4 Derivacija

U ovom ćemo poglavlju naučiti osnove diferencijalnog računa, najjačeg 'oružja' kojim su matematičari obogatili čovječanstvo. Riječ je o području matematike u kojem se na djelotvoran način iskorištava ideja o beskonačno malim veličinama, koja je dvije tisuće godina zaokupljala velikane ljudske misli. Ogromna je važnost diferencijalnog računa u tome što s pomoću njega opisujemo fizikalne zakone na kojima se temelji naš svijet.

4.1. Problem tangente i brzine

Prirast varijable i prirast funkcije

Ponovimo najvažnije o prirastu funkcije.

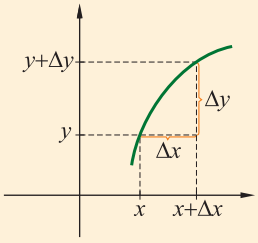
Primjer 1. Neka je $f(x) = x^2 + 2x$. Koliki je prirast funkcije u točki $x_0 = 1$ ako je prirast argumenta $\Delta x = 1$?

Prirast funkcije definira se kao promjena vrijednosti funkcije:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \qquad (1)$$

U ovom primjeru je

$$\Delta y = f(2) - f(1) = 8 - 3 = 5.$$



Prirast funkcije ovisi o prirastu argumenta i o točki u kojoj se taj prirast promatra.

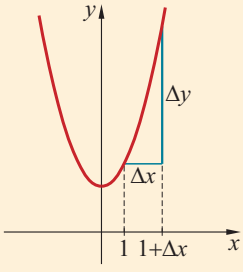
Primjer 2. Neka je $f(x) = x^2 + 2$. Odredimo prirast Δy funkcije

1) u točki $x_0 = 1$, **2)** u točki $x_0 = 3$,

3) u po volji odabranoj točki $x_0 \in \mathbf{R}$.

1) Računamo po (1):

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(1 + \Delta x) - f(1)\\ &= (1 + \Delta x)^2 + 2 - (1 + 2)\\ &= \Delta x^2 + 2\Delta x.\end{aligned}$$



2) Sada je:

$$\Delta y = f(3+\Delta x) - f(3)$$
$$= (3+\Delta x)^2 + 2 - (3^2+2) = \Delta x^2 + 6\Delta x.$$

3) Općenito je:

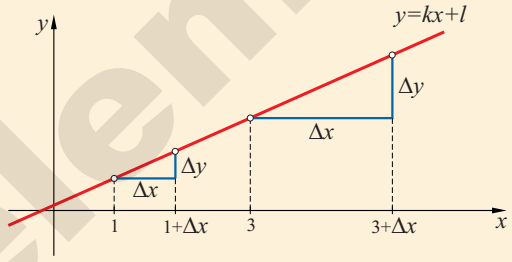
$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = (x_0+\Delta x)^2 + 2 - (x_0^2+2)$$
$$= \Delta x^2 + 2x_0\Delta x.$$

Vidimo da ovaj prirast ovisi i o točki x_0 i o iznosu prirasta Δx.

Afina funkcija, čiji je graf pravac, ima jednak prirast u svakoj točki. Ta funkcija svuda raste (ili pada) jednako brzo.

Primjer 3.

Nagib pravca. Odredimo prirast afine funkcije $f(x) = kx + l$ u istim točkama kao u prethodnom primjeru.



Nagib pravca jednak je koeficijentu smjera pravca i dobiva se kao omjer $\Delta y/\Delta x$. On je stalan u svakoj točki x_0.

1) U točki $x_0 = 1$ je:

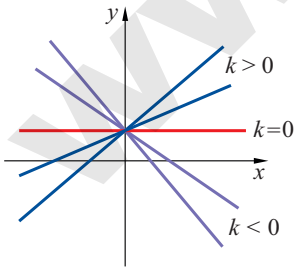
$$\Delta y = f(1+\Delta x) - f(1) = k(1+\Delta x) + l - (k\cdot 1 + l) = k\Delta x.$$

2) U točki $x_0 = 3$ je:

$$\Delta y = f(3+\Delta x) - f(3) = k(3+\Delta x) + l - (k\cdot 3 + l) = k\Delta x.$$

3) Općenito je:

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = k(x_0+\Delta x) + l - (kx_0 + l) = k\Delta x.$$



koeficijent smjera i nagib pravca

U svakoj točki x_0 je za isti Δx jednak prirast funkcije. Zato je *omjer prirasta* stalan i jednak koeficijentu smjera k pravca:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k.$$

Koeficijent smjera određuje **nagib** pravca. Dakle, graf afine funkcije ima u svakoj točki jednak nagib.

iz pariškog predgrađa

Nagib govori o brzini rasta funkcije. Kod pravca nam je poznata ovisnost rasta (pada) o predznaku koeficijenta k:

za $k < 0$ funkcija pada,
za $k = 0$ funkcija je konstanta,
za $k > 0$ funkcija raste.

Pad i rast su to brži što je veća apsolutna vrijednost koeficijenta k.

Nagib se može definirati i općenitije, za po volji odabranu funkciju f.

Nagib funkcije. Tangenta na graf funkcije

Nagib grafa funkcije

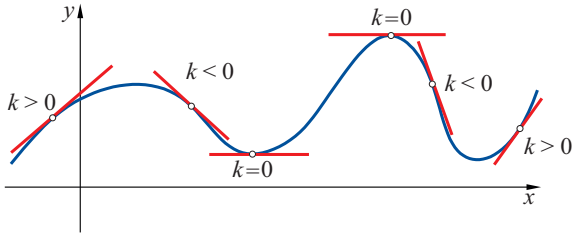
Neka se na graf funkcije f može povući *tangenta* u točki (x_0, y_0). **Nagib grafa** funkcije f u točki (x_0, y_0) definiramo kao nagib tangente položene na graf u toj točki.

On je jednak koeficijentu smjera k tangente, a može se izraziti kao

$$k = \operatorname{tg} \alpha,$$

pri čemu je α kut što ga pravac zatvara s pozitivnim dijelom x-osi.

Funkcije različite od linearne nemaju jednak nagib u svakoj točki. To znači da njihov rast (pad) nije u svakoj točki jednak. Ilustrirajmo to sljedećom slikom.

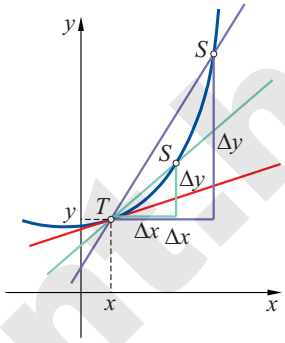


Rast i pad funkcije možemo ilustrirati nagibom pravaca koji diraju graf funkcije. Primjećujemo da funkcija pada tamo gdje je nagib pravca negativan, a raste tamo gdje je on pozitivan. Na prijelazu između rasta i pada nagib tangente jednak je nuli.

Da bismo odredili koliki je točno nagib grafa funkcije u nekoj točki, moramo odrediti koeficijent smjera tangente položene na graf u toj točki. To nije jednostavan posao. Čak niti za tako jednostavne funkcije poput polinoma ne znamo jednostavno odrediti tangentu u po volji uzetoj točki na grafu.

Pokušajmo doći do tangente na sljedeći način: tangentu ćemo zamijeniti **sekantom**, pravcem koji siječe graf funkcije u (barem) dvjema točkama.

Sekanta je pravac koji prolazi točkama (x, y) i $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ na grafu funkcije. Što je vrijednost prirasta Δx manja, to će sekanta biti bolja aproksimacija za tangentu u točki (x, y). Puštajući da Δx teži nuli, iz jednadžbe sekante dobivamo jednadžbu tangente.

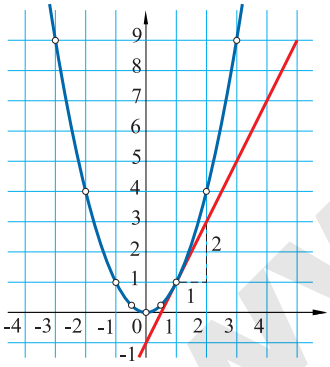


Neka je $T(x_0, y_0)$ točka na grafu u kojoj želimo izračunati nagib, a $S(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ točka na grafu kroz koju vučemo sekantu TS. Nagib sekante je $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Kada se S približava točki T po grafu funkcije f, onda sekanta prelazi u tangentu u točki T.

Odaberimo neku funkciju i pokažimo kako određujemo nagib tangente u nekoj točki grafa te funkcije.

Primjer 4.

Neka je $y = f(x) = x^2$. Nađimo nagib tangente na graf te funkcije u točki $(1, 1)$.



Postavit ćemo sekantu kroz točku s koordinatama $(1, 1)$ i kroz njoj "susjednu" točku $(1 + \Delta x, f(1 + \Delta x))$. Vrijedi

$$f(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^2 = 1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Zato je prirast funkcije u točki $x_0 = 1$ jednak

$$\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = [1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2] - 1 = 2\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Zanima nas koeficijent smjera sekante. On iznosi

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2 + \Delta x.$$

Vidimo da njegova vrijednost teži k 2 kad Δx teži k nuli. Zato je nagib tangente u točki $(1, 1)$ jednak 2.

Izračunajmo nagib tangente u *po volji uzetoj* točki (x_0, y_0) na grafu funkcije $f(x) = x^2$. Koeficijent smjera sekante dobivamo računajući kvocijent $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ prirasta funkcije i prirasta argumenta:

$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2,$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x.$$

Pustivši da Δx teži nuli dobivamo nagib $2x_0$.

Tako, primjerice, nagib u točki grafa s apscisom -1 iznosi -2, nagib u točki grafa s apscisom 3 je 6 itd. Izračunavši nagib možemo napisati jednadžbu tangente koristeći formulu za jednadžbu pravca koji prolazi zadanom točkom i ima poznati koeficijent smjera

$$y - y_0 = k(x - x_0) = 2x_0(x - x_0).$$

Tako imamo, primjerice:

apscisa	ordinata	nagib	tangenta
$x = -1$	$y = 1$	$k = -2$	$y - 1 = -2(x + 1)$
$x = 1$	$y = 1$	$k = 2$	$y - 1 = 2(x - 1)$
$x = 3$	$y = 9$	$k = 6$	$y - 9 = 6(x - 3)$

Zadatak 1. Zadana je funkcija $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 3$. Odredi nagib tangente
1) u točki $(2, 3)$, **2)** u bilo kojoj točki (x_0, y_0) na grafu te funkcije.

Zadatak 2. U kojoj točki na grafu funkcije $f(x) = -x^2 + x$ nagib iznosi 3?

Problem brzine

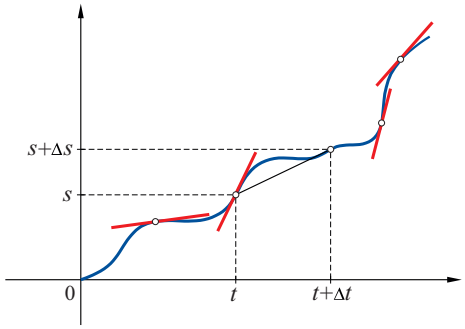
Odgovor na pitanje što je brzina nije jednostavan. O tome izvrsno govori prepirka između policajca i vozačice koja se može pročitati u znamenitim *The Feynman Lectures in Physics* američkog nobelovca R. P. Feynmana:

– Gospođo, vi ste prekršili pravila vožnje kroz grad. Vozili ste brzinom od 90 km/h.
– Oprostite, to nije moguće. Kako sam mogla voziti 90 kilometara na sat, kad vozim tek sedam minuta?
– Radi se o tome, gospođo, da biste za jedan sat prešli 90 km kad biste nastavili voziti na isti način.
– Kad bih ja nastavila voziti kako sam vozila još cijeli sat, naletjela bih na zid na kraju ulice!
– Ali, pa... i vaš brzinomjer pokazivao vam je 90 km/h!
– Moj je brzinomjer pokvaren i odavno ne radi.

Ako automobil prijeđe put od 120 km za 2 sata, njegova je prosječna brzina 60 km/h. To dakako ne znači da je ta brzina bila konstantna duž cijelog puta. Ona se tijekom putovanja mijenjala (brzina je funkcija vremena!), a prosječnu vrijednost dobili smo dijeljenjem prijeđenog puta vremenom provedenim na putu.

Na sličan način možemo dobiti i prosječnu brzinu na nekom manjem dijelu puta. Smanjujemo li dio puta, odnosno promatrajući sve kraće vremenske intervale, očekujemo da će prosječna brzina biti sve bliža trenutačnoj brzini.

Nacrtajmo s-t dijagram prijeđenog puta koji opisuje ovisnost prijeđenog puta s o vremenu t. Graf funkcije $t \mapsto s(t)$ nalik je ovakvome:



Na slici je graf prijeđenog puta u ovisnosti o vremenu. Što je nagib krivulje veći, to je automobil u jednakim vremenskim intervalima prevaljivao veći dio puta. Tu je i njegova brzina bila veća. Dakle, iznos brzine ovisan je o nagibu grafa ove funkcije.

U vremenskom intervalu $[t_0, t_0 + \Delta t]$ automobil je prevalio put od $s_0 = s(t_0)$ do $s_0 + \Delta s = s(t_0 + \Delta t)$. Prosječna brzina u tom vremenskom intervalu je

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Smanjivanjem duljine Δt vremenskog intervala, ova prosječna brzina postaje sve bliža trenutačnoj brzini u trenutku t_0.

Ilustrirajmo taj prijelaz na poznatim formulama koje opisuju slobodni pad tijela. Ovisnost prijeđenog puta o vremenu lako je mjeriti: dovoljno je tijelo puštati da pada s različitih visina i mjeriti ukupno vrijeme pada. Teže je odgovoriti na pitanje: kolika je brzina tijela pri padu?

Primjer 5.

Mjerenjem je utvrđeno da je prevaljeni put tijela koje slobodno pada u vakuumu dan formulom

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

gdje je t vrijeme slobodnog pada. Kolika je brzina tijela u tom trenutku?

Računajmo prosječnu brzinu u vremenskom intervalu od t do $t + \Delta t$:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}g(t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{\Delta t} = gt + \frac{1}{2}g \cdot \Delta t.$$

Promatramo li sve kraće vremenske intervale, tada je $\Delta t \to 0$ i *prosječna brzina postaje trenutačna brzina* u trenutku t:

$$v(t) = gt.$$

Primjeri s tangentom i brzinom vode nas do istih izraza, promatranja limesa kvocijenta $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ kad Δx teži nuli.

Derivacija funkcije

Derivacija funkcije f u točki x_0 je broj:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

ako ovaj limes postoji. Taj je broj jednak nagibu k tangente na graf $y = f(x)$ u točki (x_0, y_0):

$$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha,$$

α je kut što ga tangenta zatvara s pozitivnim dijelom x-osi.

Za funkciju f kažemo da je **derivabilna** u točki x_0 ako postoji $f'(x_0)$. Funkcija je **derivabilna** (**diferencijabilna**) **na intervalu** $\langle a, b \rangle$ ako u svakoj točki tog intervala postoji derivacija $f'(x_0)$. Tada je na intervalu $\langle a, b \rangle$ definirana funkcija f' koju nazivamo **derivacija** funkcije f.

Derivaciju još označavamo simbolima

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

Postoji li derivacija po volji odabrane funkcije u bilo kojoj njezinoj točki? Odgovor na ovo pitanje je: ne! Da bi funkcija imala derivaciju, ona mora zadovoljavati neke uvjete. Ne ulazeći u detalje, istaknimo jedan nužan uvjet.

Nužan uvjet za postojanje derivacije

Da bi funkcija imala derivaciju u nekoj točki, ona mora u toj točki biti neprekinuta.

Dokaz. Ako funkcija ima derivaciju u točki x, onda postoji limes:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Nazivnik ovog izraza teži nuli. Da bi limes postojao, i brojnik mora težiti nuli. Zato je

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x),$$

što znači da je f neprekinuta u točki x.

Ovaj je uvjet nužan, ali ne i dovoljan. To znači da obratna tvrdnja nije istinita; funkcija koja je neprekinuta ne mora imati derivaciju u toj točki.

Pokazat ćemo u nastavku da su sve elementarne funkcije (poput polinoma, eksponencijalne i logaritamske funkcije, trigonometrijskih funkcija i sl.) derivabilne u svim točkama u kojima su definirane.

Primjer 6.

Navedimo primjer funkcije koja je neprekinuta, a nema derivaciju u nekoj točki.[1] Neka je $f(x) = |x-2|$. Ona je neprekinuta u svakoj točki. Tvrdimo da nema derivaciju u točki $x_0 = 2$. Računamo:

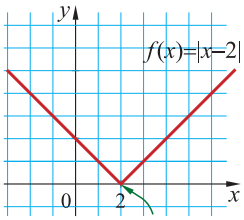
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{|2+\Delta x - 2| - 0}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Zato je

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1, \qquad \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

i ne postoji $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, tj. funkcija nema derivaciju u točki 2.

Sa slike grafa ove funkcije vidi se zbog čega derivacija u toj točki ne postoji.

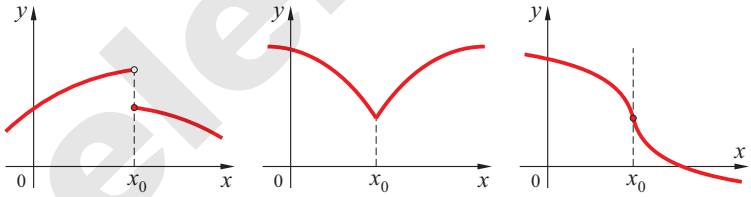


U ovoj točki ne postoji derivacija.

Izdvojimo sljedeće tri situacije u kojima funkcija nema derivaciju u točki x_0:

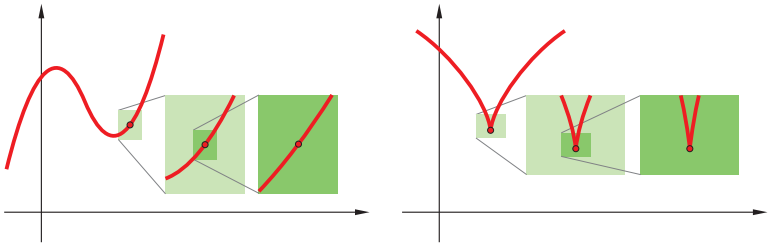
1) Funkcija je prekinuta u x_0.
2) Funkcija ima šiljak u x_0.
3) Funkcija ima vertikalnu tangentu u točki x_0.

Sljedeća slika ilustrira te situacije:



Funkcija nema derivaciju u točki x_0.

Ponašanje funkcije u točki u kojoj ona ima derivaciju i u šiljku bitno se razlikuje. Ako je funkcija diferencijabilna, onda se zornijim promatranjem njezinog grafa u okolini te točke uočava da graf funkcije sve više nalikuje na pravac (tangentu u toj točki). Ako je šiljak u pitanju, on će se jasno vidjeti pri svakom povećanju.



Prikazane su uvećane slike funkcije diferencijabilne u točki x_0 i one koja u toj točki ima šiljak.

[1] U visokoškolskoj matematici daju se primjeri funkcija koje su neprekinute, a nemaju derivaciju niti u jednoj točki! Konstrukcija takvih funkcija je složena.

Povijesni kutak

Dio matematike koji se temelji na pojmu derivacije naziva se *diferencijalni račun*. Osnivačima diferencijalnog računa drže se veliki matematičari I. Newton i G. W. Leibniz. Newton je do pojma derivacije došao preko fizikalnog modela brzine. On je rabio oznaku $\dot{s}$ koja se i danas koristi za označavanje derivacija po varijabli koja predstavlja vrijeme. Leibniz je do pojma derivacija došao preko problema tangente.

SIR ISAAC NEWTON

Sir Isaac Newton, (Woolsthorpe, 25. prosinca 1642. – Kensington, 20. ožujka 1727.) engleski je fizičar, matematičar i astronom. Po završetku studija u razdoblju od tri godine (1665. – 1667.) došao je do nekoliko otkrića fundamentalne važnosti iz različitih područja znanosti. U matematici je postavio osnove diferencijalnog i integralnog računa. Newton je nazivao derivaciju fluksacijom, od latinskog *fluere* – teći. Osnivač je suvremene mehanike (Newtonovi zakoni), otkriva principe gravitacijske sile, kao i neke temeljne zakone optike. 1668. izradio je prvi teleskop na principu refleksije. 1672. objavljuje djelo *New Theory about Light and Colour*. Međutim, temeljne radove iz matematike i astronomije — model gibanja nebeskih tijela — objavio je tek na nagovor prijatelja punih dvadeset godina nakon njihova nastanka u djelu *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, za koje se drži da je najveći pojedinačni doprinos znanosti.

GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ

Gottfried Wilhelm von Leibniz (Leipzig, 1. srpnja 1646. – Hanover, 14. studenoga 1716.) njemački filozof i matematičar, osnivač Berlinske akademije znanosti. 1661. upisao je pravni fakultet, a uz pravo studirao je filozofiju i matematiku. Doktorirao je 1666., a nakon toga je radio u diplomatskoj službi. Na brojnim putovanjima upoznao se s mnogim matematičarima svoga doba i njihovim radovima. U isto vrijeme kad i Newton utvrdio je osnove diferencijalnog i integralnog računa. Autor je većine matematičkih simbola i oznaka diferencijalnog i integralnog računa kakve danas koristimo. Za derivaciju je rabio oznaku dy. Uveo je pojam diferencijala po kojem se i čitav račun naziva diferencijalni račun. On ga je tretirao kao ‘beskonačno mali prirast’. U njegovim se radovima po prvi put pojavljuje i teorija algoritama. Otkrio je pojam binarnog sustava i izumio stroj za računanje složeniji od Pascalova.

Zadatci 4.1.

1. Neka je $f(x) = \ln x$.

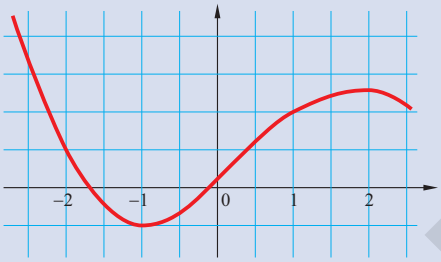
1) Nacrtaj precizno graf te funkcije i njezinu tangentu u točki $A(2, \ln 2)$.

2) Procijeni sa slike nagib te tangente.

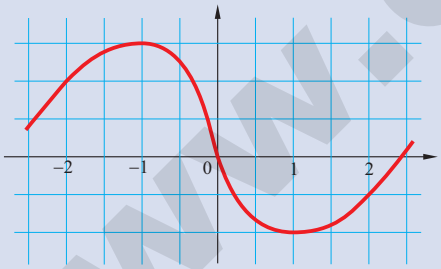
3) S pomoću kalkulatora odredi nagib sekante AB ako je B točka na grafu te funkcije s apscisom 1.5; 1.9; 1.99; 1.999 a zatim 2.5; 2.1; 2.01; 2.001;

4) Na temelju tih rezultata procijeni nagib tangente u točki A.

2. Derivacija funkcije u nekoj točki jednaka je nagibu tangente na graf funkcije u toj točki. S grafa funkcije f na slici očitaj približne vrijednosti derivacije: $f'(-2)$, $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$.



3. S grafa funkcije f na slici očitaj približne vrijednosti derivacije: $f'(-2)$, $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$.



4. Izračunaj kvocijent $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ za funkciju f u zadanoj točki x_0:

1) $f(x) = x^2 - 3x + 1$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, u bilo kojoj točki $x_0 \in \mathcal{D}_f$;

2) $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, u bilo kojoj točki $x_0 \in \mathcal{D}_f$;

3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, u bilo kojoj točki $x_0 \in \mathcal{D}_f$;

4) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, u bilo kojoj točki $x_0 \in \mathcal{D}_f$;

5) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, u bilo kojoj točki $x_0 \in \mathcal{D}_f$.

5. Izračunaj $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ za funkciju f u zadanoj točki x_0.

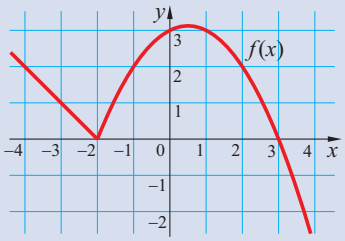
1) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, u bilo kojoj točki $x_0 \in \mathcal{D}_f$;

2) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, u bilo kojoj točki $x_0 \in \mathcal{D}_f$;

3) $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, u bilo kojoj točki $x_0 \in \mathcal{D}_f$.

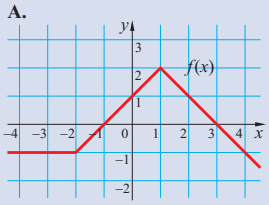
6. Pokaži da je nagib tangente u točki (x_0, y_0) na grafu funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ jednak $2ax_0 + b$.

7. Na slici je nacrtan graf funkcije f:

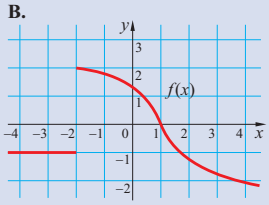


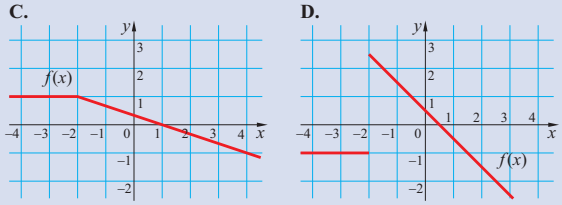
Na kojoj je od sljedećih slika nacrtan graf njezine derivacije $f'(x)$?

A.

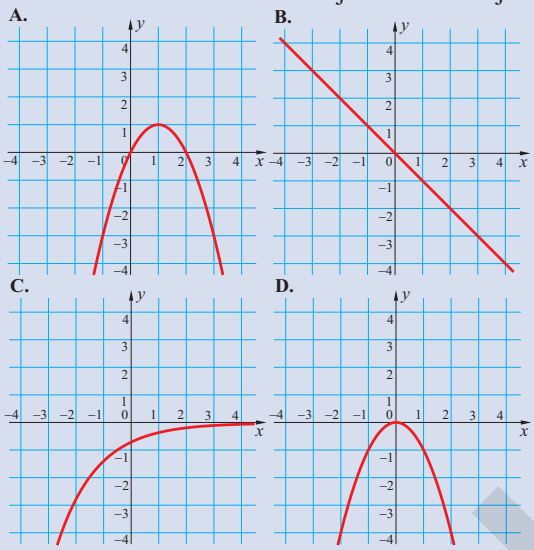


B.

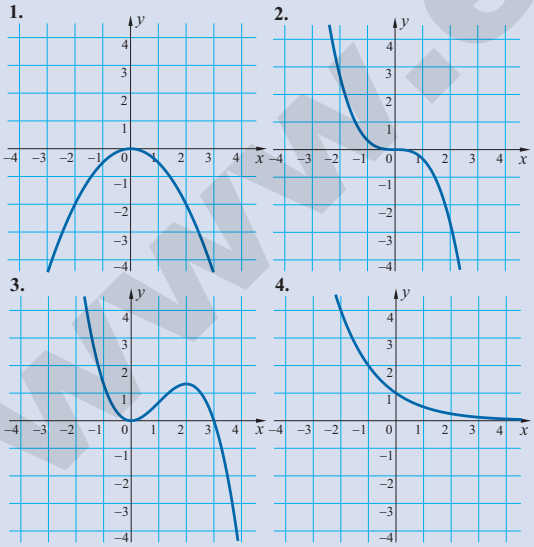




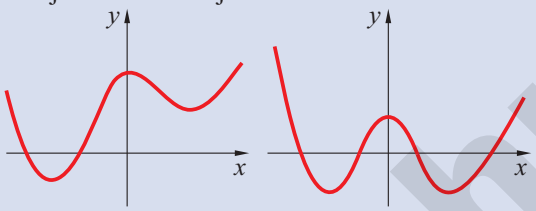
8. Na slici su nacrtane derivacije nekih funkcija:



a na slici dolje su grafovi odgovarajućih funkcija u nekom drugom poretku. Poveži funkcije i njihove derivacije!



9. Precrtaj grafove ovih funkcija i skiciraj grafove njihovih derivacija.



10. Neko se tijelo giba po zakonu $s(t) = 4t - t^2$. Koliki put ovo tijelo prijeđe u vremenu od $t = 1$ s do $t = 1.5$ s? Odredi srednju brzinu gibanja u tom intervalu.

11. Tijelo se giba jednoliko po pravcu prema zakonu **a)** $s = 20 + 3t$; **b)** $s = 10 + 2t + 0.2t^2$, gdje je t vrijeme izraženo u sekundama, a s put u metrima. Kolika je:

1) srednja brzina u vremenskom intervalu [2,5];

2) srednja brzina u vremenskom intervalu [2,3];

3) trenutna brzina u trenutku $t = 2$?

12. Tijelo bačeno uvis brzinom $v_0 = 5$ m/s kreće se po zakonu $s(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$. U kojem je trenutku njegova brzina jednaka 2 m/s? U kojem je trenutku ona jednaka nuli? Kolikom će brzinom tijelo pasti na tlo?

13. Dizalo se nakon pokretanja giba po zakonu $s(t) = 1.5t^2 + 2t + 12$. Nađi trenutačnu brzinu dizala.

4.2. Derivacija funkcije. Pravila deriviranja

Postupak određivanja derivacije neke funkcije nazivamo **deriviranjem**. Izračunat ćemo derivacije elementarnih funkcija i naučiti neka osnovna pravila deriviranja.

Postupak računanja derivacije

Računanje derivacije funkcije odvija se u trima bitnim koracima.

Računanje derivacije

1. Izračuna se vrijednost $f(x+\Delta x)$.
2. Izračuna se kvocijent $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.
3. Izračuna se limes $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Odredimo derivacije nekih funkcija. Za početak izvedimo dva jednostavna pravila za deriviranje konstante i deriviranje umnoška konstante i funkcije.

Derivacija konstante

Ako je c konstanta, a f derivabilna funkcija, onda vrijedi

$$(c)' = 0,$$
$$(cf)' = c \cdot f'.$$

Dokaz. Izračunajmo limese kvocijenta $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Za konstantnu funkciju $f(x) = c$ vrijedi $f(x+\Delta x) = c$, te je

$$\Delta y = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{c-c}{\Delta x} = 0$$

i zato je $f'(x) = 0$ u svakoj točki x.

Za funkciju $x \mapsto cf(x)$ imamo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x} = c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = c \cdot f'(x).$$

Primjer 1.

Derivacija funkcije $f(x) = kx + l$. Imamo

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{k(x+\Delta x) + l - kx - l}{\Delta x} = k,$$

te je

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$$

u svakoj točki x.

Derivacija afine funkcije je konstanta i jednaka koeficijentu smjera pripadnog pravca. Posebice, derivacija identiteta $f(x) = x$ je $x' = 1$.

Primjer 2.

Derivacija funkcije $f(x) = x^2$. Računajmo u trima koracima:

1) $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$

3) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$

Dakle, $(x^2)' = 2x$.

Zadatak 1. Odredi derivaciju funkcije $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

Primjer 3.

Derivacija funkcije $f(x) = x^3$. Računajući na isti način imamo:

1) $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3,$

2)
$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\\ &= \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}\\ &= 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2,\end{aligned}$$

3) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2\right) = 3x^2.$

Dakle, $(x^3)' = 3x^2$.

Pokazat ćemo kasnije da *za svaki realni broj* n vrijedi:

Derivacija potencije

Funkcija $f(x) = x^n$, $n \in \mathbf{R}$, $n \neq 0$ ima derivaciju

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{1}$$

Derivacija funkcije $f(x) = 1/x$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}. \tag{2}$$

Primjenjujući formulu (1) za derivaciju potencije računali bismo ovako:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = (-1)x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Uvjerimo se u to računajući derivaciju ove funkcije po definiciji. Za $x \neq 0$ vrijedi:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{1}{x+\Delta x} - \dfrac{1}{x}}{\Delta x} = \frac{x-(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)\cdot x\cdot \Delta x} = \frac{-1}{(x+\Delta x)x} \to -\frac{1}{x^2}$$

kad $\Delta x \to 0$.

Derivacija funkcije $f(x) = \sqrt{x}$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \tag{3}$$

Primjenjujući formulu (1) za derivaciju potencije računali bismo ovako:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

Opravdajmo tu formulu računajući po definiciji. Vrijedi

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\cdot\frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} \to \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

kada $\Delta x \to 0$. Derivacija f' definirana je na intervalu $\langle 0, \infty\rangle$, a funkcija f na intervalu $[0, \infty\rangle$. Nacrtajte sliku funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ i uočite zbog čega ne postoji derivacija u nuli.

Izraze za derivacije funkcija $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ i $x \mapsto \sqrt{x}$ treba zapamtiti zbog njihovih važnosti bez izvođenja iz općenite formule (1).