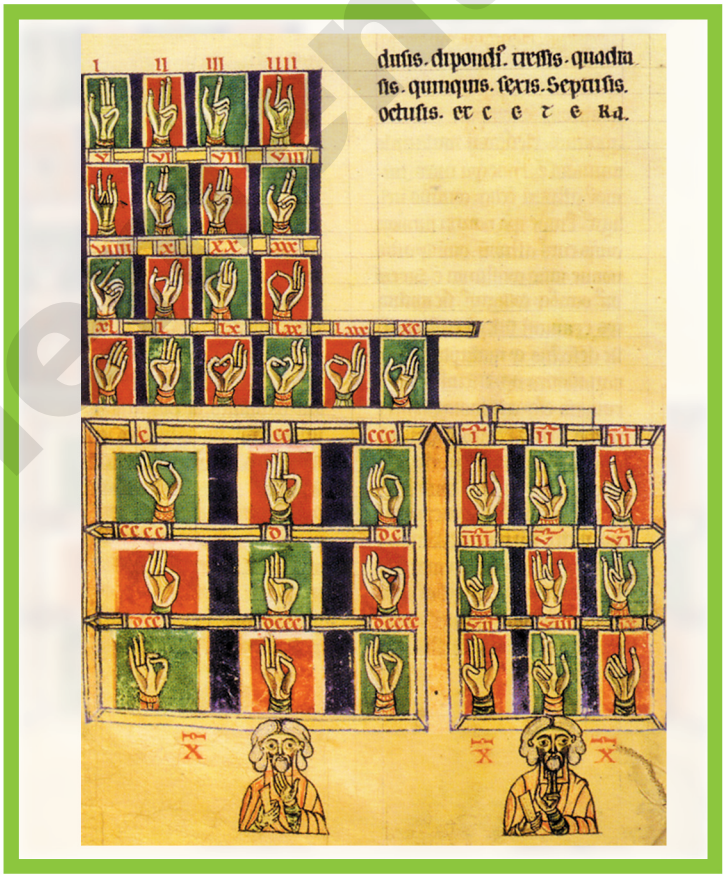
1 Brojevi



Sustav brojenja na prste,
De numeris. Codex Alcobacense,
Rabanus Maurus (780. – 856.)

Upitate li nekoga, kome matematika i nije osobito bliska, čime se matematičari bave, možete očekivati odgovor: ***brojevima****! I premda baš i nije točan, odgovor nije neobičan. Jer, prva iskustva s matematikom u svakog su čovjeka vezana uz brojeve i računanje. A još ne tako davno, prvoškolski su se udžbenici iz matematike zvali* ***Računice****. Kada su ljudi počeli rabiti brojeve? Na ovo pitanje nemoguće je dati odgovor. Brojevi i njihovo zapisivanje nastajali su i razvijali se u dugotrajnom povijesnom procesu*[1].

U ovom poglavlju dat ćemo pregled skupova brojeva koje smo do sada upoznali.

1.1. Prirodni i cijeli brojevi

Prirodni brojevi su brojevi 1, 2, 3, 4, 5... Njima se služimo pri brojenju ili prebrajanju. Prirodnim brojem iskazujemo brojnost nekog skupa, odgovaramo na pitanje **koliko** je u skupu članova.

Postoji najmanji prirodni broj, to je broj 1. Ne postoji najveći prirodni broj. Iza ma kako velikog prirodnog broja n slijedi veći $(n+1)$ što znači da je skup prirodnih brojeva **beskonačan**.

Skup prirodnih brojeva

Skup **prirodnih brojeva** označavamo s $\mathbf{N}$.

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n \ldots\}.$$

Istražite

PROSTI BROJEVI

Prirodni broj koji osim samoga sebe i broja 1 nema drugih djelitelja zove se **prost** ili **primbroj**. Evo svih prostih brojeva koji su manji od 100:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Nastavi ovaj niz ispisujući sve proste brojeve manje od 200. Što misliš, ima li tom ispisivanju kraja? Je li skup prostih brojeva beskonačan?

Starogrčki matematičar i fizičar Eratosten "pronalazio" je proste brojeve postupkom *prosijavanja*. Istraži o kakvom je postupku riječ. Posjeti u svrhu traganja za odgovorom `http://element.hr/plus/autosieve/medium`.

[1] Vidjeti prezentaciju *O podrijetlu brojeva*, `www.element.hr/plus` (Matematika plus).

Povijesni kutak

KAKO SU BROJEVE ZAPISIVALI NAŠI PREDCI?

Tijekom ljudske povijesti u raznim društvenim zajednicama razvili su se različiti zapisi prirodnih brojeva. Razlikujemo **pozicijski** i **nepozicijski sustav zapisa**.

U nepozicijskom svaka znamenka nosi istu brojevnu vrijednost bez obzira na njezino mjesto (poziciju) u zapisu broja. Jedan je takav primjer i rimski zapis. Primjerice, CCXXIX znači broj $100 + 100 + 10 + 10 + (10 - 1) = 229$. Znak C uvijek nosi brojevnu vrijednost 100, a znak X vrijednost 10.

U pozicijskim sustavima, kakav je i ovaj naš suvremeni, upravo je obrnuto. Znamenke nose brojevne vrijednosti koje ovise o njihovu položaju (poziciji) u zapisu. Tako primjerice, 333 znači $3 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 3$. Dakle, prva trojka znači 300, druga 30, a treća 3 jedinice.

Druga bitna karakteristika zapisa prirodnog broja jest njegova **osnovica** ili **baza**. Danas se u cijelom svijetu rabi **dekadski** brojevni sustav kojemu je osnovica 10. Vjerojatni razlog je taj što čovjek na obje ruke ima ukupno 10 prstiju. Postoje i brojevni sustavi s drugim osnovicama, primjerice binarni na kojem počiva rad elektroničkih računala.

Pri zapisivanju brojeva nerijetko su se uzimala slova pisma. Tako je primjerice u rimskom i grčkom zapisivanju, ali i u staroslavenskoj glagoljici koja se u hrvatskim krajevima zadržala gotovo 10 stoljeća.

Istražite:

1. Kako su brojeve zapisivali i s njima računali stari Rimljani?
2. Kako su naši predci zapisivali brojeve koristeći se glagoljicom?
3. Navedite još neki primjer nedekadskog brojevnog sustava. Možete li opisati osnovne značajke binarnog brojevnog sustava?

Zbroj dvaju prirodnih brojeva uvijek je prirodan broj. Kažemo da je skup prirodnih brojeva **zatvoren** s obzirom na zbrajanje. A je li zatvoren s obzirom na oduzimanje? Drugim riječima, je li razlika $m - n$ dvaju prirodnih brojeva uvijek prirodni broj? Ne, razlika dvaju prirodnih brojeva od kojih je prvi manji ili jednak drugom nije prirodan broj. To je razlog za proširenje skupa $\mathbf{N}$ negativnim cijelim brojevima i nulom.

Negativni cijeli brojevi su se "udomaćili" u našoj svakodnevnici. Njima zapisujemo temperaturu ispod ništice, visinu vodostaja rijeke koja je manja od one iskazane nulom, dubinu mora, stanje na tekućem ili nekom drugom bankovnom računu itd.

Prirodni brojevi zajedno s negativnim cijelim brojevima i nulom čine skup cijelih brojeva.

Skup cijelih brojeva

Skup cijelih brojeva označavamo sa $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots\}$$

Zadatak 1. Nadmorska visina

Mrtvo more je jezero površine 600 km^2. Nadmorska visina njegove površine iznosi -418 m. Dno jezera doseže -794 m. *The Challenger Deep* najniža je točka na Zemlji, a nalazi se u Tihom oceanu na južnom dijelu Marijanske brazde na nadmorskoj visini $-10\,971$ m. Najviša točka iznad razine mora je *Mount Everest* na granici Tibeta i Nepala. Njezina je nadmorska visina 8848 m.

Planinski vrh *Chimborazo* u Ekvadoru je najudaljenija točka od središta Zemlje. Ta udaljenost iznosi 6384.4 km što je za oko 2 km udaljenije nego *Mount Everest*. Posljedica je činjenice da Zemlja nije sfera već je spljoštena na polovima, a *Chimborazo* je u blizini ekvatora.

1) Kolika je najveća dubina Mrtvog mora?

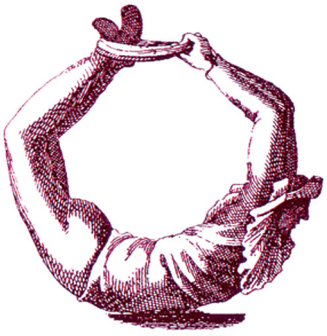
2) Kolika je razlika između nadmorskih visina najniže i najviše točke na Zemlji?

3) Kolika je udaljenost *Mount Everesta* od središta Zemlje?

Za radoznale

PRIČA O NULI

Nula, naoko ništa neobično, broj kao i svaki drugi! Je li uistinu tako? Pogledajmo ove jednakosti:



$$a+0=a, \quad a\cdot 0=0, \quad a-a=0, \quad a^0=1.$$

S nulom se ne smije dijeliti, učimo još u osnovnoj školi. A zašto? Iz $\frac{a}{0}=b$ slijedi $a=b\cdot 0$, pa imamo ove dvije mogućnosti:

(1) ako je $a=0$, onda je $0=b\cdot 0$ i ta je jednakost ispunjena za svaki broj b. Dakle, dijeljenje je tada **neodređeno**. Rezultat dijeljenja je bilo koji broj b;

(2) ako je $a\neq 0$, jednakost $a=b\cdot 0$ nije ispunjena niti za jedan broj b. Naime, s njezine lijeve strane je broj različit od nule, a s desne nula. U ovom slučaju dijeljenje nije definirano, ono **nije moguće**.

Nula je cijeli broj. Ona nije prirodni broj **po definiciji**.

Prema nekim povjesničarima matematike nulu su uveli Kinezi. Neki drugi pripisuju njezinu pojavu indijskim matematičarima iz 6. st., od kojih potječe i njezina suvremena oznaka. Njezin je naziv latinskog podrijetla (lat. *nullus* = nijedan).

Kutak plus

GAUSSOVA DOSJETKA

Gauss kao osmogodišnji dječak

Danas, kad gotovo u svakom džepu imamo kalkulator (ne zaboravite da ga imate i na svojem mobilnom telefonu) manje je važno računanje "napamet", ali su dosjetke i snalažljivost u računanju vještine koje će uvijek biti na cijeni. Jedna je takva, osobito popularna dosjetka vezana uz ime njemačkog matematičara Carla Friedricha Gaussa (1777. – 1855.), često nazivanog *princeps mathematicorum* (lat. princem svih matematičara).

Kad je Gauss bio prvoškolac, njegov je učitelj zadao učenicima da izračunaju zbroj prvih 100 prirodnih brojeva. Želio ih je zaposliti na neko vrijeme kako bi imao malo mira, ali se nemalo iznenadio jer je već nakon minutu-dvije Gauss dojavio da ima rješenje.

Dobio ga je združivši brojeve u parove, prvi s posljednjim $(1+100)$, drugi s pretposljednjim $(2+99)$, treći s pretpretposljednjim $(3+98)$ itd. Takvih parova je 50, a zbroj dvaju pribrojnika u svakom paru je isti, iznosi 101. Konačan je rezultat $50 \cdot 101 = 5050$.

Opisani se Gaussov postupak može proširiti na zbroj ma koliko prvih prirodnih brojeva te se tako dobije:

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Provjeri ovu jednakost za neke brojeve n.

Na isti način možemo računati i zbroj prvih n parnih brojeva. No kad već imamo izvedenu formulu za zbroj prvih n prirodnih brojeva, $S(n)$, možemo postupiti i na ovaj način:

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1).$$

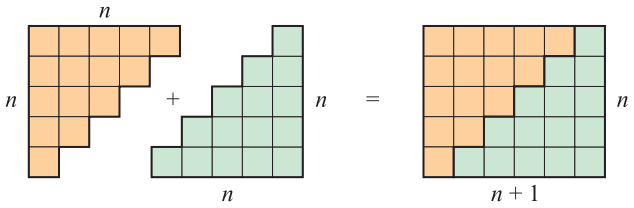
Riješi zadatke:

1. Izračunaj zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva.
2. Koliko je $1 + 4 + 7 + \ldots + 100$?
3. Koliki je zbroj svih troznamenkastih brojeva koji pri dijeljenju s 5 daju ostatak 3?
4. Zbroj prvih n prirodnih brojeva je 3003. Koliki je n?
5. Broj $\frac{n(n+1)}{2}$ je prirodan broj za svaki prirodni broj n. Zašto? Kojom znamenkom može taj broj završavati? Postoji li takav n za koji je $1 + 2 + 3 + \ldots + n = 5555$?

Bez riječi

Sljedeće sličice ilustriraju Gaussovu dosjetku u geometrijskoj izvedbi. Možete li je protumačiti?

Želite li se potanje pozabaviti ovom temom, upućujemo vas na `www.element.hr/plus`.



Zadatci 1.1.

1. **1)** Zapiši prirodni broj koji neposredno slijedi iza prirodnog broja n.

2) Zapiši prirodni broj koji neposredno prethodi prirodnom broju $n-2$. Kad zadatak ima rješenje?

3) Zapiši broj koji je za 2 veći od zbroja brojeva m i n.

4) Zapiši broj koji je dvostruko veći od razlike brojeva a i b.

5) Zapiši broj koji je tri puta manji od umnoška brojeva a i b.

2. Ispiši:

1) sve cijele brojeve koji su između cijelih brojeva $k-1$ i $k+5$;

2) sve neparne cijele brojeve koji su veći od $2k-1$ i manji od $2k+7$, gdje je k cijeli broj;

3) sve parne cijele brojeve veće od $2k-5$ i manje od $2k+1$, gdje je k cijeli broj.

3. Marko je dvostruko stariji od Filipa, a Filip je 3 godine stariji od Luke. Ako je Luki n godina, koliko ukupno godina imaju sva trojica?

4. Zamisli neki broj. Dodaj mu 1 pa zbroj pomnoži s 4. Zatim oduzmi 4 pa dobiveni rezultat podijeli s 4. Koji je broj rezultat?

Ponovi ovaj postupak nekoliko puta. Što primjećuješ? Obrazloži!

5. Neka je d dan, a m mjesec rođenja tvojeg prijatelja. Evo kako ćeš odrediti koji je dan njegov rođendan. Zadaj mu neka provede sljedeći račun:

— *Podvostruči broj d.*

— *Pomnoži dobiveni rezultat s 10.*

— *Dodaj 73.*

— *Pomnoži s 5.*

— *Dodaj broj m.*

Neka ti sada prijatelj kaže rezultat koji je dobio. Oduzmi krišom od tog rezultata broj 365 i dobit ćeš datum njegovog rođenja.

Obrazloži matematičku pozadinu ovog općeg rješenja.

6. Neka tvoj prijatelj broj svojih godina starosti pomnoži s 4. Tom broju neka doda 10 pa rezultat pomnoži s 25. Neka potom od dobivenog rezultata oduzme broj dana u neprestupnoj godini. Konačno, neka razlici doda iznos sitniša u lipama koji ima u svojem džepu (svakako neka je manji od 100). Nakon ovog računa zahtijevajte da vam kaže rezultat. Dodat ćemo tom rezultatu 115 i očitati: prve dvije znamenke su godine, a sljedeće dvije iznos sitniša u džepu vašeg prijatelja. Možete li razobličiti ovu "čaroliju"?

7. Na polici se nalazi šest svezaka *Opće enciklopedije*, poredanih slijeva u desno, jedan do drugog. Svaki svezak ima 515 stranica ne računajući korice.

1) Koliko ukupno stranica ima *Opća enciklopedija*?

2) Koliko stranica ima između 313. stranice drugog sveska i 127. stranice petog?

3) Brojimo li stranice enciklopedije redom te izbrojimo 1784, u kojem svesku i na kojoj stranici smo se zaustavili?

4) Brojimo li stranice enciklopedije redom, ali otraga prema naprijed te se zaustavimo na broju 3000, u kojem svesku i na kojoj stranici smo se zaustavili?

8. Među brojevima 1, 2, 3, . . . , 9 odaberi dva međusobno različita broja. Ispiši sve dvoznamenkaste brojeve kojima su znamenke ti brojevi, te ih zbroji. Taj je zbroj uvijek djeljiv s 22. Zbog čega? Obrazloži! Možeš li provesti analogno zaključivanje za tri odabrana broja?

Napomena: Dvoznamenkast broj $\overline{xy}$ zapisujemo u obliku $10x+y$. Jednako je tako $\overline{xyz} = 100x+10y+z$.

9. Broj 100 zapiši povezujući računskim operacijama

1) četiri jedinice; **2)** četiri trojke;

3) četiri petice.

10. Ispiši redom brojeve 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Poveži te brojeve znakovima $+$ i $-$ (koristeći ih ukupno triput) tako da dobiješ 100.

11. Zapiši broj 100 uporabom svih 10 znamenki i uporabom četiriju osnovnih računskih operacija.

12. Riješi rebus:

$$\begin{array}{cccccc} & O & H & O & H & O \\ + & A & H & A & H & A \\ \hline A & H & A & H & A & H \end{array}$$

13. Odredi četiri uzastopna prirodna broja kojima je zbroj jednak $1\,258$.

14. Zbroj pet uzastopnih parnih prirodnih brojeva jednak je $6\,080$. Koji su to brojevi?

15. Zbroj sedam uzastopnih neparnih prirodnih brojeva jednak je 581. Koliki je zbroj sedam narednih neparnih prirodnih brojeva?

16. Umnožak triju uzastopnih prirodnih brojeva jednak je 4080. Koliki je zbroj tih triju brojeva?

17. Koja je posljednja znamenka umnoška

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 99?$$

18. S koliko nula završava umnožak $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 33$?

19. Koja je posljednja znamenka umnoška prvih stotinu prostih brojeva?

20. Prepiši, pa umjesto kvadratića upiši broj tako da dobiješ točne jednakosti:

1) $-11 + \square = -24$;

2) $\square - (-45) = 13$;

3) $23 + \square = -1$;

4) $\square + (-17) = -34$;

5) $33 - (-44) = \square$;

6) $-75 - 28 = \square$;

7) $-61 + \square = 77$;

8) $\square - (-111) = -205$.

21. Izračunaj:

1) $-5 \cdot (2 - 11) - 4 \cdot (3 - 12)$;

2) $2 \cdot (-3) - 4 \cdot (-5) + (-6) \cdot (-7)$;

3) $(-12) \cdot (-11) - (-10) \cdot (-15)$;

4) $-12 \cdot (-3) - 5 \cdot 14 - 11$.

22. Računamo: $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \ldots$ Ako imamo konačan broj pribrojnika, recimo n, koliki je rezultat ovog zbrajanja?

23. Najviša ikad izmjerena temperatura zraka na Zemlji zabilježena je u Libiji 13.9.1922. Iznosila je $57.8\ ^\circ\mathrm{C}$ ili $136\ ^\circ\mathrm{F}$. Najniža je izmjerena na Antarktici (Vostok Station) 12.1.1983., kada je termometar pokazivao $-89.2\ ^\circ\mathrm{C}$ ili $-128.6\ ^\circ\mathrm{F}$.

Kolika je razlika između najniže i najviše temperature ikad izmjerene na Zemlji?

U Hrvatskoj je do sada najviša izmjerena temperatura iznosila $42.8\ ^\circ\mathrm{C}$ ili $109\ ^\circ\mathrm{F}$, a izmjerena je 5.8.1998. u Pločama. Najniža temperatura izmjerena je u Čakovcu 3.2.1929., a bilo je $-35.5\ ^\circ\mathrm{C}$ ili $-31.5\ ^\circ\mathrm{F}$.

Kolika je razlika između najviše i najniže izmjerene temperature u Hrvatskoj?

24. Arhimed je živio od 287. g. pr. Kr. do 212. g. pr. Kr. To bismo jednostavnije mogli zapisati: Arhimed je živio od $-287.$ do $-212.$ g. Koliko je godina poživio Arhimemed? Odgovori na isto pitanje za sljedeće matematičare:

Tales je živio od $-620.$ do $-540.$ godine.

Vitruvije je živio od $-75.$ do 15. godine.

Heron je živio od 10. do 70. godine.

Iz zabavne matematike

LEWIS CARROLL

Lewis Carroll, čuven po svojim knjigama o Alisi, pseudonim je Charlesa Dodgsona, engleskog matematičara, profesora na *Christ Churchu*, najvećem koledžu Sveučilišta u Oxfordu. Carroll je rado zabavljao svoje prijatelje raznim igrama s brojevima.

Evo jedne od njih:

Igru igraju dva igrača. Polazeći od broja 1 oni naizmjence dodaju prirodne brojeve po volji, ali svaki puta ne veći od 10. Pobjednik je onaj koji prvi dosegne broj 100. Kako treba igrati neki igrač kako bi pobijedio u ovoj igri?

1.2. Djeljivost. Prosti brojevi

Količnik dvaju prirodnih brojeva nije uvijek prirodan broj. Tako primjerice broj $\frac{54}{8}$ nije prirodan, jer 54 *nije djeljiv s* 8. Broj $\frac{221}{13}$ jest prirodan, jer 221 *jest djeljiv* s 13.

Djeljivost prirodnih brojeva

Kažemo da je prirodni broj b **djeljiv** prirodnim brojem a ako postoji prirodni broj k takav da je

$$b = k \cdot a.$$

Govorimo još da a dijeli b i pišemo

$$a \mid b.$$

Za broj a kažemo da je **djelitelj** ili **mjera** broja b. Broj b naziva se **višekratnikom** broja a.

Primjer 1.

Neka je $b = 15$. Mjere broja b su prirodni brojevi 1, 3, 5, 15. Broj 15 višekratnik je broja 3. Skup svih višekratnika broja 3 je

$$\{3, 6, 9 \ldots\} = \{n : n = 3k, k \in \mathbf{N}\}.$$

Skup svih višekratnika broja 5 je

$$\{5,\ 10,\ 15 \ldots\} = \{n : n = 5k,\ k \in \mathbf{N}\}.$$

Pravila djeljivosti s nekoliko početnih prirodnih brojeva poznajemo iz osnovne škole.

Pravila djeljivosti

Za prirodni broj $N = a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2 a_1$ vrijedi:

1. N je djeljiv s 2 ako i samo ako je paran.
2. N je djeljiv s 3 ako i samo ako je zbroj njegovih znamenaka $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1$ djeljiv s 3.
3. N je djeljiv s 4 ako i samo ako je dvoznamenkasti završetak $a_2 a_1$ djeljiv s 4.

4. N je djeljiv s 5 ako i samo ako je $a_1 = 0$ ili 5.

5. N je djeljiv s 8 ako i samo ako je troznamenkasti završetak $a_3a_2a_1$ djeljiv s 8.

6. N je djeljiv s 9 ako i samo ako je zbroj njegovih znamenaka $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1$ djeljiv s 9.

Zadatak 1. S kojim brojevima manjim od 10 su djeljivi sljedeći prirodni brojevi: 1160, 1164, 1395, 1908, 13832?

Prosti brojevi

Svaki je prirodni broj djeljiv s 1 i sa samim sobom. Tako je primjerice broj 11 djeljiv s 1 i s 11. On nema nijednog drugog djelitelja u skupu prirodnih brojeva. Za njega kažemo da je **prost** ili **primbroj**. Broj 6 djeljiv je s 1 i sa 6, ali isto tako je djeljiv s 2 i s 3. On nije prost.

Prosti brojevi

Prirodni broj $n > 1$ je **prost** (ili **prim**) broj ako je djeljiv samo s 1 i sa samim sobom. Inače je broj **složen**.

Broj 1 ne smatramo ni prostim ni složenim.

Neposrednom provjerom uvjerit ćemo se da su sljedeći brojevi prosti: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Svi drugi brojevi manji od 20: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18 su složeni.

Kako ćemo utvrditi je li neki broj prost ili nije?

Primjer 2. Je li broj 91 prost ili složen?

Ako je složen, onda je djeljiv nekim prirodnim brojem manjim od sebe.
Je li 91 djeljiv s 2? Nije, jer nije paran.
Je li 91 djeljiv s 3? Ne.
Je li 91 djeljiv sa 4? Nije, jer nije djeljiv s 2, pa ne može biti djeljiv ni s 4.
Je li 91 djeljiv s 5? Ne.
Je li 91 djeljiv sa 6? Nije, jer nije djeljiv s 2 (ni s 3).
Je li 91 djeljiv sa 7? Jest! Vrijedi $91 = 7 \cdot 13$, pa je on složen broj.

Pogledamo li još jednom postupak proveden u prethodnom primjeru, primijetit ćemo da je bilo dovoljno razmotriti *je li* 91 *djeljiv prostim brojevima*. Nije bilo nužno provjeriti je li broj djeljiv s 4 ili 6, zato što otprije znamo da nije djeljiv s 2.

Primjer 3. Je li 359 prost ili složen?

Da to utvrdimo, promotrit ćemo je li on djeljiv nekim prostim brojem. Dijelimo ga redom s 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 i vidimo da nije djeljiv ni s jednim od njih. Trebamo li dijeliti dalje? Ne!

Ako je prirodni broj n složen, tada za njega vrijedi

$$n = n_1 \cdot n_2,$$

pri čemu su prirodni brojevi n_1 i n_2 djelitelji (faktori) broja n, različiti od 1 i n. Možemo pretpostaviti da je $n_1 \leqslant n_2$. Onda vrijedi

$$n_1^2 \leqslant n_1 \cdot n_2 = n$$

pa mora biti $n_1 \leqslant \sqrt{n}$. Dakle, *najveći djelitelj složenog broja n nikad ne premašuje $\sqrt{n}$.*

Ako je 359 složen, onda on ima djelitelja koji ne premašuje $\sqrt{359} = 18.94$. Zato je bilo dovoljno provjeriti je li taj broj djeljiv s prostim brojevima od 2 do 17. Zaključak: 359 je prost.

Kriterij pronalaženja prostog broja

Prirodni broj n je prost ako i samo ako nije djeljiv ni s jednim prostim brojem koji je manji od ili jednak $\sqrt{n}$.

Kutak plus

PROSTI BROJEVI

U knjizi *Tablice i formule: matematika, fizika, astronomija, kemija* dan je popis prvih 3480 prostih brojeva (od 2 do 32 423). Ako je $\pi(n)$ broj prostih brojeva koji nisu veći od n, onda je $\pi(1000) = 168$, $\pi(10000) = 1\,229$, $\pi(10^5) = 9\,592$, $\pi(10^6) = 78\,498$, $\pi(10^7) = 664\,579$, $\pi(10^8) = 5\,761\,455$, $\pi(10^9) = 50\,847\,534$, $\pi(10^{10}) = 455\,052\,512$.

Najveći danas poznati prosti brojevi su oblika $2^m - 1$ (Merssenovi brojevi), za $m = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, \ldots, 756839$ (227 832 znamenke), 859 433 (258 716 znamenaka), 1 257 787 (378 632 znamenke), 1 398 269 (420 921 znamenka), 2 976 221 (895 932 znamenke), 3 021 377 (909 526 znamenaka), 6 972 593 (2 098 960 znamenaka).

Na internetskoj stranici **element.hr/plus/prvi-razred** možete pronaći tablicu prvih 100 000 prostih brojeva (od 2 do 1 299 709) te linkove do stranica s najnovijim otkrićima u vezi s prostim brojevima.

Faktorizacija prirodnog broja

Broj 234 nije prost, jer je paran pa je djeljiv s 2:

$$234 = 2 \cdot 117.$$

Je li 117 prost? Ne, jer mu je zbroj znamenaka djeljiv s 3, pa je i broj djeljiv s 3. Vrijedi $117 = 3 \cdot 39$. Tako imamo

$$234 = 2 \cdot 3 \cdot 39.$$

Možemo li ovaj postupak nastaviti? Da, jer 39 nije prost, on je ponovo djeljiv s 3: $39 = 3 \cdot 13$. Sad je

$$234 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13.$$

U ovom smo trenutku broj 234 rastavili na *umnožak prostih faktora.* Kažemo da smo ga *faktorizirali*.

Svaki se složeni prirodni broj može na ovaj način napisati kao *umnožak nekoliko prostih brojeva.* Prosti broj ima samo jedan prosti faktor, jer je djeljiv samo s 1 i sa samim sobom.

Kutak plus

NEKE ZANIMLJIVOSTI I NERIJEŠENI PROBLEMI IZ TEORIJE BROJEVA

Teorija brojeva uglavnom se smatra najljepšim dijelom matematike. Ni u jednom drugom području nije moguće postaviti tako jednostavan i razumljiv problem na koji nitko ne zna odgovor!

Savršeni brojevi. Broj koji je jednak zbroju svih svojih djelitelja koji su manji od njega nazivamo savršenim. Tako je primjerice 6 savršen broj jer je $6 = 1 + 2 + 3$. Savršen je i 28, jer je $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Algoritam za nalaženje parnih savršenih brojeva dao je još Euklid prije 2500 godina: "Računamo sume $1+2+4+8+\ldots$. Ako je zbroj prost, pomnožimo ga s posljednjim pribrojnikom i dobivamo savršeni broj. Tako su primjerice savršeni sljedeći brojevi:

$$1 + 2 = 3, \quad 3 \cdot 2 = 6$$

$$1 + 2 + 4 = 7, \quad 7 \cdot 4 = 28$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31, \quad 31 \cdot 16 = 496$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127, \quad 127 \cdot 64 = 8\,128$$

Oni su bili poznati još starim Grcima. Danas je poznato dvadesetak savršenih brojeva. Svi su oni parni i oblika $(2^m - 1)2^{m-1}$, pri čemu je $2^m - 1$ prost (Merssenov broj), kako je i Euklid sugerirao. *Ne zna se postoji li ijedan neparan savršen broj.*

Goldbachova hipoteza. "Svaki paran broj veći od 2 može se prikazati kao zbroj dvaju prostih brojeva." Ova je tvrdnja dobila ime po njemačkom matematičaru S. Goldbachu (1690.–1764.). *Do današnjeg dana nije dokazana ni opovrgnuta.*

Prosti brojevi blizanci. Dva uzastopna neparna broja koja su prosta nazivaju se *blizancima*. Tako su blizanci 3 i 5, 5 i 7, 11 i 13, 17 i 19, 29 i 31 itd. *Ne zna se ima li beskonačno mnogo takvih blizanaca.*

Faktorizacija prirodnog broja

Svaki se prirodni broj $n > 1$ može napisati u obliku

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k,$$

pri čemu su $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_k$ prosti brojevi.

Primjer 4.

Faktorizirajmo broj 5460.

Već na prvi pogled vidimo da je on djeljiv s 10, pa su 2 i 5 sigurno dva njegova prosta faktora. Preostale ćemo potražiti na opisani način. Čitav postupak pišemo u obliku tablice:

5460	5
1092	2
546	2
273	3
91	7
13	13

S desne strane okomite crte izdvojeni su prepoznati prosti faktori zadanog broja. Primjerice, broj je djeljiv s 5 i 2 (jer je djeljiv s 10), izdvajamo prosti faktor 5 i izvršimo dijeljenje. S dobivenim količnikom nastavljamo faktorizaciju dok se u posljednjem koraku ne dobije prost broj.

Dakle, vrijedi

$$5460 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13.$$

Eratostenovo sito

Sve proste brojeve manje od neke zadane granice možemo dobiti na učinkovitiji način, korištenjem **Eratostenova sita**.

Napišimo redom sve prirodne brojeve, recimo do broja 100. Prvi je prosti broj 2. Prekrižimo sada svaki sljedeći koji je djeljiv s 2 (oni nisu prosti, jer su djeljivi s 2). Prvi sljedeći koji nije prekrižen je prost, to je broj 3. Zatim prekrižimo sve višekratnike od 3 (koji nisu prekriženi već prije toga). Nastavimo postupak na isti način, sa sljedećim prostim brojem, 5.

Kad prekrižimo sve višekratnike broja 7, ostat će nam na papiru neprekriženi svi prosti brojevi manji od 100 i postupak je već gotov!

Taj ćemo postupak prikazati u sljedećim tablicama. Radi bolje preglednosti novoprekrižene brojeve označit ćemo i sivom bojom.

Višekratnici broja 2

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Višekratnici broja 3

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Višekratnici broja 5

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Višekratnici broja 7

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Brojevi koji su preostali u ovoj tablici su svi prosti brojevi manji od 100:

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47			
		53						59	
61						67			
71		73						79	
		83						89	
						97			

Kutak plus

TABLICA PROSTIH BROJEVA MANJIH OD 1000.

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181	191	193	197
199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359	367	373	379
383	389	397	401	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541	547	557	563	569	571
577	587	593	599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743	751	757	761
769	773	787	797	809	811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977
983	991	997												

Djeljivost u skupu cijelih brojeva

Na jednak način kao i u skupu prirodnih brojeva možemo definirati i djeljivost u skupu cijelih brojeva: cijeli broj b djeljiv je cijelim brojem a (različitim od nule) ako postoji cijeli broj k takav da je $b = ka$.

Primjer 5.

Broj 15 djeljiv je prirodnim brojevima 1, 3, 5 i 15. Isto tako, djeljiv je i s -1, -3, -5 i -15:

$$-5 \mid 15 \quad \text{jer} \quad 15 = (-3) \cdot (-5).$$

Skup svih djelitelja broja 15 je

$$\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}.$$

Ako tražimo sve djelitelje nekog prirodnog broja, vidimo da je dovoljno pronaći one koji su prirodni brojevi.

Slično tome, skup svih djelitelja broja -18 je

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}.$$

Prema definiciji djeljivosti, 0 je djeljiva svakim cijelim brojem različitim od nule. Naime, za svaki cijeli broj a vrijedi

$$a \mid 0 \quad \text{jer} \quad 0 = 0 \cdot a.$$

U različitim zadatcima često moramo utvrditi je li zbroj ili razlika dvaju cijelih brojeva djeljiva trećim brojem. O tome govori sljedeći poučak.

Djeljivost zbroja i razlike

1) Ako su cijeli brojevi a i b djeljivi cijelim brojem c, tada su s c djeljivi i njihov zbroj $a + b$ i njihova razlika $a - b$.

2) Ako je a djeljiv, a b nije djeljiv brojem c, onda zbroj $a + b$ i razlika $a - b$ nisu djeljivi s c.

Dokažimo ovaj poučak. Pretpostavimo da su a i b djeljivi s c. Onda postoje cijeli brojevi k i l takvi da je $a = kc$ i $b = lc$. Sad je $a + b = kc + lc = (k + l)c$ pa je $a + b$ djeljiv s c. Također je $a - b = (k - l)c$ pa je i $a - b$ djeljiv s c. Time je prva tvrdnja dokazana.

Drugu ćemo tvrdnju dokazati tako da ćemo pretpostaviti da ona nije istinita. Pretpostavimo dakle da je $a + b$ djeljivo s c. Sad napišimo: $b = (a + b) - a$. Prema upravo dokazanoj tvrdnji, slijedilo bi da je broj b djeljiv s c, što je neistina. Zato $a + b$ nije djeljiv s c.

Na sličan način dokaži da ni $a - b$ nije djeljivo s c.

Primjer 6.

1) Parni broj oblika $4k+2$ nije djeljiv s 4, jer je prvi pribrojnik djeljiv s 4, a drugi nije.

2) Napišimo pet uzastopnih prirodnih brojeva: $5k$, $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$, $5k+4$. Samo jedan (prvi) djeljiv je s 5, preostali brojevi nisu, jer drugi pribrojnik nije djeljiv s 5.

Dijeljenje s ostatkom

Ako cijeli broj b nije djeljiv cijelim brojem a, tada će se u postupku dijeljenja *pojaviti ostatak*.

Podijelimo 233 s 5. Dobivamo:

$$\begin{array}{rcrcr} 233 & : & 5 & = & 46 \\ 33 & & & & \\ 3 & & & & \end{array}$$

Rezultat dijeljenja zapisat ćemo ovako:

$$233 = 46 \cdot 5 + 3.$$

Količnik pri dijeljenju je 46, a ostatak 3.

Navedimo još jedan primjer. Podijelimo -376 sa 7. Dobivamo:

$$\begin{array}{rcrcr} 376 & : & 7 & = & 53 \\ 26 & & & & \\ 5 & & & & \end{array}$$

Rezultat dijeljenja možemo zapisati ovako:

$$376 = 53 \cdot 7 + 4$$

pa je

$$-376 = -53 \cdot 7 - 4.$$

Količnik pri dijeljenju je -53, a ostatak -4. Želimo li da ostatak ne bude negativan, onda rezultat ovog dijeljenja možemo napisati ovako:

$$-376 = -53 \cdot 7 - 7 - 4 + 7 = -54 \cdot 7 + 3$$

Dijeljenje cijelih brojeva

Rezultat dijeljenja cijelog broja b prirodnim brojem a možemo napisati u obliku:

$$b = qa + r.$$

Cijeli broj q je **količnik** (**kvocijent**) dijeljenja, a r **ostatak** dijeljenja. Za ostatak r uvijek vrijedi $0 \leqslant r < |a|$.

Dokažimo ovaj važni poučak. Promotrimo niz cijelih brojeva

$$\ldots, b-2a, b-a, b, b+a, b+2a, \ldots$$