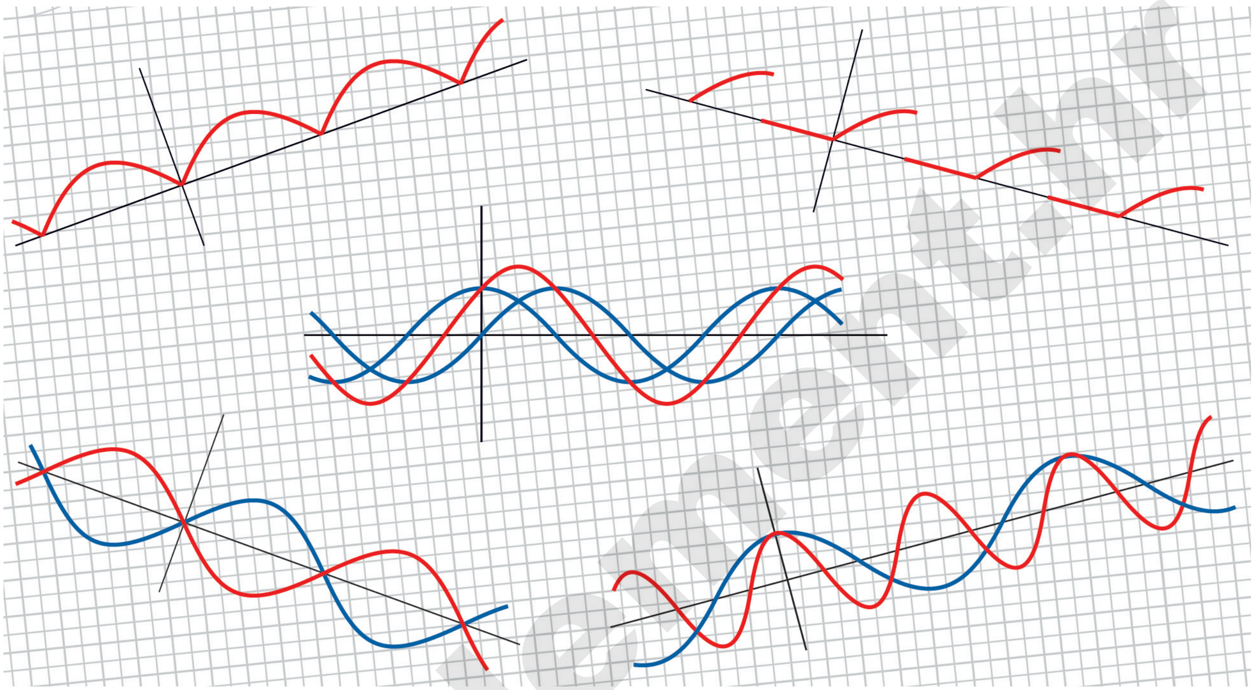
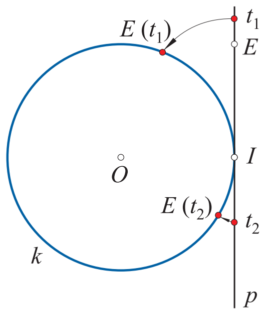


1. Trigonometrijske funkcije realnog broja

1.1. Brojevna kružnica



namatanje pravca na kružnicu

Neka je k kružnica središta O i polumjera $r = 1$, a točka I neka je točka kružnice k.

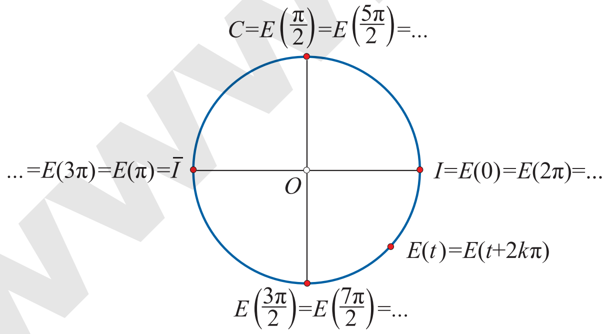
Uočimo brojevni pravac p koji dira kružnicu k u točki I koja je ujedno i ishodišna točka pravca p. Neka je jedinična dužina $\overline{IE}$ brojevnog pravca p jednaka polumjeru kružnice k, pri čemu je točka E postavljena tako da ako se krećemo od točke O do točke E preko I, gibanje ima pozitivan smjer, tj. smjer suprotan od smjera gibanja kazaljke na satu.

Pravac p namotajmo bez klizanja i rastezanja na kružnicu k tako da polupravac s pozitivnim brojevima namatamo u pozitivnom smjeru, a polupravac na kojemu su smješteni negativni brojevi u negativnom smjeru. Kako je svakom realnom broju pridružena točno jedna točka pravca p, ovim namatanjem smo svakom realnom broju pridružili točno jednu točku kružnice. Ovo pridruživanje zovemo **eksponencijalno preslikavanje** pravca na kružnicu i označavamo s E.

Brojevna kružnica

Kružnicu k zajedno s eksponencijalnim preslikavanjem $E : \mathbf{R} \to k$ nazivamo **brojevna** ili **trigonometrijska kružnica**.

Broju 0 pridružena je točka I. Kako je duljina jedinične kružnice jednaka 2π, broj 2π se opet preslikava u točku I. Dalje, broj 4π preslikava se u točku I.



Duljina jedinične polukružnice je π, pa se broj π preslikava u točku $\bar{I}$ (vidi sliku) koja je dijametralno suprotna točki I. Ali isto tako, i brojevi $3\pi = \pi + 2\pi$, $5\pi = \pi + 2 \cdot 2\pi \ldots$ također se preslikavaju u točku $\bar{I}$.

Četvrtina kružnice ima duljinu $\frac{\pi}{2}$, pa znači da se u točku C preslikava broj $\frac{\pi}{2}$, ali i brojevi $\frac{\pi}{2} + 2\pi$, $\frac{\pi}{2} + 4\pi \ldots$

Dakle,

$$I = E(0) = E(2\pi) = E(4\pi) = E(-2\pi) = \ldots, \quad \text{tj.} \quad I = E(2k\pi), \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$\bar{I} = E(\pi) = E(-\pi) = E(3\pi) = E(5\pi) = \ldots, \quad \text{tj.} \quad \bar{I} = E((2k+1)\pi), \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$C = E\left(\frac{\pi}{2}\right) = E\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = E\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi\right) = \ldots, \quad \text{tj.} \quad C = E\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Općenito možemo zaključiti da se svake dvije točke koje su na pravcu udaljene za 2π ili za višekratnik broja 2π namatanjem stope u jednu točku kružnice, tj. vrijedi

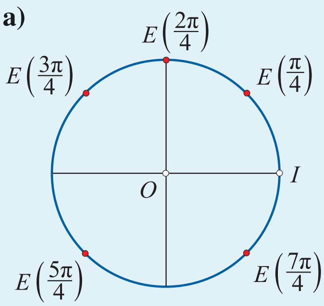
$$E(t+2k\pi)=E(t) \text{ za svaki } t \in \mathbf{R} \text{ i } k \in \mathbf{Z}.$$

PRIMJER 1.

Nacrtajmo $E(t)$ ako je t jednako:

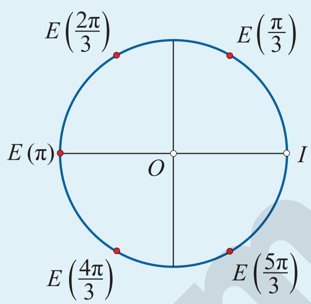
a) $\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **b)** $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **c)** $\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

a)



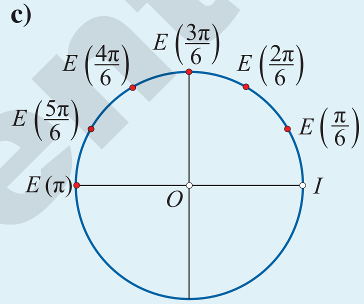
Četvrtina polukružnice ima duljinu $\frac{\pi}{4}$. Točke $E\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $E\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $E\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, $E\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ dijele četvrtine kružnice na jednake dijelove.

b)



Trećina polukružnice ima duljinu $\frac{\pi}{3}$. Točke $E\left(\frac{\pi}{3}\right)$ i $E\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ dijele gornju polukružnicu na tri jednaka dijela.

c)



Točke $E\left(\frac{\pi}{6}\right), \ldots, E\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ dijele gornju polukružnicu na šest jednakih dijelova.

PRIMJER 2.

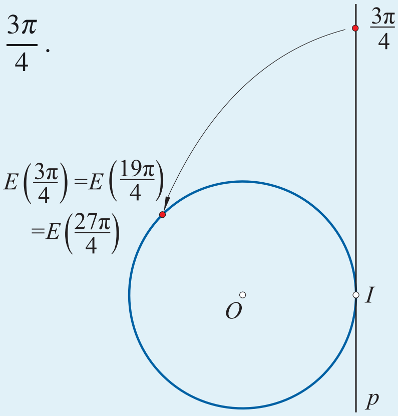
Za realni broj $t=\frac{19\pi}{4}$ nađimo brojeve $t_1 \in [0, 2\pi\rangle$, $t_2 \in [6\pi, 8\pi\rangle$, takve da vrijedi $E(t)=E(t_1)=E(t_2)$.

Kako je $\frac{19\pi}{4}=4\pi+\frac{3\pi}{4}$ i $\frac{3\pi}{4} \in [0, 2\pi\rangle$ slijedi da je $t_1=\frac{3\pi}{4}$.

Broj t_2 računamo ovako:

$$\begin{aligned}\frac{19\pi}{4} &= \left(4\pi+\frac{3\pi}{4}\right)-6\pi+6\pi\\ &= (4\pi-6\pi)+\left(6\pi+\frac{3\pi}{4}\right)\\ &= -2\pi+\frac{27\pi}{4}\end{aligned}$$

pa je $t_2=\frac{27\pi}{4} \in [6\pi, 8\pi\rangle$. Brojevi $\frac{19\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{27\pi}{4}$ preslikavaju se u istu točku trigonometrijske kružnice.



ZADATCI 1.1.

1. Na brojevnoj kružnici odredi točke $E(t)$ ako je t:

a π **b** 3π **c** 2005π **d** $-\pi$ **e** -5π **f** -2003π
g 2π **h** 8π **i** 1626π **j** -2π **k** -6π **l** -238π
k $\frac{\pi}{2}$ **l** $\frac{9\pi}{2}$ **m** $\frac{2005\pi}{2}$ **n** $-\frac{\pi}{2}$ **o** $-\frac{9\pi}{2}$ **p** $-\frac{2001\pi}{2}$.

2. Na brojevnoj kružnici odredi točke $E(t)$ ako je t:

a $\frac{\pi}{3}$ **b** $\frac{2\pi}{3}$ **c** $\frac{\pi}{5}$ **d** $\frac{21}{4}\pi$ **e** $-\frac{3\pi}{4}$
f $-\frac{171}{5}\pi$ **g** $-\frac{1998}{7}\pi$ **h** $-\frac{289}{3}\pi$ **i** $\frac{1999}{3}\pi$.

3. Na brojevnoj kružnici skiciraj položaj točke $E(t)$ ako je t:

a 1 **b** 12.65 **c** 16.785 **d** 1988 **e** -1
f -0.23 **g** -1103 **h** -30.28 **i** 6.72

pri čemu uzmi da je $\pi \approx 3.14159$.

4. Odredi $t \in [0, 2\pi\rangle$ takav da je $E(t) = E(x)$ ako je zadan x:

a 132π **b** 213π **c** -11π **d** -42π **e** $\frac{19\pi}{2}$ **f** $\frac{1999\pi}{2}$.

5. Odredi $t \in [0, 2\pi\rangle$ takav da je $E(t) = E(x)$ ako je zadan x:

a $\frac{121\pi}{3}$ **b** $\frac{1432\pi}{3}$ **c** $\frac{127\pi}{6}$ **d** $\frac{1546\pi}{5}$ **e** $-\frac{237\pi}{4}$ **f** $-\frac{37\pi}{10}$.

6. Odredi $t \in [0, 2\pi\rangle$ takav da je $E(t) = E(x)$ ako je zadan x:

a 16.28 **b** 32.14 **c** -10.31 **d** -8 **e** 101 **f** -7.51,

pri čemu uzmi da je $\pi \approx 3.14$.

7. Odredi $t \in [-2\pi, 0\rangle$ takav da je $E(t) = E(x)$ ako je zadan x:

a 13π **b** -1434π **c** $\frac{25\pi}{4}$ **d** $-\frac{1235\pi}{6}$ **e** $\frac{132\pi}{17}$ **f** $-\frac{218\pi}{25}$.

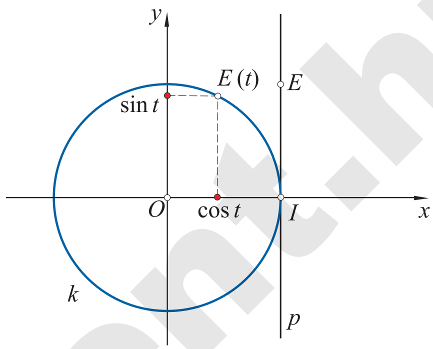
8. Odredi $t \in [10\pi, 12\pi\rangle$ takav da je $E(t) = E(x)$ ako je zadan x:

a $\frac{\pi}{4}$ **b** $\frac{3\pi}{4}$ **c** $-\frac{\pi}{2}$ **d** $\frac{32\pi}{3}$ **e** $\frac{25\pi}{6}$ **f** $-\frac{35\pi}{3}$.

1.2. Definicije trigonometrijskih funkcija

Funkcije sinus i kosinus

Brojevnu kružnicu $k(O, r = 1)$ smjestimo u koordinatni sustav u ravnini tako da se ishodište koordinatnog sustava podudara sa središtem O kružnice k, a os x neka se poklapa s pravcem OI.



Sada je brojevni pravac p paralelan s osi y, a njegove točke I i E imaju koordinate $(1, 0)$ i $(1, 1)$ redom. Kao što smo već opisali, realnom broju t pridružena je točka $E(t)$ kružnice k.

Kosinus i sinus realnog broja

Apscisa točke $E(t)$ naziva se **kosinus broja** t i označava se sa $\cos t$.

Ordinata točke $E(t)$ naziva se **sinus broja** t i označava se sa $\sin t$.

Funkcija koja broju t pridružuje broj $\cos t$ naziva se **kosinus** i označava se sa $\cos$, a funkcija koja broju t pridružuje broj $\sin t$ naziva se **sinus** i označava se sa $\sin$.

Funkcije kosinus i sinus definirane su na skupu $\mathbf{R}$, a kodomena im je $[-1, 1]$ jer su koordinate točke $E(t)$ brojevi ne veći od 1 po apsolutnoj vrijednosti.

Funkcije sinus i kosinus

$$\cos : \mathbf{R} \to [-1, 1] \qquad \sin : \mathbf{R} \to [-1, 1]$$
$$t \mapsto \cos t \qquad t \mapsto \sin t$$

PRIMJER 1.

Nacrtajmo točku $E(t)$ i izračunajmo sinus i kosinus od t ako je t:

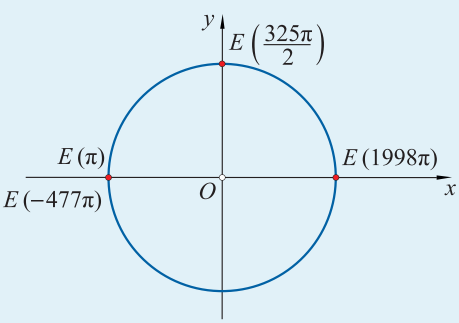
a) π **b)** 1998π **c)** -477π **d)** $\dfrac{325}{2}\pi$.

$\sin \pi = 0$, $\cos \pi = -1$

$\sin 1998\pi = 0$, $\cos 1998\pi = 1$

$\sin(-477\pi) = 0$, $\cos(-477\pi) = -1$

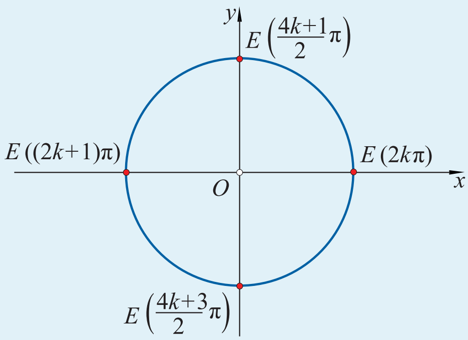
$\sin \dfrac{325}{2}\pi = 1$, $\cos \dfrac{325}{2}\pi = 0$.



PRIMJER 2.

Nacrtajmo točku $E(t)$ i izračunajmo sinus i kosinus od t ako je t:

a) $(2k+1)\pi$ **b)** $2k\pi$ **c)** $\frac{4k+1}{2}\pi$ **d)** $\frac{4k+3}{2}\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.



$\sin(2k+1)\pi = 0,$

$\cos(2k+1)\pi = -1,$

$\sin 2k\pi = 0, \ \cos 2k\pi = 1,$

$\sin \frac{4k+1}{2}\pi = 1, \ \cos \frac{4k+1}{2}\pi = 0,$

$\sin \frac{4k+3}{2}\pi = -1, \ \cos \frac{4k+3}{2}\pi = 0.$

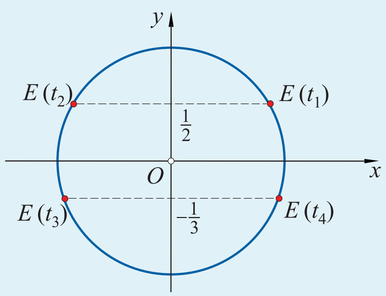
PRIMJER 3.

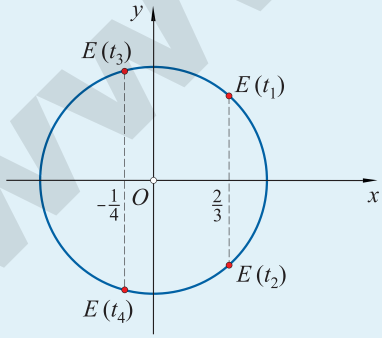
Nacrtajmo točke $E(t)$ za koje vrijedi:

a) $\sin t = \frac{1}{2}$ **b)** $\sin t = -\frac{1}{3}$ **c)** $\cos t = \frac{2}{3}$ **d)** $\cos t = -\frac{1}{4}$.

Za točke $E(t_1)$ i $E(t_2)$ vrijedi $\sin t_1 = \sin t_2 = \frac{1}{2}$.

Za točke $E(t_3)$ i $E(t_4)$ vrijedi $\sin t_3 = \sin t_4 = -\frac{1}{3}$.





Za točke $E(t_1)$ i $E(t_2)$ vrijedi $\cos t_1 = \cos t_2 = \frac{2}{3}$.

Za točke $E(t_3)$ i $E(t_4)$ vrijedi $\cos t_3 = \cos t_4 = -\frac{1}{4}$.

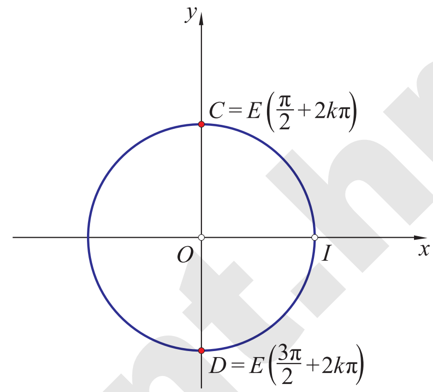
Funkcija tangens

Funkcija **tangens**, u oznaci tg, definira se s pomoću funkcija sinus i kosinus ovako:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cos t \neq 0.$$

Za koje brojeve t vrijedi $\cos t \neq 0$?

Jedine točke na brojevnoj kružnici s apscisom 0 su točke $C(0,1)$ i $D(0,-1)$. Brojevi koji se namatanjem preslikavaju u točku C su brojevi $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots, \frac{-3\pi}{2}, \frac{-7\pi}{2} \ldots$, tj. $C = E\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. Za točku D vrijedi $D = E\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. Dakle, tangens je definiran za sve realne brojeve t različite od $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.



C i D su točke trigonometrijske kružnice s apscisom 0.

Funkcija tangens

$$\operatorname{tg} : \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\} \to \mathbf{R} \qquad \operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

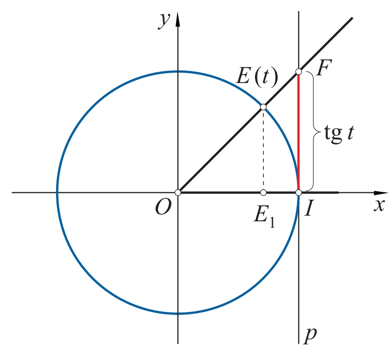
Gdje se na brojevnoj kružnici pojavljuje tangens broja t? Neka je $t \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbf{Z}\right\}$ takav da $E(t)$ pripada prvom kvadrantu. Označimo sa E_1 ortogonalnu projekciju točke $E(t)$ na os x, a sa F presjek pravca p i pravca $OE(t)$.

Očito je da su trokuti $OE_1E(t)$ i OIF slični, pa vrijedi

$$\frac{|FI|}{|OI|} = \frac{|E_1E(t)|}{|OE_1|},$$

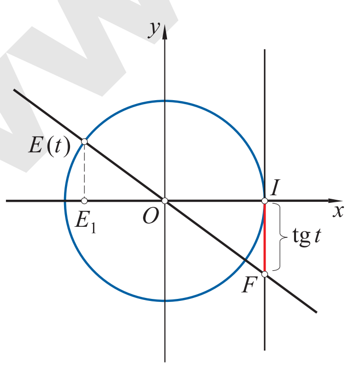
tj. uvažavajući da je $|OI| = 1$, $|E_1E(t)| = \sin t$, $|OE_1| = \cos t$, dobivamo

$$|FI| = \frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t.$$



geometrijska interpretacija broja $\operatorname{tg} t$

Dakle, točka F ima koordinate $(1, \operatorname{tg} t)$, tj. tangens broja t je ordinata točke dobivene presjekom pravca p i pravca $OE(t)$. Promotrimo slučaj kad je $E(t)$ u drugom kvadrantu, tj. kad je $\sin t > 0$ i $\cos t < 0$.



Definirajmo opet točke E_1 i F kao u prethodnom slučaju. Vrijedi $\triangle OE_1E(t) \sim \triangle OIF$, pa je

$$\frac{|FI|}{|OI|} = \frac{|E_1E(t)|}{|E_1O|},$$

tj. $|FI| = \frac{\sin t}{|\cos t|} = |\operatorname{tg} t|$. Dakle, udaljenost od F do x-osi iznosi $|\operatorname{tg} t|$, a kako je F u četvrtom kvadrantu, ordinata joj je negativan broj, pa je $F = (1, -|\operatorname{tg} t|) = (1, \operatorname{tg} t)$ jer je $\operatorname{tg} t$ negativan zbog negativnosti kosinusa od t. Znači i u ovom slučaju je $\operatorname{tg} t$ ordinata točke F.

U slučajevima kad $E(t)$ pripada trećem, odnosno, četvrtom kvadrantu uz analogni postupak imamo isti zaključak koji posebno i istaknimo.

Tangens broja t

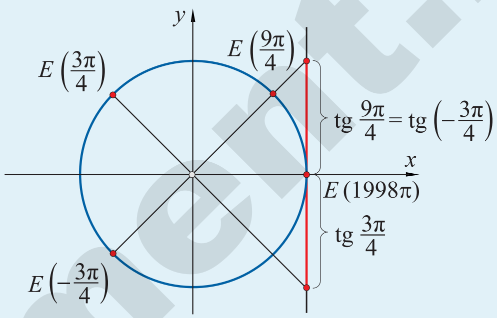
Tangens broja t je ordinata točke dobivene presjekom pravca p i spojnice točaka O i $E(t)$. Pravac p nazivamo **tangensnom osi**.

PRIMJER 4.

Nacrtajmo $E(t)$ na trigonometrijskoj kružnici i $\operatorname{tg} t$ na tangensnoj osi ako je t:

a) $\dfrac{9\pi}{4}$ **b)** $\dfrac{3\pi}{4}$

c) 1998π **d)** $-\dfrac{3\pi}{4}$.



Funkcija kotangens

Funkcija **kotangens**, u oznaci ctg, definira se ovako

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}, \quad \sin t \neq 0.$$

Brojevi za koje je $\sin t = 0$ su oni koji se preslikaju u točke $I(1,0)$ i $\bar{I}(-1,0)$. Kako je $I = E(2k\pi), k \in \mathbf{Z}$ i $\bar{I} = E(\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$, brojevi za koje je $\sin t = 0$ su oblika $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ pa je domena funkcije ctg skup $\mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$.

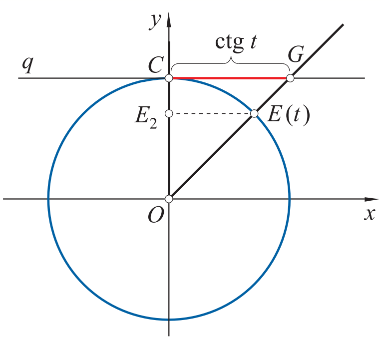
Funkcija kotangens

$$\operatorname{ctg} : \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R} \qquad \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Neka je q tangenta brojevne kružnice k u točki $C(0,1)$. Uzmimo takav realan broj t kojemu je namatanjem pridružena točka $E(t)$ koja pripada prvom kvadrantu.

Neka je E_2 ortogonalna projekcija točke $E(t)$ na y-os, a G presjek pravca q i pravca $OE(t)$. Trokuti $OE_2E(t)$ i OCG su slični i kako je $|E_2E(t)| = \cos t$, $|OC| = 1$ i $|OE_2| = \sin t$, slijedi da je $\dfrac{|CG|}{|CO|} = \dfrac{|E_2E(t)|}{|E_2O|}$, tj. $|CG| = \dfrac{\cos t}{\sin t} = \operatorname{ctg} t$, tj. koordinate točke G su $(\operatorname{ctg} t, 1)$.

U ostalim slučajevima kada $E(t)$ pripada ostalim kvadrantima, način razmišljanja je sličan, pa zaključujemo sljedeće:



geometrijska interpretacija kotangensa broja t

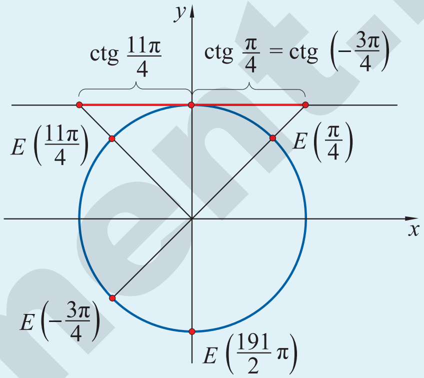
Kotangens broja t

Kotangens broja t je apscisa točke dobivene presjekom pravca q i spojnice točaka O i $E(t)$. Pravac q nazivamo **kotangensnom osi**.

PRIMJER 5.

Nacrtajmo $E(t)$ na trigonometrijskoj kružnici i $\operatorname{ctg} t$ na kotangensnoj osi ako je t:

a) $\frac{\pi}{4}$ **b)** $\frac{11\pi}{4}$
c) $\frac{191}{2}\pi$ **d)** $-\frac{3\pi}{4}$.



PRIMJER 6.

Odredimo predznake trigonometrijskih funkcija u pojedinim kvadrantima.

Ako je $E(t)$ u prvom kvadrantu, tada su obje koordinate te točke pozitivne, tj. $\sin t > 0$, $\cos t > 0$, te su i $\operatorname{tg} t$ i $\operatorname{ctg} t$ pozitivni. Za ostale kvadrante vrijedi ova tablica:

kvadrant	I.	II.	III.	IV.
$\sin t$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos t$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\operatorname{tg} t$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\operatorname{ctg} t$	$+$	$-$	$+$	$-$

ZADATCI 1.2.

1. Nacrtaj $E(t)$ i istakni sinus i kosinus od t ako je t jednako:

a 32π b -14π: c -197π: d $\frac{321\pi}{2}$ e $-\frac{141\pi}{2}$ f $\frac{33\pi}{4}$.

2. Nađi $\sin t$, $\cos t$ ako je t:

a 27π b -18π c 384π d $\frac{21}{2}\pi$ e $-\frac{43}{2}\pi$ f $-\frac{1997}{2}\pi$.

3. Nacrtaj na trigonometrijskoj kružnici točke $E(t)$ za koje vrijedi:

a $\sin t = \frac{3}{4}$ b $\sin t = \frac{1}{6}$ c $\sin t = -\frac{1}{4}$

d $\cos t = \frac{1}{3}$ e $\cos t = -\frac{1}{2}$ f $\cos t = -\frac{2}{3}$.

4. Nacrtaj $E(t)$ i istakni tangens i kotangens od t (ukoliko postoje) ako je t jednako:

a 36π **b** -43π **c** $\frac{19}{2}\pi$ **d** $\frac{-123\pi}{2}$ **e** $\frac{145\pi}{4}$ **f** $-\frac{237\pi}{4}$.

5. Istakni na trigonometrijskoj kružnici točke $E(t)$ za koje vrijedi:

a $\operatorname{tg} t = 1$ **b** $\operatorname{tg} t = 2$ **c** $\operatorname{tg} t = -\frac{5}{4}$

d $\operatorname{ctg} t = 1.5$ **e** $\operatorname{ctg} t = -1.8$ **f** $\operatorname{ctg} t = 2$.

6. Izračunaj:

a $\cos\pi - \cos 4\pi + \sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos(-\pi)$

b $\sin\frac{3\pi}{2} - \cos\pi + \sin\pi$

c $\sin 1996\pi - \cos 1997\pi + \operatorname{tg} 1998\pi$

d $\dfrac{\operatorname{tg} 14\pi + \sin\left(-\frac{17}{2}\pi\right)}{\sin 27\pi - \cos 27\pi}$

e $\dfrac{\sin\frac{19\pi}{2} + \cos^2\left(-\frac{5\pi}{2}\right)}{\sin^2\left(-\frac{19\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)}$

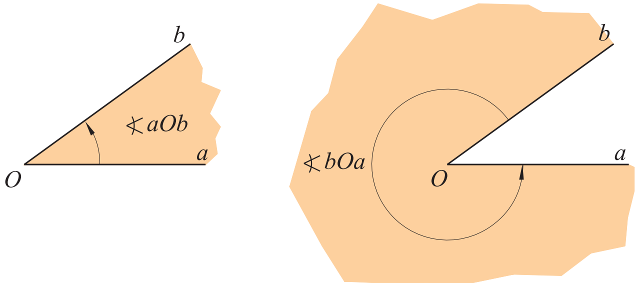
f $\dfrac{\cos^2 7\pi - 2\sin^2 7\pi}{\cos^2\frac{17\pi}{2} + 2\sin^2\frac{17\pi}{2}}$.

1.3. Trigonometrijske funkcije kutova

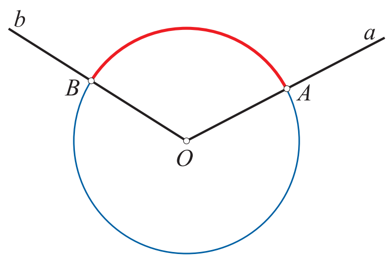
Kut i mjere kuta

Kutom $\sphericalangle aOb$ nazivamo dio ravnine određen polupravcima a i b sa zajedničkim vrhom O koji bi prebrisao polupravac a pri rotaciji u pozitivnom smjeru oko točke O do polupravca b.

Polupravac a zovemo prvi ili početni krak kuta $\sphericalangle aOb$, a polupravac b drugi ili završni krak kuta.



Kutovi $\sphericalangle aOb$ i $\sphericalangle bOa$ zajedno čine puni kut.



Opišimo oko vrha O kuta $\sphericalangle aOb$ kružnicu k jediničnog polumjera sa središtem u O. Ta kružnica siječe krak a u točki A, a krak b u točki B.

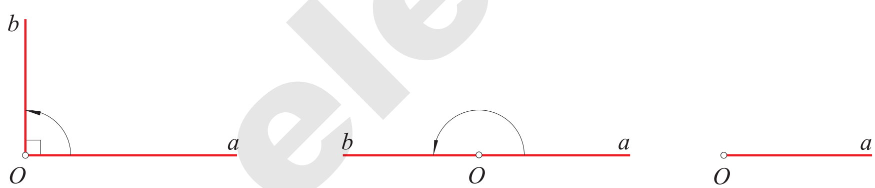
S pomoću luka $\overset{\frown}{AB}$ mjerimo kut $\sphericalangle aOb$. Naime, vrijedi sljedeća definicija.

Glavna mjera

Glavna mjera u radijanima kuta $\sphericalangle aOb$ jest duljina luka $\overset{\frown}{AB}$ pri čemu se od dva moguća luka određena točkama A i B uzima onaj na kojem je kretanje od točke A do točke B u pozitivnom smjeru.

Kažemo da smo kut $\sphericalangle aOb$ izmjerili u radijanima i pišemo $|\sphericalangle aOb| = t_0$ rad, gdje je t_0 duljina luka $\overset{\frown}{AB}$. Budući da je duljina jedinične kružnice 2π, glavna mjera je broj iz intervala $[0, 2\pi\rangle$.

Tako, primjerice, nul-kut $\sphericalangle aOa$ ima glavnu mjeru 0 radijana, što kraće zapisujemo 0 rad, pravi kut $\sphericalangle aOb$, $a \perp b$, ima glavnu mjeru $\dfrac{\pi}{2}$ rad, ispruženi kut $\sphericalangle aOb$, gdje je $a \cup b$ pravac, ima glavnu mjeru π rad.



Pravi kut ima glavnu mjeru $\frac{\pi}{2}$ radijana ili 90°; ispruženi kut ima mjeru π radijana ili 180°; nul-kut ima mjeru 0 radijana ili 0°.

Povijesno gledano, stariji način mjerenja kutova jest mjerenje u stupnjevima. U tom slučaju je glavna mjera ispruženog kuta jednaka 180 stupnjeva, što kraće zapisujemo sa 180°, a kut s mjerom od t radijana ima

$$s = \frac{180}{\pi} \cdot t$$

stupnjeva. Ova je formula proizašla iz razmjera $180 : \pi = s : t$. Pri toj pretvorbi obično koristimo i manje dijelove stupnja: minute ($1' = \dfrac{1}{60}$ stupnja) i sekunde ($1'' = \dfrac{1}{60}$ minute). U nekim dijelovima svijeta u upotrebi je i mjerenje kutova u gradima. U tom je slučaju glavna mjera ispruženog kuta jednaka 200 grada.

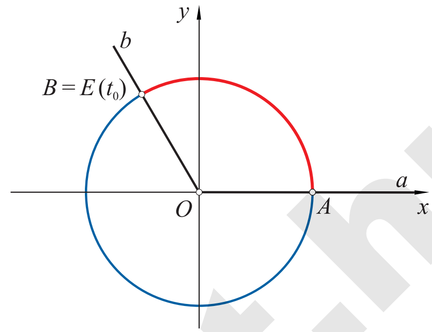
U sljedećoj tablici navedene su mjere nekih kutova u stupnjevima i u radijanima:

mjera u stupnjevima	0°	30°	45°	60°	75°	80°	90°	270°
mjera u radijanima	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{5\pi}{12}$	$\dfrac{4\pi}{9}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{3\pi}{2}$

Uvedimo koordinatni sustav $(O; x, y)$ tako da se vrh O kuta $\sphericalangle aOb$ podudara s ishodištem O, a prvi krak a s pozitivnim dijelom x-osi, te neka je k trigonometrijska kružnica. Sjetimo li se postupka namatanja pravca na kružnicu, zaključujemo da je

$$B = E(t_0)$$

gdje je $t_0 \in [0, 2\pi\rangle$ glavna mjera kuta, tj. duljina luka $\overset{\frown}{AB}$. Ali, vrijedi i $B = E(t_0 + 2k\pi)$ za svaki cijeli broj k. Brojeve $t_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ nazivamo **mjere** kuta $\sphericalangle aOb$.



Mjera kuta

Ako je t_0 glavna mjera kuta $\sphericalangle aOb$, onda svaki element skupa

$$\{t_0 + 2k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$$

nazivamo **mjerom** tog kuta.

Dakle, kad kažemo "kut od $30°$", "kut od $\frac{\pi}{6}$ rad" ili "kut od $390°$", "kut od $-\frac{11\pi}{6}$" radi se o istom kutu, ali s različitim mjerama: $30°$, $\frac{\pi}{6}$ rad, $390°$, $-\frac{11\pi}{6}$ rad. Ako u mjeri kuta ne piše kratica "rad", podrazumijeva se da se radi o radijanskoj mjeri.

PRIMJER 1.

Sljedećim kutovima nađimo glavne mjere u radijanima:

a) 328π **b)** $\frac{431}{3}\pi$ **c)** $1081°$ **d)** $-213°$.

a) Kako je $328\pi = 0 + 2 \cdot 164\pi$, glavna je mjera tog kuta jednaka 0 radijana.

b) Iz $\frac{431}{3}\pi = \frac{71 \cdot 6 + 5}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi + 71 \cdot 2\pi$ slijedi da je glavna mjera jednaka $\frac{5}{3}\pi$ radijana.

c) $1081° = 3 \cdot 360° + 1°$ pa je glavna mjera jednaka $1°$, tj. $\frac{\pi}{180}$ rad.

d) $-213° = -360° + 147°$ te je glavna mjera jednaka $147°$, tj. $\frac{147\pi}{180}$ rad.

PRIMJER 2.

Kutu od $75°$ napišimo radijansku mjeru koja pripada intervalu

a) $[0, 2\pi\rangle$ **b)** $[-10\pi, -8\pi\rangle$ **c)** $[122\pi, 124\pi\rangle$.

a) Pretvorimo $75°$ u radijane: $75° = \frac{75\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}$ i to je glavna mjera u radijanima.

b) $\frac{5\pi}{12} = 10\pi + \left(-10\pi + \frac{5\pi}{12}\right) = 10\pi - \frac{115\pi}{12}$ i tražena mjera iz tog intervala je $-\frac{115\pi}{12}$.

c) $\frac{5\pi}{12} = -122\pi + \left(122\pi + \frac{5\pi}{12}\right) = -122\pi + \frac{1469\pi}{12}$ te je tražena mjera $\frac{1469\pi}{12}$.

PRIMJER 3.

Danu radijansku mjeru kuta napišimo u stupnjevima:

a) 1 rad **b)** 34 rad **c)** -28.2 rad.

a) Koristeći formulu imamo

$$s = \frac{180}{\pi}t = \frac{180}{t} = 57.295779^\circ .$$

Također, mogli smo se koristiti i džepnim računalom tako da u stanju RAD upišemo dani broj u radijanima, tj. 1, te prelaskom u stanje DEG dobivamo broj u stupnjevima. Uobičajeno je ovaj broj zapisati i s pomoću minuta i sekunda. Broj minuta dobivamo tako da oduzmemo cjelobrojni dio i razliku pomnožimo sa 60: $0.295779^\circ \cdot 60 = 17.74674'$. Oduzmemo li od ovog broja cjelobrojni dio i ostatak pomnožimo sa 60, dobit ćemo sekunde: $0.74674' \cdot 60 = 44.80''$. Dakle, mjera u stupnjevima kuta od 1 radijana iznosi $57^\circ 17' 45''$. Ovaj postupak pretvaranja stupnjeva u minute i sekunde je na većini džepnih računala također automatiziran (tipka $\rightarrow$ D.MS).

b) $34 \text{ rad} = 1948.056503^\circ = 1948^\circ 3' 23''$.

c) $-28.2 \text{ rad} = -1615.740982^\circ = -1615^\circ 44' 28''$.

PRIMJER 4.

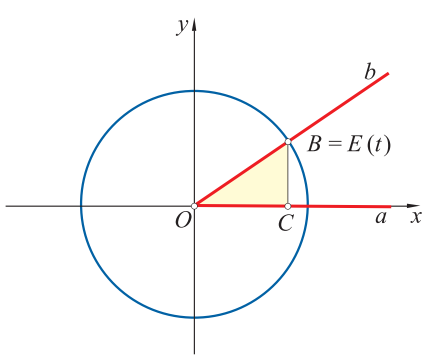
Napišimo $35^\circ 2' 14''$ u radijanima.

Prvo je potrebno dani broj pretvoriti u stupnjeve: $s = 35^\circ 2' 14'' = 35 + \dfrac{2}{60} + \dfrac{14}{3600} = 35.037222^\circ$, a zatim $t = \dfrac{s\pi}{180} = 0.611515$ rad.

I ova pretvorba iz oblika "stupnjevi-minute-sekunde" u stupnjeve, te u radijane može se vršiti s pomoću džepnog računala. Naime, računalo postavimo u stanje DEG te unesemo podatak u obliku 35.0214. Pritiskom na tipku $\rightarrow$ DEG dobivamo 35.037222, a zatim prelaskom u stanje RAD taj broj se pretvara u radijane.

Trigonometrijske funkcije kuta

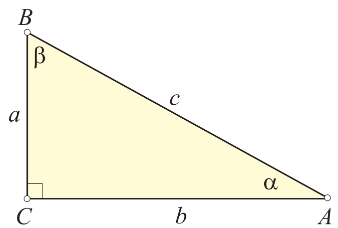
Promotrimo sada šiljasti kut $\sphericalangle aOb$. Dakle, točka B je u prvom kvadrantu i $B = E(t)$.



Dosad smo naučili da su uz taj kut vezana dva pojma vrlo sličnih naziva:

- trigonometrijske funkcije šiljastog kuta $\sphericalangle aOb$
- trigonometrijske funkcije broja t.

Ta dva pojma definirali smo nezavisno. Prvi pojam definiran je u 2. razredu. Ponovimo te definicije.



U pravokutnom trokutu ABC vrijedi

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta,$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta,$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \operatorname{ctg}\beta,$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\beta.$$

Drugi pojam definiran je u prethodnim poglavljima. Tako je sinus broja t ordinata točke $B = E(t)$ trigonometrijske kružnice, kosinus istog broja t je apscisa točke B, tangens broja t je kvocijent sinusa i kosinusa od t, a kotangens broja t je kvocijent kosinusa i sinusa od t. Povežimo sada trigonometrijske funkcije kutova s trigonometrijskim funkcijama realnih brojeva.

Promotrimo opet sliku šiljastog kuta na prethodnoj stranici. Sinus broja t je duljina $|BC|$. Ali, uočimo li pravokutan trokut OCB, vidimo da je sinus kuta $\measuredangle aOb$ omjer $\dfrac{|BC|}{|OB|}$, što je jednako $|BC|$ jer je kružnica jedinična.

Dakle, ta dva pojma: sinus šiljastog kuta i sinus njegove mjere se podudaraju. Isto se može pokazati i za ostale trigonometrijske funkcije, tj. vrijedi sljedeće.

Trigonometrijske funkcije šiljastog kuta i trigonometrijske funkcije bilo koje mjere tog kuta se podudaraju.

Ovdje je mjesto i vrijeme da se prisjetimo i trigonometrijskih funkcija nekih značajnih šiljastih kutova.

$t(^\circ)$	$t\,(\mathrm{rad})$	$\sin t$	$\cos t$	$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg} t$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Uspostavili smo vezu između trigonometrijskih funkcija šiljastih kutova i trigonometrijskih funkcija realnih brojeva. Prirodno proširenje te veze na trigonometrijske funkcije bilo kakvih kutova dano je sljedećom definicijom.

Trigonometrijske funkcije kuta

Neka je t bilo koja mjera kuta $\measuredangle aOb$ u radijanima. Vrijednost trigonometrijske funkcije kuta $\measuredangle aOb$ jednaka je vrijednosti te trigonometrijske funkcije realnog broja t.

Istaknimo: sinus pravog kuta jednak je $\sin\dfrac{\pi}{2}$, tj. 1; sinus ispruženog kuta jednak je $\sin\pi$, tj. 0 itd.

PRIMJER 5.

Izračunajmo:

a) $\sin \frac{31\pi}{2}$ **b)** $\cos 750^\circ$.

a) $\frac{31\pi}{2} = \frac{7 \cdot 4 + 3}{2}\pi = 14\pi + \frac{3\pi}{2}$. Glavna mjera je $\frac{3\pi}{2}$. Dakle, $\sin \frac{31\pi}{2} = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$.

b) Prvo nađimo glavnu mjeru tog kuta: $750^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 30^\circ$. Glavna mjera je 30° . Tada je $\cos 750^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ZADATCI 1.3.

1. Pretvori u stupnjeve, minute i sekunde:

a 1.8 rad b 21.35 rad c -4.2 rad.

2. Pretvori u radijane:

a $10^\circ 21' 43''$ b $31^\circ 2' 59''$ c $121^\circ 1''$.

3. Napiši još bar 4 mjere kuta u radijanima čija je jedna mjera zadana, te pretvori sve te mjere iz radijana u stupnjeve:

a $\frac{\pi}{2}$ b $\frac{8}{3}\pi$ c $\frac{19\pi}{4}$ d $-\frac{141}{4}\pi$.

4. Napiši još bar 4 mjere u stupnjevima kuta čija je jedna mjera zadana, te pretvori sve te mjere iz stupnjeva u radijane:

a 330° b -60° c 1440° d -1998°

5. Odredi glavnu mjeru u radijanima kutova kojima su dane mjere:

a $\frac{13\pi}{2}$ b $\frac{148}{5}\pi$ c $\frac{872}{3}\pi$ d -144π .

6. Odredi glavnu mjeru u stupnjevima kutova kojima su dane mjere:

a 1080° b 456° c 12345° d -345° .

7. Odredi glavnu mjeru i sinus danog kuta:

a 390° b 1110° c -330° d 3630° e 420° f 780°
g -300° h 2580° i 405° j 765° k -315° l 3645° .

8. Odredi glavnu mjeru i kosinus kuta:

a $\frac{9\pi}{4}$ b $-\frac{\pi}{4}$ c $-\frac{9\pi}{4}$ d $\frac{81\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{3}$ f $-\frac{\pi}{3}$
g $-\frac{7\pi}{3}$ h $\frac{43\pi}{3}$ i $\frac{13\pi}{6}$ j $-\frac{\pi}{6}$ k $-\frac{13\pi}{6}$ l $\frac{133\pi}{6}$.