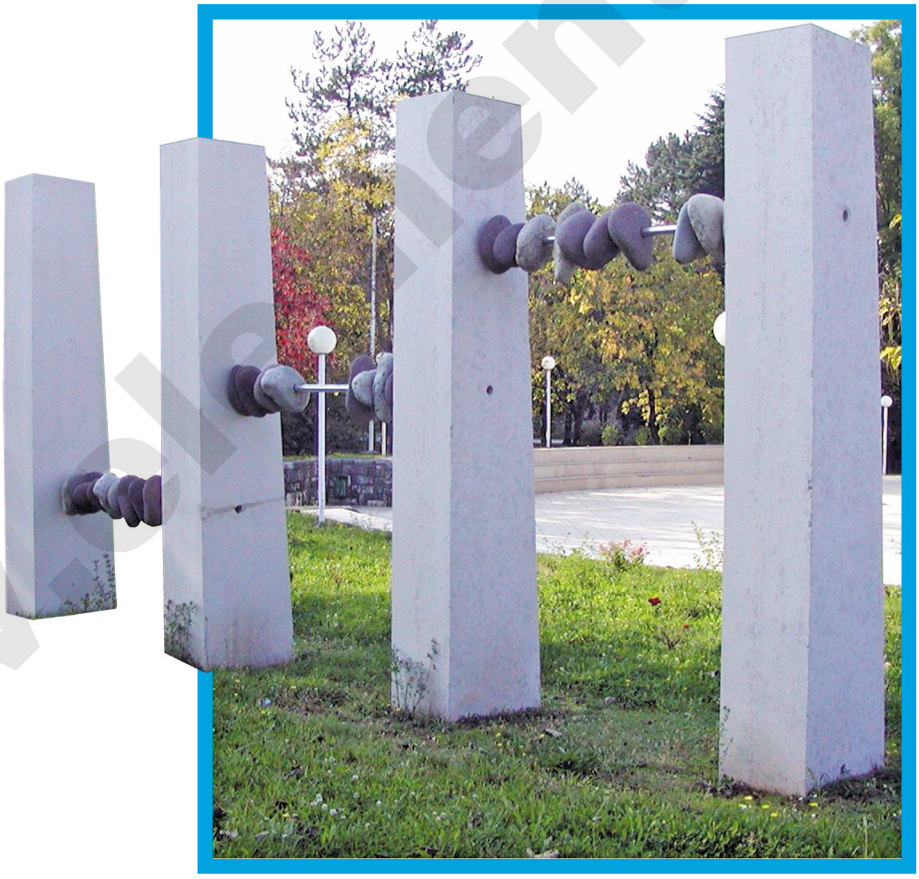
1 Brojevi



Broj je osnovni pojam matematike. Tijekom dosadašnjeg školovanja upoznali smo temeljna svojstva skupa prirodnih brojeva $\mathbf{N}$*, cijelih brojeva* $\mathbf{Z}$*, racionalnih* $\mathbf{Q}$*, realnih* $\mathbf{R}$ *i kompleksnih brojeva* $\mathbf{C}$*. Svakako najjednostavniji među njima je skup prirodnih brojeva. Na početku ovog poglavlja istaknut ćemo neka dodatna svojstva ovog skupa. Pokazat ćemo zatim kako se krenuvši od skupa* $\mathbf{N}$ *dobivaju složeniji skupovi brojeva. Detaljnije ćemo obraditi svojstva realnih brojeva, jer se na njima zasniva matematička analiza, disciplina koju ćemo proučavati u nastavku, kao i svojstva kompleksnih brojeva, zbog njihove važnosti u primjenama.*

1.1. Brojevni sustavi

Pozicijski zapis brojeva

Način na koji mi danas zapisujemo brojeve ima dvije bitne karakteristike. To je **pozicijski zapis**, koji koristi **deset** različitih znamenaka: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Što karakterizira pozicijski zapis? Vrijednost znamenke nije određena samo njezinim iznosom, već i *mjestom* u zapisu broja na kojemu se ona nalazi. Svako mjesto u zapisu broja ima svoju *težinu*, koja se povećava deset puta za svaki pomak znamenke ulijevo: u broju 237 znamenka 7 je znamenka **jedinica** koja vrijedi 7, znamenka 3 je znamenka **desetica** koja vrijedi 30 (trideset) jedinica, a 2 je znamenka **stotica** koja vrijedi 200 (dvije stotine) jedinica.

Za nekog tko slabije prebrojava kažemo da "broji na prste". Međutim, činjenica da osoba ima *deset* prstiju upravo je i odredila način našeg brojenja: veće brojeve iskazujemo s pomoću potencija broja deset. Tako, primjerice, broj tri stotine dvadeset šest prikazujemo s pomoću potencija broja 10 ovako:

$$3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 6 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 6$$

i taj broj zapisujemo kratko kao 326, pazeći na *položaj* svake znamenke u ovom zapisu. Broj 35 206 možemo napisati ovako:

$$35\,206 = 3 \cdot 10\,000 + 5 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 6 = 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 6.$$

Općenito, višeznamenkasti broj N zapisujemo kao $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$. Vrijednost tog broja je

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Njegove znamenke $a_n, \ldots, a_1, a_0$ cijeli su brojevi iz skupa $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Za broj kažemo da je zapisan u **dekadskom sustavu** ili **sustavu s bazom 10**.

Za bazu brojevnog sustava možemo uzeti bilo koji drugi prirodni broj veći od 1.

Zapis broja u sustavu s bazom b

Neka je $b > 1$ prirodan broj. Prirodni broj N zapisan u pozicijskom sustavu s bazom b ima vrijednost:

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}_{(b)} = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot b + a_0.$$

Ovdje su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ znamenke broja N. To su cijeli brojevi iz skupa $\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ (pritom je $a_n \neq 0$). Indeks (b) označava u kojoj je bazi zapisan broj.

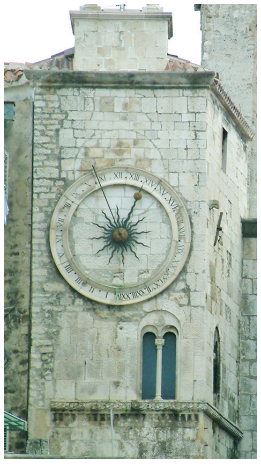
Tako, primjerice, $152_{(8)}$ predstavlja broj zapisan u sustavu s bazom 8. Koji je to broj u dekadskom sustavu? Računajmo ovako:

$$152_{(8)} = 1 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 2 = 64 + 40 + 2 = 106_{(10)}.$$

Po dogovoru, brojeve u dekadskom sustavu pisat ćemo bez oznake baze: $106_{(10)} = 106$.

Povijesni kutak

ZAPISIVANJE BROJEVA



Prirodne brojeve danas zapisujemo na ovaj način: 1, 2, $3 \ldots$ Zapis broja ne smijemo poistovjetiti sa samim brojem, jer se isti broj može zapisivati na različite načine.

Rimljani su u tu svrhu rabili slova svoje latinične abecede. Slova I, V, X, L, C, D, M označavala su redom brojeve 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000. Njihovim kombiniranjem možemo zapisati višeznamenkaste brojeve: MCMXCVI predstavlja broj 1996, dok se 1886 piše MDCCCLXXXVI. Očito je ovakav način zapisivanja pogodan samo za zapis broja, a nikako i za računanje s takvim brojevima (Kako pomnožiti XCVI s DCCXLI?).

Sličan sustav zapisivanja brojeva koristio se i u drugim kulturama. Grci su za oznaku brojeva koristili početno slovo odgovarajuće riječi pa su brojeve 1, 5, 10, 100, 1000, 10000 označavali s I, Π, Δ, H, X, M. Vidi detalje na *web*-stranici `en.wikipedia.org/wiki/Numeral_systems`.

Takav se sustav koristio i kod nas u doba uporabe glagoljice. Praktički je svako slovo glagoljice imalo i svoju numeričku vrijednost. Da slovo predstavlja broj, upozoravao je kvadratić ispred njega, ili vitica zapisana iznad slova.

Brojevi na ručnoj uri označavaju se vrlo često rimskim znamenkama, od I do XII, kao i mjeseci u kalendaru.

Sat na splitskoj Pjaci ima brojčanik s 24 rimskim slovima označena sata, baš kao i ovaj prvi električki pokretani sat ispred muzeja u Greenwichu (postavljen 1852 godine).

Ostatke duodecimalnog sustava (s bazom 12) nalazimo još i danas. Jaja se još uvijek (ali sve manje!) prodaju u **tucetima**, dok **gros** predstavlja tucet tuceta, broj 100 u bazi 12.

Englezi su do 1971. godine funtu dijelili na 12 šilinga, a šiling na 20 penija. Jedna je funta sadržavala dakle 240 penija. Takav je sustav pogodan za dijeljenje, jer je 12 djeljivo s 2, 3, 4 i 6. Inflacija je olakšala prijelaz na dekadski sustav.

Babilonci su od Sumerana nasljedili i razvili **heksagezimalni** sustav (s bazom 60). Ostatke tog sustava zadržali smo u podjeli sata (i kutova) na minute te minute na sekunde.

U načinu izgovaranja brojeva u francuskom jeziku naziremo utjecaj i drugih sustava, *quatre vingt onze* označava broj 91, četiri (puta) dvadeset (plus) jedanaest!

Primjer 1. Koji brojevi u dekadskom sustavu odgovaraju brojevima $3216_{(12)}$, $3216_{(8)}$, $10010011_{(2)}$, $234_{(5)}$?

$$\begin{aligned} 3216_{(12)} &= 3 \cdot 12^3 + 2 \cdot 12^2 + 1 \cdot 12 + 6 = 5490, \\ 3216_{(8)} &= 3 \cdot 8^3 + 2 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8 + 6 \quad = 1678, \\ 10010011_{(2)} &= 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2 + 1 \quad = 147, \\ 234_{(5)} &= 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 4 \quad = 69. \end{aligned}$$

Zadatak 1. Koji brojevi u dekadskom sustavu odgovaraju brojevima $321_{(4)}$, $321_{(12)}$, $555_{(6)}$, $101101_{(2)}$?

Primjer 2. Niz uzastopnih prirodnih brojeva zapisan je ovako:

$$1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33, 100, 101 \ldots$$

U kojem se brojevnom sustavu odvija brojenje?

Broj različitih znamenaka i postupak brojenja ovise o izabranoj bazi. U sustavu s bazom b postoji točno b različitih znamenaka.

U ovom nizu postoje četiri različite znamenke, pa je riječ o sustavu s bazom četiri.

Primjer 3. U kojem brojevnom sustavu vrijedi račun:

$$24 \times 13 = 345?$$

Neka je x baza tog sustava. Tada ova jednakost glasi

$$(2x + 4)(x + 3) = 3x^2 + 4x + 5.$$

Nakon sređivanja dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - 6x - 7 = 0.$$

Njezina su rješenja $x = -1$ i $x = 7$. Račun je napisan u sustavu s bazom 7.

Zadatak 2. Prevedi brojeve $24_{(7)}$, $13_{(7)}$, $345_{(7)}$ u dekadski sustav i uvjeri se u ispravnost računa $24_{(7)} \times 13_{(7)} = 345_{(7)}$.

Zadatak 3. U kojem brojevnom sustavu vrijedi račun: $2381 - 1926 = 657$?

Primjer 4. Koji se troznamenkasti broj u sustavu s bazom 7 piše na način xyz, a u sustavu s bazom 11 na način zyx?

Iz jednadžbe $xyz_{(7)} = zyx_{(11)}$ slijedi

$$49x + 7y + z = 121z + 11y + x,$$

odakle je

$$6(2x - 5z) = y.$$

Brojevi x, y, z nenegativni su cijeli brojevi manji od 7, jer su to znamenke u sustavu s bazom 7. Budući da je lijeva strana jednakosti djeljiva sa 6, mora biti $y = 0$ ili $y = 6$. Za $y = 0$ je $2x = 5z$, odakle je $x = 5$, $z = 2$. Time smo dobili rješenje $502_{(7)} = 205_{(11)}$.

Ako je $y = 6$, onda mora biti $2x - 5z = 1$, odakle je $z = 1$ i $x = 3$, te je još jedno rješenje $361_{(7)} = 163_{(11)}$.

Istaknuti brojevni sustavi

Iako svaki prirodni broj $b > 1$ može poslužiti kao baza brojevnog sustava, u praktičnoj uporabi su četiri brojevna sustava:

- **Dekadski** sustav (s bazom deset). Tu koristimo standardna imena i zapis znamenaka: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

- **Binarni** sustav (s bazom dva). Tu postoje samo dvije različite znamenke: 0 i 1. Ovdje je, zbog malog broja različitih znamenaka, prikladnije brojeve čitati znamenku po znamenku. Tako, primjerice, broj $13 = 1101_{(2)}$ čitamo jedan-jedan-nula-jedan a ne tisuću sto i jedan.

- **Oktalni** sustav (s bazom osam) ima osam različitih znamenaka. Za njihov zapis koristimo prvih osam znamenaka dekadskog sustava: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Brojeve čitamo na isti način kao u dekadskom sustavu.

- **Heksadekadski** sustav (s bazom šesnaest) ima šesnaest različitih znamenaka. U njihovom zapisu koristimo svih deset znamenaka dekadskog sustava i prvih šest slova latinične abecede: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. Dekadske vrijednosti nekih heksadekadskih brojeva su:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_{(16)} &= 10, \quad \mathrm{B}_{(16)} = 11, \quad \mathrm{C}_{(16)} = 12, \\ \mathrm{D}_{(16)} &= 13, \quad \mathrm{E}_{(16)} = 14, \quad \mathrm{F}_{(16)} = 15, \\ 2\mathrm{C}_{(16)} &= 2 \cdot 16 + 12 = 44, \\ \mathrm{E}38_{(16)} &= 14 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16 + 8 = 3640. \end{aligned}$$

Brojeve zapisane u heksadekadskom sustavu čitamo znamenku po znamenku.

Veza binarne, oktalne i heksadekadske baze

Razvojem računalstva naročito su značajne postale binarna i heksadekadska baza. Razlog tome je što računalo čitav svoj rad zasniva na činjenici da se svaki njegov elementarni sklop (*bit*) može nalaziti u jednom od dvaju stanja: 0 — neaktivnom i 1 — aktivnom. Kombiniranjem bitova možemo zapisati sve prirodne brojeve *u binarnom sustavu*. Svaki je broj u računalu pohranjen u binarnom sustavu. Svako slovo ima svoj brojčani ekvivalent i ponovno je prikazano brojem u binarnom sustavu. Svaka poruka napisana na tipkovnici pretvara se u niz nula i jedinica i pamti u binarnom sustavu.

```
53 76 61 6B 6F 20 73 6C 6F 76 6F 20 69 6D 61 20    Svako slovo ima
73 76 6F 6A 20 62 72 6F 6A 63 63 61 6E 69 20 65    svoj brojčani e
6B 76 69 76 61 6C 65 6E 74 20 69 20 70 6F 6E 6F    kvivalent i pono
76 6E 6F 20 6A 65 0D 0A 70 72 69 6B 61 7A 61 6E    vno je  prikazan
6F 20 62 72 6F 6A 65 6D 20 75 20 62 69 6E 61 72    o brojem u binar
6E 6F 6D 20 73 75 73 74 61 76 75 2E 20 53 76 61    nom sustavu.  Sva
6B 61 20 70 6F 72 75 6B 61 0D 0A 6E 61 70 69 73    ka poruka  napis
61 6E 61 20 6E 61 20 74 69 70 6B 6F 76 6E 69 63    ana na tipkovnic
69 20 70 72 65 74 76 61 72 61 20 73 65 20 75 20    i pretvara se u
6E 69 7A 20 6E 75 6C 61 20 69 20 6A 65 64 69 6E    niz nula i jedin
69 63 61 0D 0A 69 20 70 61 6D 74 69 20 75 20 62    ica  i pamti u b
69 6E 61 72 6E 6F 6D 20 73 75 73 74 61 76 75 2E    inarnom sustavu.
```

Lijevo se nalazi djelić teksta ovog poglavlja u obliku kakvom ga pamti računalo. Svaki znak na tipkovnici ima svoj brojčani ekvivalent. Koje područje pokrivaju mala i velika slova abecede? Potraži na internetu informacije o pojmovima ASCII i Unicode.

Zapis je u binarnom sustavu jednostavan, no zahtijeva velik broj znamenaka. Stoga se binarni brojevi uglavnom prevode u heksadekadski sustav. Taj je prijelaz vrlo jednostavan. Naime, jedna znamenka heksadekadskog sustava odgovara točno četirima znamenkama binarnog sustava. To se događa zbog toga što je broj 16 potencija broja 2, $16 = 2^4$. Prikažimo odnos brojeva u ovim dvama sustavima. Brojevi s lijeve strane jednakosti zapisani su u heksadekadskom, a s desne strane u binarnom sustavu.

$0 = 0$	$4 = 100$	$8 = 1000$	$C = 1100$
$1 = 1$	$5 = 101$	$9 = 1001$	$D = 1101$
$2 = 10$	$6 = 110$	$A = 1010$	$E = 1110$
$3 = 11$	$7 = 111$	$B = 1011$	$F = 1111$

Sada se koristeći ovu tablicu višeznamenkasti broj napisan u heksadekadskom sustavu lako može prevesti u binarni broj i obratno.

Primjer 5. Napišimo u binarnom sustavu sljedeće brojeve: $34_{(16)}$, $2A_{(16)}$, $6C9_{(16)}$, $2EB3_{(16)}$.

Svakoj znamenki heksadekadskog sustava odgovaraju četiri znamenke binarnog sustava (nule na početku broja ispuštamo).

$$34_{(16)} = 11\,0100_{(2)},$$
$$2A_{(16)} = 10\,1010_{(2)},$$
$$6C9_{(16)} = 110\,1100\,1001_{(2)},$$
$$2EB3_{(16)} = 10\,1110\,1011\,0011_{(2)}.$$

Primjer 6. Napišimo u heksadekadskom sustavu sljedeće brojeve: $1011101_{(2)}$, $110001011101011_{(2)}$, $11111111111111_{(2)}$.

Znamenke grupiramo u skupine po četiri (počevši od krajnjih desnih). Skupini od četiriju znamenaka binarnog sustava odgovara jedna znamenka heksadekadskog sustava:

$$101\,1101_{(2)} = 0101\,1101_{(2)} = 5D_{(16)},$$
$$110\,0010\,1110\,1011_{(2)} = 62EB_{(16)},$$
$$11\,1111\,1111\,1111_{(2)} = 3FFF_{(16)}.$$

Zapise oblika 2AA132FF vidjet ćemo pretražujući programe napisane internim jezikom računala. Time je predstavljen osmeroznamenkasti broj u heksadekadskom sustavu koji odgovara tridesetdvoznamenkastom binarnom broju, što je standardni zapis podatka u memoriji 32-bitnog osobnog računala.

Slična veza postoji i između binarnog i oktalnog sustava. Jedna znamenka oktalnog sustava odgovara točno trima znamenkama binarnog sustava, jer je $2^3 = 8$. Prikažimo odnos brojeva u ovim dvama sustavima. S lijeve strane su brojevi zapisani u oktalnom, a s desne strane u binarnom sustavu.

$$\begin{array}{ll} 0 = 0 & 4 = 100 \\ 1 = 1 & 5 = 101 \\ 2 = 10 & 6 = 110 \\ 3 = 11 & 7 = 111 \end{array}$$

Tako vrijedi:

$$16_{(8)} = 1\,110_{(2)},$$
$$5407_{(8)} = 101\,100\,000\,111_{(2)},$$
$$10\,010\,111\,001_{(2)} = 2271_{(8)},$$
$$11\,111\,111\,111_{(2)} = 3777_{(8)}.$$

Primjer 7. Broj 2CA2 zapisan u heksadekadskom sustavu prebacimo u oktalni sustav.

Pretvorbu ćemo načiniti s pomoću binarnog sustava: broj ćemo najprije prebaciti u binarni sustav, a zatim iz njega u oktalni. Jednoj znamenki heksadekadskog sustava odgovaraju četiri znamenke binarnog sustava, a zatim trima znamenkama binarnog odgovara jedna znamenka oktalnog sustava:

$$2CA2_{(16)} = 10\,1100\,1010\,0010_{(2)} = 10\,110\,010\,100\,010_{(2)}$$
$$= 26242_{(8)}.$$

Primjer 8. Broj $51\,707_{(8)}$ prevedimo u sustav s bazom 16.

Koristeći se tablicom s prethodne strane zapišimo najprije dani broj u binarnom sustavu:

$$51\,707_{(8)} = 101\,001\,111\,000\,111_{(2)} = 101\,0011\,1100\,0111_{(2)}.$$

Sad ovaj broj prevedimo iz binarnog u heksadekadski sustav:

$$101\,0011\,1100\,0111_{(2)} = 53C7_{(16)}.$$

Zadatak 4. **1)** Broj $BA3_{(16)}$ prevedi u oktalni sustav.
2) Broj $557_{(8)}$ zapiši u heksadekadskom brojevnom sustavu.

Kutak plus

JERRY i MICKEY MOUSE

U Disneylandu brojevi imaju neko drugo značenje.

Početak *mišje ere* zbio se u osvit velike ekonomske krize, kad je 15. svibnja rođen Mickey Mouse pod ravnateljstvom Walta Disneyja i crtača Uba Iwerksa.

18. studenog 1978., povodom jubilarnog rođendana, Mickey Mouse je dobio svoju zvjezdicu na *Hollywood Walk of Fame*, kao prvi animirani junak kojemu je to uspjelo. Tad je brojao 62 mišje godine.

Najpopularniji miš, Jerry, mlađi je od Mickeyja Mousa. Evo što je zapisao u svoj dnevnik: "Rođen sam u radionici Williama Hanne i Josepha Barbere godine 14. *mišje ere*. Will i Joe su opisali 162 moje dogodovštine, od kojih je 15 bilo nominirano za Oscara u kategoriji kratkog animiranog filma. Osvojili smo tu nagradu u više od pola nominacija, točno 7 puta."

U periodu od 1960. do 1962. Gene Deitch stvorio je 13 epizoda, a preostale od 1963. do 1967. animirao je Chuck Jones.

Načinjeno je ukupno 162 filma.

Tom i Jerry nastavili su živjeti i dalje, ali nove epizode nastale devedesetih godina po mnogo čemu se ne mogu mjeriti s onima iz klasičnog doba.

1. Koliko prstiju na obje ruke ima Mickey Mouse?
2. Koje je godine (po ljudskom kalendaru) on rođen?
3. Jerry je rođen 10. veljače, koje godine?
4. Koliko je epizoda Toma i Jerryja nacrtao Chuck Jones?

Prijelaz iz dekadskog sustava

Prijelaz iz dekadskog sustava u sustav s bazom b nije tako jednostavan. Uzrok tome je što broj 10 nije potencija nijednog prirodnog broja b.

Primjer 9. Prikažimo broj 238 u sustavu s bazom 8.

Potencije broja 8 su: $8^1 = 8$, $8^2 = 64$, $8^3 = 512$. Kako je time premašen zadani broj, najveća potencija koja ulazi u prikaz broja bit će $8^2 = 64$. Sad se pitamo: koliko puta možemo 'otkinuti' broj 64 od broja 238? Vrijedi:

$$238 = 3 \cdot 64 + 46.$$

Postupak nastavljamo s brojem 46:

$$238 = 3 \cdot 64 + 5 \cdot 8 + 6 = 356_{(8)}.$$

Zadatak 5. Prikaži broj 238 u sustavima s bazama 6, 5 i 4.

Ovakav je način računanja općenito nepraktičan i dug. Zapišimo rezultat dobiven u prethodnom primjeru kao

$$238 = 3 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 6 = (3 \cdot 8 + 5) \cdot 8 + 6.$$

U ovom se rastavu prepoznaju znamenke 3, 5 i 6 u zapisu broja u oktalnom sustavu. Posljednja znamenka 6 je ostatak pri dijeljenju broja 238 s 8:

$$238 = 29 \cdot 8 + 6.$$

Druga znamenka zdesna dobiva se kao ostatak pri dijeljenju broja 29 s 8:

$$29 = 3 \cdot 8 + 5.$$

Kvocijent daje vodeću znamenku broja.

Primjer 10. Prevedimo broj 94 u sustav s bazom 4.

Vrijedi:

$$\begin{aligned} 94 &= 23 \cdot 4 + 2 && 2 \\ 23 &= 5 \cdot 4 + 3 && 3 \\ 5 &= 1 \cdot 4 + 1 && 1 \\ 1 &= 0 \cdot 4 + 1 && 1 \end{aligned}$$

Zato je $73 = 1132_{(4)}$.

Zadatak 6. Računajući na ovaj način, prevedi broj 238 u sustav s bazom 4.

Primjer 11. Prevedimo u oktalni i heksadekadski sustav broj 243681.

Zadani broj dijelimo s brojem 8. Da bismo dobili količnik, možemo rabiti džepno računalo. Nakon toga je lako odrediti ostatak.

$$\begin{aligned} 243681 &= 30460.125 \cdot 8 = 30460 \cdot 8 + 1, & 1 \\ 30460 &= 3807.5 \cdot 8 = 3807 \cdot 8 + 4, & 4 \\ 3807 &= 475.875 \cdot 8 = 475 \cdot 8 + 7, & 7 \\ 475 &= 59.375 \cdot 8 = 59 \cdot 8 + 3, & 3 \\ 59 &= 7 \cdot 8 + 3, & 3 \\ 7 &= 0 \cdot 8 + 7, & 7 \end{aligned}$$

Dakle, $243681 = 733741_{(8)}$.

Za prijelaz u heksadekadsku bazu dijelimo s brojem 16. Ostatke, ako su veći od 9, pišemo onako kako se zapisuju heksadekadske znamenke:

$$\begin{aligned} 243681 &= 15230.0625 \cdot 16 = 15230 \cdot 16 + 1, & 1 \\ 15230 &= 951.875 = 951 \cdot 16 + 14, & \mathrm{E} \\ 951 &= 59.4375 \cdot 16 = 59 \cdot 16 + 7, & 7 \\ 59 &= 3 \cdot 16 + 11, & \mathrm{B} \\ 3 &= 0 \cdot 16 + 3, & 3 \end{aligned}$$

Dakle, $243681 = 3\mathrm{B}7\mathrm{E}1_{(16)}$.

Zadatak 7. Prevedi u oktalni i heksadekadski sustav ove dekadske brojeve:
123; 9876; 55 555.

Primjer 12. Odredimo binarni prikaz broja 75.

Dijeljenje s 2 je jednostavno pa koristimo jednostavniji zapis. U prvom retku pišemo količnike, a u drugom ostatke.

75	37	18	9	4	2	1
1	1	0	1	0	0	1

Dobivene znamenke pišu se zdesna nalijevo.

Dobili smo $75 = 1001011_{(2)}$.

Zadatak 8. Prevedi u binarni brojevni sustav brojeve:
11; 22; 333; 4444.

Prijelaz u dekadski sustav

Prijelaz iz sustava s bazom b u dekadski sustav je jednostavniji. Ako je $N = a_n a_{n-1} \ldots a_{0(b)}$, onda moramo izračunati broj

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0.$$

Ovaj se broj može računati na uobičajeni način, potenciranjem i zbrajanjem. Ipak, objasnit ćemo algoritam za njegovo računanje u kojem ćemo koristiti samo množenje i zbrajanje, a ne i operaciju potenciranja.

Primjer 13. Prikažimo u dekadskoj bazi broj $3156_{(8)}$.

Računajmo ovako:

$$N = 3156_{(8)} = 3 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 6 = 6 + 8 \cdot (5 + 8 \cdot (1 + 3 \cdot 8)).$$

Računajmo od nutarnjih zagrada prema van:

$$N = 6 + 8 \cdot (5 + 8 \cdot (25)) = 6 + 8 \cdot (205) = 1646.$$

Cijeli postupak ispišimo u obliku tablice

	3	1	5	6
8	3	25	205	1646

Svaki se broj u drugom retku dobije tako da se prethodni pomnoži s $b = 8$ i doda mu se broj iz prvog retka iznad njega. Ispišimo cijeli postupak, korak po korak.

	3	1	5	6
8				

[U prvom retku napisane su znamenke broja, a u drugom vrijednost baze b.]

	3	1	5	6
8	3			

[Prepišimo vrijednost prve znamenke.]

	3	1	5	6
8	3	25		

[Vrijednost baze $b = 8$ pomnožimo s elementom drugog retka i dodajmo sljedeći broj iz prvog retka: $8 \cdot 3 + 1 = 25$.]

	3	1	5	6
8	3	25	205	

[Nastavimo na isti način: $8 \cdot 25 + 5 = 205$.]

	3	1	5	6
8	3	25	205	1646

[$8 \cdot 205 + 6 = 1646$. Dobili smo konačnu tablicu, $N = 1646$.]

Ovaj se način računanja naziva **Hornerov algoritam**[1].

Zadatak 9. Prikaži u dekadskom sustavu broj $41\,227_{(8)}$.

[1] William George Horner (1786. – 1837.), engleski matematičar

Primjer 14. Pretvorimo u dekadski sustav broj $A10E9_{(16)}$.

Račun je napisan u tablici. Prisjetimo se da je $A_{(16)} = 10$, $E_{(16)} = 14$.

	A	1	0	E	9
16	10	161	2576	41230	659689

Dakle, $A10E9_{(16)} = 659689$.

Zadatak 10. Prikaži u dekadskom sustavu brojeve $FFFF_{(16)}$, $ABAB_{(12)}$.

Zbrajanje i množenje u binarnom sustavu

Operacije zbrajanja i množenja možemo izvoditi i u sustavima s drugim bazama. Pravila su identična onima u dekadskom sustavu, jer su i drugi sustavi pozicijski brojevni sustavi. Pritom se mora savladati nova **tablica množenja i zbrajanja**, koja može biti čak i jednostavnija od naše standardne 10×10 tablice.

U binarnom sustavu tablice zbrajanja i množenja iznimno su jednostavne:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

·	0	1
0	0	0
1	0	1

i možemo ih brzo usvojiti. Pri zbrajanju brojeva u binarnom sustavu treba samo obratiti pozornost na prijenos znamenaka.

Primjer 15. Izračunajmo zbroj sljedećih brojeva napisanih u binarnom sustavu. Prijenosi znamenaka napisani su u prvom retku, sitnijim znakovima.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1\ 1} \\ 1\ 0\ 1 \\ +\quad 1\ 1\ 1\ 1\ 0 \\ \hline 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ \ \ \ 1\ 1} \\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ +\quad 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ \ 1} \\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ +\quad 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ \ \ 1\ 1} \\ 1\ 0\ 1 \\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ +\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0 \end{array}$$

Zadatak 11. Izračunaj računajući u binarnom sustavu:

$$1011_{(2)} + 101_{(2)}, \qquad 100111001_{(2)} + 1011011_{(2)}.$$

Pretvori brojeve i rezultat u dekadski sustav i tako provjeri točnost računa.

Zadatak 12. Izračunaj računajući u binarnom sustavu:

$$100_{(2)} - 10_{(2)},$$
$$1000_{(2)} - 101_{(2)},$$
$$10010001_{(2)} - 110011_{(2)}.$$

Pretvori brojeve i rezultat u dekadski sustav i tako provjeri točnost računa.

Primjer 16. Izračunajmo umnožak sljedećih brojeva u binarnom sustavu:

$$\begin{array}{r} 1\,0\,1\,0\,1 \cdot 1\,0\,1 \\ \hline 1\,0\,1\,0\,1 \\ 1\,0\,1\,0\,1 \\ \hline 1\,1\,0\,1\,0\,0\,1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,0\,1\,1 \cdot 1\,1\,0\,1 \\ \hline 1\,0\,1\,1 \\ 1\,0\,1\,1 \\ 1\,0\,1\,1 \\ \hline 1\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1 \end{array}$$

Zadatak 13. Izračunaj umnožak sljedećih brojeva računajući u binarnom sustavu:

$$11_{(2)} \cdot 11_{(2)},$$
$$10101_{(2)} \cdot 11_{(2)},$$
$$10101_{(2)} \cdot 1011_{(2)}.$$

Točno-netočno pitalice

Koje su od sljedećih tvrdnji točne, a koje netočne? Odgovori, a odgovor obrazloži.

1. Različitih znamenaka u zapisu broja može biti najviše deset. T N
2. Broj $5_{(b)}$ uvijek ima istu vrijednost, bez obzira u kojoj je bazi b zapisan. T N
3. Broj $99_{(b)}$ ima najveću vrijednost ako je baza b dekadska. T N
4. Broj 10101_4 veći je od broja 111_{16}. T N
5. Broj 121 je složen broj i to u svim sustavima s bazom većom od 2. T N
6. U sustavu s bazom 20 svaki se broj može zapisati s pomoću znamenaka 0, 1, 2,. . . , 9. T N
7. Najveći dvoznamenkasti broj u heksadekadskom sustavu je $9E_{16}$. T N
8. U heksadekadskom sustavu je broj djeljiv s 8 ako mu je zadnja znamenka djeljiva s 8. T N
9. Račun $2 \times 2 = 4$ istinit je u svakom brojevnom sustavu. T N

Zadatci 1.1.

1. Prevedi u dekadski sustav sljedeće brojeve:

1) $221_{(5)}$; **2)** $110\,011_{(2)}$;
3) $567_{(8)}$; **4)** $21\,000_{(3)}$;
5) $5\,550_{(6)}$; **6)** $2\,134_{(12)}$.

2. Zapiši u dekadskom sustavu brojeve:

1) $1011_{(2)}$, **2)** $100101_{(2)}$,
3) $1100101_{(2)}$, **4)** $110001011_{(2)}$,
5) $11_{(8)}$, **6)** $24_{(8)}$,
7) $126_{(8)}$, **8)** $3201_{(8)}$,
9) $8_{(16)}$, **10)** $20_{(16)}$,
11) $3A_{(16)}$, **12)** $2EB1_{(16)}$.

3. Zapiši dekadske brojeve 6, 13, 25, 125 u sustavima s bazom 2, 8 i 16.

4. Zapiši dekadske brojeve 6, 13, 25, 125 u sustavima s bazom 5, 9 i 12.

5. Zapiši dane dekadske brojeve u sustavima s bazama 2, 5 i 12:
11, 33, 100, 222, 1001.

6. Brojeve 1101, 11000110, 11001100101110011 zadane u binarnoj bazi prebaci u oktalni i heksadekadski sustav.

7. Brojeve 58, 1A2, FFFF zadane u heksadekadskom sustavu prebaci u oktalni sustav.

8. Brojeve 223, 517, 12 053 zadane u oktalnom sustavu prebaci u heksadekadski sustav.

9. Zapiši brojeve $212_{(3)}$, $30_{(4)}$, $245_{(6)}$, $177_{(8)}$, $28_{(12)}$ u sustavu s bazom 2.

10. Zapiši brojeve $101\,110_{(2)}$, $2102_{(3)}$, $3220_{(4)}$, $11\,011_{(5)}$ u sustavu s bazom 8.

11. **1)** Broj $7AB7_{(16)}$ prevedi u oktalni brojevni sustav.
2) Broj $34\,567_{(8)}$ prevedi u heksadekadski brojevni sustav.

12. **1)** Broj $8EF8_{(16)}$ prevedi u oktalni brojevni sustav.
2) Broj $76\,543_{(8)}$ prevedi u heksadekadski brojevni sustav.

13. Nastavi svaki od sljedećih nizova uzastopnih prirodnih brojeva:

1) 10, 11, 12, 20, 21...
2) 101, 110, 111, 1000, 1001...
3) 1, 2, 3, 10, 11, 12...
4) 23, 24, 25, 30, 31, 32...

14. Nastavi svaki od sljedećih nizova prirodnih brojeva:

1) 10011, 10010, 10001, 10000...
2) 10, 100, 110, 1000, 1010...
3) 10, 20, 100, 110, 120...
4) 11, 13, 20, 22, 24...

15. Izračunaj zbroj uzastopnih prirodnih brojeva:

$1+2+3+4+10+11+12+13+14+20+\ldots+44+100.$

16. Odredi, ako postoji, bazu brojevnog sustava u kojem vrijede jednakosti

1) $23 \cdot 15 = 411$;
2) $32 \cdot 22 = 541$;
3) $31 \cdot 412 = 23\,322$.

17. U kojem sustavu vrijede jednakosti

1) $101_{(x)} + 1001_{(x)} = 1110_{(x)}$;
2) $1211_{(x)} - 1120_{(x)} = 21_{(x)}$?

18. Vrijede li u bilo kojem brojevnom sustavu jednakosti

1) $10101 + 1101 = 11202$;
2) $1211 - 1011 = 200$?

19. Zbroj triju uzastopnih brojeva u sustavu s bazom 5 iznosi 121. Koji su to brojevi?

20. Zbroj triju uzastopnih parnih brojeva u binarnom sustavu iznosi 11 110. Koji su to brojevi?

21. Umnožak triju uzastopnih brojeva u sustavu s bazom 5 iznosi 440. Koji su to brojevi?

22. Umnožak triju uzastopnih brojeva u sustavu s bazom 9 iznosi 1320. Koji su to brojevi?

23. Umnožak dvaju uzastopnih neparnih prirodnih brojeva u binarnom sustavu iznosi 100 011. Koji su to brojevi?

24. Odredi prirodne brojeve x i y iz jednakosti **1)** $23_{(x)} = 41_{(y)}$; **2)** $144_{(x)} = 100_{(y)}$.

25. Odredi brojeve a, b i c iz jednakosti

1) $ab_{(5)} = ba_{(7)}$; **2)** $abc_{(5)} = cba_{(8)}$;

3) $aba_{(4)} = bab_{(6)}$.

26. **1)** U kojem je sustavu brojeva $101 \cdot 11 = 1111$?

2) U kojem je sustavu brojeva $1001 \cdot 111 = 111\,111$? Poopći zaključak!

27. Umnožak $11 \cdot 12 \cdot 13$ jednak je 3102. U kojem je brojevnom sustavu provedeno ovo množenje?

28. U kojem je brojevnom sustavu broj 144 potpuni kvadrat nekog prirodnog broja?

29. U kojem je brojevnom sustavu $125^2 = 16\,324$?

30. Broj 620 kvadrat je broja 24. U kojem je sustavu brojeva proveden račun?

31. Broj 20 311 kub je broja 21. U kojem je sustavu brojeva proveden račun?

32. U kojem je brojevnom sustavu broj 1331 potpuni kub nekog prirodnog broja?

33. U kojem je brojevnom sustavu $\sqrt{1331} = 33$? Koliko je u tom sustavu $\sqrt{2420}$?

34. U kojem je brojevnom sustavu $33 \cdot 22 = 1331$? Koliko je u istom sustavu $23 \cdot 32$?

35. U kojem je brojevnom sustavu $\sqrt{1210} = 22$? Koliko je u tom sustavu $\sqrt{3201}$?

36. U kojem je brojevnom sustavu $21 \cdot 22 = 1\,122$? Koliko je u istom sustavu $22 \cdot 12$?

37. Izračunaj računajući u binarnoj bazi:

1) $1101_{(2)} + 10101_{(2)}$;

2) $10101_{(2)} + 10111_{(2)}$;

3) $110111_{(2)} + 10101101_{(2)}$;

4) $1100101_{(2)} + 11001011_{(2)}$.

Brojeve prevedi u dekadski sustav i provjeri rezultat.

38. Izračunaj računajući u binarnom sustavu:

1) $1111_{(2)} - 1001_{(2)}$;

2) $11001_{(2)} - 1101_{(2)}$;

3) $110011_{(2)} - 10110_{(2)}$;

4) $110010111_{(2)} - 1101011_{(2)}$.

Brojeve prevedi u dekadski sustav i provjeri rezultat.

39. Izračunaj računajući u binarnom sustavu:

1) $110_{(2)} \cdot 11_{(2)}$; **2)** $1101_{(2)} \cdot 101_{(2)}$;

3) $11011_{(2)} \cdot 1001_{(2)}$; **4)** $110111_{(2)} \cdot 101101_{(2)}$.

Brojeve prevedi u dekadski sustav i provjeri rezultat.

40. Napiši tablicu zbrajanja i množenja u sustavu s bazom 3. Uporabom tih tablica izračunaj $1201_{(3)} + 2012_{(3)}$; $1120221_{(3)} \cdot 2_{(3)}$; $20012_{(3)} \cdot 12_{(3)}$.

41. Sastavi tablice zbrajanja i množenja za sustave s bazama 4, 5 i 6.

42. Prevedi sljedeće brojeve zapisane u binarnom sustavu u dekadski sustav:

1) $11.1_{(2)}$; **2)** $101.101_{(2)}$;

3) $111.111_{(2)}$; **4)** $1000.0001_{(2)}$.