetarni mehanizam
klipni i kulisni mehanizam
prijenosni omjeri
kinematika mehanizama

Ciljevi

- Upoznati se s pojmom kinematike
- Ovladati pojmovima i zakonitostima pravocrtnog gibanja
- Moći rješavati jednostavnije zadatke iz pravocrtnog gibanja
- Ovladati pojmovima i zakonitostima krivocrtnog gibanja
- Moći rješavati jednostavnije zadatke iz krivocrtnog gibanja
- Ovladati pojmovima translacije i rotacije tijela
- Ovladati pojmom ravninskog gibanja
- Moći rješavati jednostavnije probleme ravninskog gibanja
- Ovladati pojmovima sastavljenog gibanja
- Ovladati pojmovima mehanizma i stroja
- Znati postaviti i izračunati prijenosne omjere remenskog, zupčastog, tarnog i planetarnog mehanizma
- Ovladati pojmom klipnog mehanizma
- Upoznati se s kinematikom klipnog mehanizma
- Upoznati se s pojmom kulisnog mehanizma
- Moći postaviti kinematičke zakonitosti za jednostavne kulisne mehanizme



Slika 2.1.

U našoj se okolini ljudi, životinje i predmeti gibaju različitim brzinama

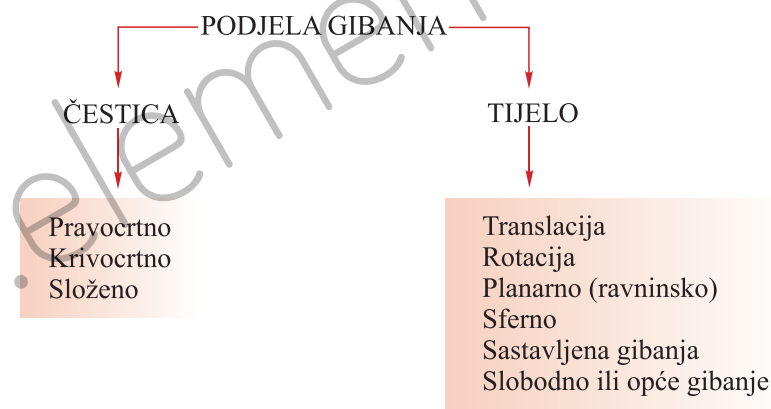
Promatrajući svoju okolinu uočavamo da se ljudi, životinje, rijeke i brojni predmeti pomiču. Neki se gibaju sporije (puž), neki brže (pješači), dok se automobili i zrakoplovi gibaju mnogo brže (slika 2.1.). Automobili se gibaju po ravnoj cesti ili po zavojima, ljudi i životinje po različitim zakrivljenim stazama. Sva ta gibanja proučavaju kinematika i dinamika.

U ovim osnovama kinematike i dinamike proučavati će se većinom kruta tijela.

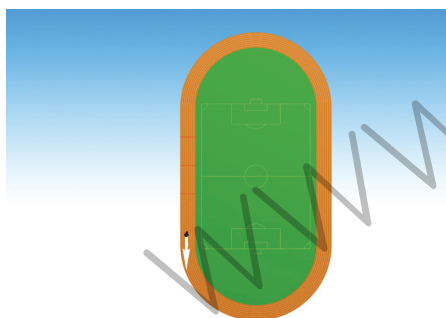
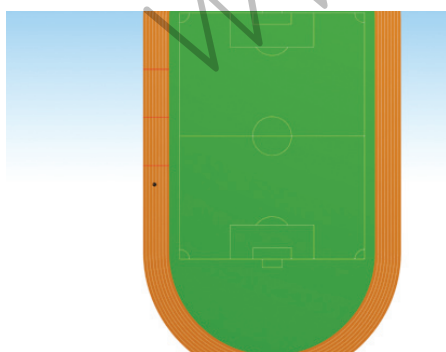
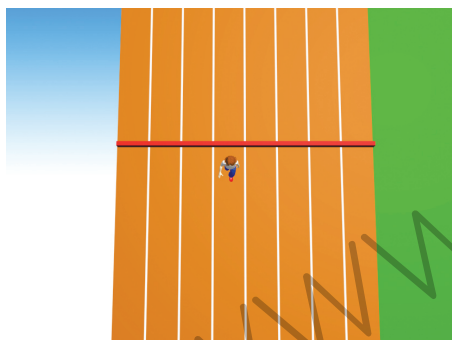
2.1. Uvod

U sljedeća dva poglavlja će se obrađivati kinematika i dinamika. Ovi dijelovi mehanike bave se gibanjem. **Gibanje je promjena položaja prema nepomičnoj okolini.** U svemiru je nemoguće definirati nepomičnu okolinu. Zbog toga se gibanje proučava u odnosu na neko tijelo koje se u svemiru ipak giba. Takvo se tijelo naziva referentno tijelo. U izučavanju kinematike i dinamike u ovom će se udžbeniku uzeti da je nepomična okolina površina planeta Zemlje.

Pri proučavanju gibanja potrebno je poznavati podjelu gibanja. U osnovi se gibanje dijeli na gibanje materijalne točke (čestice) i tijela. Ako su dimenzije tijela malene u odnosu na promatrano gibanje, možemo ih zanemariti. Time smo tijelo sveli na 'veličinu' materijalne točke - čestice. Zadatke s česticom lakše je rješavati nego zadatke s tijelom pa, kad je to moguće, gibanje tijela zamjenjujemo gibanjem čestice.



Noću na nebu vidimo tisuće svjetlećih točkica. To su zvijezde - nebeska tijela nezamislivo velikih dimenzija i masa. No, zbog njihove velike udaljenosti vidimo ih kao točke i njihova gibanja možemo proučavati koristeći formule za gibanje čestica.



Slika 2.2.

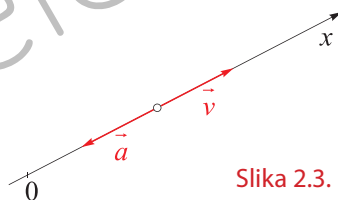
Udaljavanjem od atletičara, vidimo ga sve manjim

Na slici 2.2. vidimo trening atletičara. Udaljavanjem od njega on postaje sve manji i na kraju ga vidimo ‘veličine’ točke. Iako mu je masa ostala ista, sad ga možemo promatrati kao česticu.

Kinematika je dio mehanike koji proučava gibanja neovisno o uzrocima. Na temelju poznavanja gibanja jedne točke na tijelu ili jednog tijela u sustavu, određuje se gibanje drugih točaka ili tijela. Također, poznavajući brzinu i ubrzanje u nekom trenutku mogu se odrediti brzina i ubrzanje u bilo kojem trenutku. Zbog toga se može reći da kinematika proučava geometriju gibanja.

2.2. Pravocrtno gibanje

Pravocrtno gibanje je gibanje po pravcu. Kod tog su gibanja vektori brzine i ubrzanja na pravcu gibanja (slika 2.3.).



Slika 2.3.

Pravocrtno gibanje

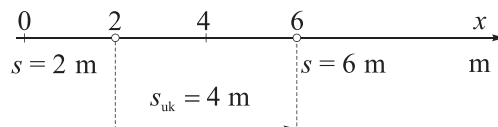
Ubrzanje je promjena brzine u vremenu.

Brzina je promjena položaja u vremenu.

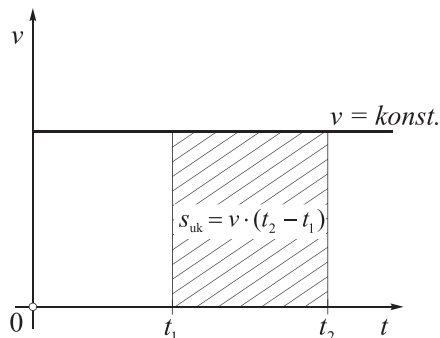
Ako su vektori brzine i ubrzanja jednako usmjereni, tada se brzina povećava. U slučaju suprotne usmjerenosti vektora brzine i ubrzanja, brzina se smanjuje i tada se radi o usporavanju.

Kod pravocrtnog je gibanja važno razlikovati položaj od prevaljenog puta. S obzirom da se pravocrtno gibanje proučava u odnosu na pravac po kojemu se čestica giba, položaj je mjesto gdje se čestica nalazi u nekom trenutku.

Primjerice, ako čestica miruje na pravcu u položaju 2 m, onda je položaj $s = 2$ m, a prevaljeni je put $s_{uk} = 0$. Ili, ako čestica počinje gibanje iz položaja 2 m i dođe u položaj 6 m, onda je prevalila put od 4 m.

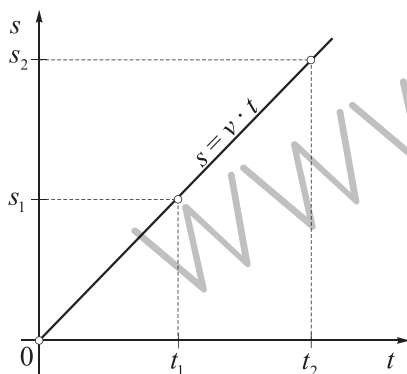


Položaj i prevaljeni put su jednaki samo ako je gibanje počelo iz ishodišta (za $t = 0$; $s = 0$) i ako je brzina uvijek: $v \geq 0$.



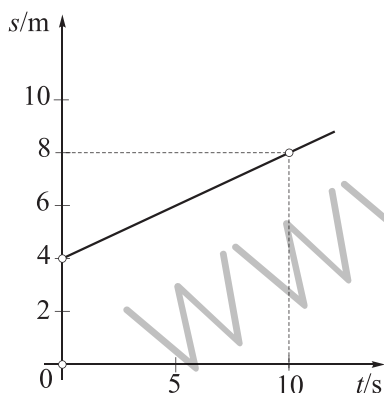
Slika 2.4.

Grafički prikaz ovisnosti brzine o vremenu



Slika 2.5.

Grafički prikaz ovisnosti položaja o vremenu



Slika 2.6.

Gibanje iz položaja $s = 4$ m

2.2.1. Jednoliko pravocrtno gibanje

Jednoliko pravocrtno gibanje je gibanje po pravcu kod kojeg je brzina stalno jednaka, tj. konstantna:

$$v = \text{konst.}$$

Brzina je definirana kao promjena položaja u nekom vremenskom intervalu:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

gdje je:

Δs - promjena položaja, m

Δt - vremenski interval, s.

Kod jednolikog pravocrtnog gibanja omjer promjene položaja u odgovarajućem vremenskom intervalu je stalno jednak. Može se reći da čestica u jednakim vremenskim intervalima prevađuje jednake putove.

Za jednoliko pravocrtno gibanje vrijedi formula:

$v = \frac{s}{t}$, odnosno $s = v \cdot t$. Mjerna jedinica za mjerenje brzine u SI sustavu je $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Još se koriste jedinice $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$, $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ i druge.

Grafički prikaz ovisnosti brzine o vremenu prikazan je na slici 2.4., a ovisnost položaja o vremenu na slici 2.5.

Iz slika 2.4. i 2.5. je vidljivo da je površina ispod dijagrama $v = v(t)$ jednaka prevađenom putu od trenutka t_1 do t_2 :

$$s_{\text{uk}} = v \cdot (t_2 - t_1) = v \cdot t_2 - v \cdot t_1 = s_2 - s_1.$$

U svakoj točki dijagrama $s = s(t)$ (slika 2.5.) nagib pravca je jednak:

$$\frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2} = v.$$

Na slici 2.6. prikazan je dijagram $s = s(t)$ kada gibanje počinje iz položaja $s = 4$ m.

Nakon deset sekundi gibanja položaj je $s = s(10) = 8$ m, a prevađeni put do tog trenutka je $s_{\text{uk}} = 8 - 4 = 4$ m.

Primjer 1.

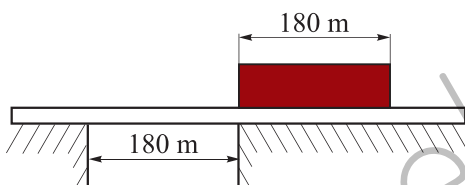
Koliko je sekundi opterećen most dugačak 180 m ako preko njega prelazi vlak dugačak 180 m, brzinom od $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?

Zadano:

$$v = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 80 \cdot \frac{1\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = 22,22 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$s = 360 \text{ m}$$

$$t = ?$$



Rješenje:

$$v = \frac{s}{t}$$

$$t = \frac{s}{v} = \frac{360}{22,22} = 16,2 \text{ s.}$$

Most je opterećen od trenutka kad lokomotiva stupi na njega pa sve dok posljednji vagon ne siđe s mosta. Za to vrijeme svaki vagon, pa i cijeli vlak, prijeđe put $180 + 180 = 360 \text{ m}$.

2.2.2. Jednoliko ubrzano i usporeno gibanje

Ako gibanje nije jednoliko konstantnom brzinom, onda se brzina mijenja u vremenu, pa postoji njezina promjena, tj. akceleracija. Srednja akceleracija na nekom vremenskom intervalu je:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Ako je omjer promjene brzine u određenom vremenskom intervalu stalno jednak, onda se radi o gibanju konstantnom akceleracijom:

$$a = \text{konst.}$$

Akceleracija može biti pozitivna, pa je gibanje jednoliko ubrzano. Jednoliko usporeno gibanje se pojavljuje kad je akceleracija negativna. Kod jednolikog gibanja konstantnom brzinom akceleracije nema, $a = 0$.

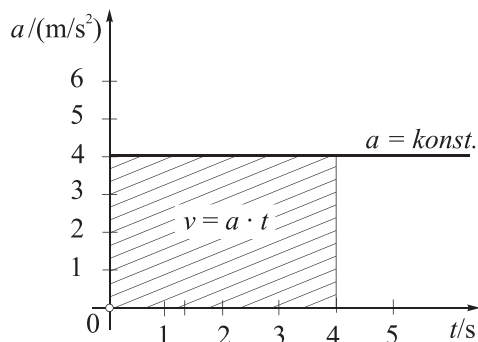
Mjerna jedinica za akceleraciju u SI sustavu je $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Osnovne formule za pravocrtno gibanje konstantnom akceleracijom su sljedeće:

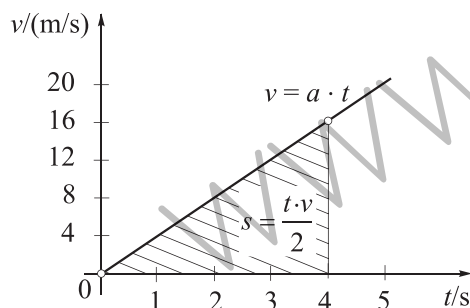
$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

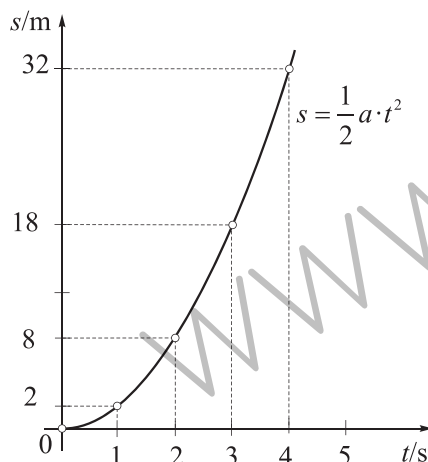
v_0 je početna brzina (u trenutku $t = 0$). v je konačna brzina nakon proteklog vremena t . s_0 je početni položaj (u trenutku $t = 0$). Kad u zadatku nije drukčije zadano, za početni položaj se uzima $s_0 = 0$, tj. gibanje počinje iz ishodišta. Akceleracija se uvrštava s pozitivnim predznakom ako je gibanje ubrzano, a s negativnim ako je usporeno.

**Slika 2.7.**

Površina ispod dijagrama $a[t]$ odgovara brzini u nekom trenutku

**Slika 2.8.**

Površina ispod dijagrama $v[t]$ odgovara prevođenom putu u nekom vremenu

**Slika 2.9.**

Krivulja ovisnosti položaja o vremenu

Ako gibanje počinje iz stanja mirovanja ($v_0 = 0$) i iz ishodišta ($s_0 = 0$), vrijede sljedeće četiri formule:

$$a = \frac{v}{t}, \quad s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2, \quad v^2 = 2 \cdot a \cdot s, \quad s = \frac{v \cdot t}{2}.$$

Na slikama 2.7., 2.8. i 2.9. prikazani su dijagrami ovisnosti akceleracije, brzine i položaja o vremenu za jednoliko ubrzano gibanje, uz početne uvjete:

za $t = 0$, $s_0 = 0$, $v_0 = 0$. Uz ove uvjete je $s = s_{\text{uk}}$.

Površina ispod dijagrama $a = a(t)$ (slika 2.7.) odgovara brzini u nekom trenutku.

Površina ispod dijagrama $v = v(t)$ (slika 2.8.) u ovom slučaju odgovara ukupnom prevođenom putu do nekog trenutka:

$$s = \frac{t \cdot v}{2},$$

a kako je

$$v = a \cdot t,$$

slijedi:

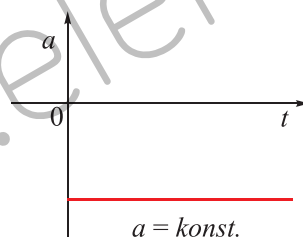
$$s = \frac{t \cdot a \cdot t}{2},$$

odnosno

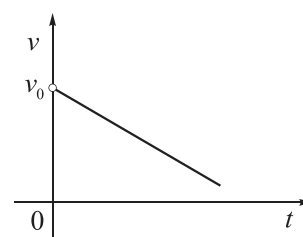
$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Krivulja ovisnosti položaja o vremenu (slika 2.9.) je parabola 2. reda (kvadratna parabola).

Ako se radi o jednoliko usporenom gibanju, akceleracija je negativna (slika 2.10.), a brzina se smanjuje (slika 2.11.).

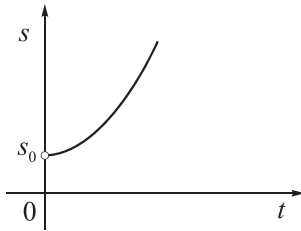
**Slika 2.10.**

Pri jednoliko usporenom gibanju akceleracija je negativna

**Slika 2.11.**

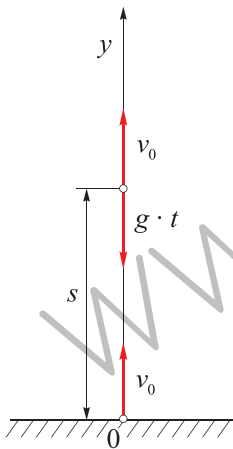
Pri jednoliko usporenom gibanju brzina se smanjuje

Ako jednoliko ubrzano gibanje počinje iz stanja mirovanja ($v_0 = 0$) i iz početnog položaja s_0 , dijagram $s = s(t)$ izgleda ovako (slika 2.12.):



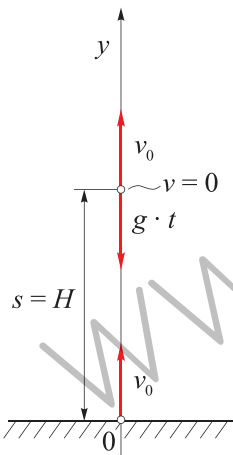
Slika 2.12.

Jednoliko ubrzano gibanje iz početnog položaja s_0



Slika 2.13.

Vertikalni hitac uvis



Slika 2.14.

U najvišoj se točki ($s = H$) tijelo zaustavi ($v = 0$)

Srednja brzina kod gibanja konstantnom akceleracijom računa se na sljedeći način:

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2},$$

gdje su v_1 i v_2 početna i konačna brzina.

2.2.2.1. Slobodni pad

Slobodni pad je jednoliko ubrzano gibanje u polju gravitacijske sile teže.

Pritom se otpor zraka zanemaruje. Na Zemlji ubrzanje slobodnog pada prosječno iznosi oko $a = g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Ako je početna brzina

jednaka nuli ($v_0 = 0$), a tijelo pada s visine $s = h$, dobiju se sljedeće formule:

$$g = \frac{v}{t}, \quad h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2, \quad v^2 = 2 \cdot g \cdot h, \quad h = \frac{v \cdot t}{2}.$$

Ovdje je v brzina u trenutku pada na Zemlju, a t vrijeme padanja.

2.2.3. Vertikalni hitac uvis

Vertikalni hitac uvis je pravocrtno gibanje koje se sastoji od jednolikog gibanja prema gore početnom brzinom v_0 i slobodnog pada.

Ako se otpor zraka zanemari, u općem se položaju brzina sastoji od dviju komponenti (slika 2.13.):

$$v = v_0 - g \cdot t.$$

Položaj se izračuna prema formuli: $s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$.

Dok je $v_0 > g \cdot t$, brzina je pozitivna i tijelo se giba prema gore. U najvišoj točki ($s = H$) se tijelo taj tren zaustavi ($v = 0$), pa je $v_0 = g \cdot t$ (slika 2.14.).

Ako se $t = \frac{v_0}{g}$ uvrsti u $s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ za $s = H$:

$$H = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{v_0^2}{g^2},$$

dobije se najveći domet (visina) do kojeg tijelo dostigne:

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g}.$$

Nakon što dostigne najvišu točku, tijelu za slobodni pad treba jednako vremena koliko mu je trebalo do najviše točke.

Nakon pada tijela natrag na Zemlju, prema slici 2.14., ono se nalazi u položaju $s = 0$, a ukupni prevaljeni put je $s_{\text{uk}} = 2 \cdot H$.